UNIVERSIDAD DE MURCIA

Posgrado de Matemáticas

Máster de Matemática Avanzada

TESIS DE MASTER

EL TEOREMA DE LA ACOTACIÓN UNIFORME

José Jesús Rosell Escolar

Curso 2006-07

Gabriel Vera Boti, Catedrático del Área de Análisis Matemático y Coordinador del Programa de Posgrado de Matemáticas,

INFORMA: Que la Tesis de Master titulada "Teorema de la Acotación Uniforme" ha sido realizada por D. José Jesús Rosell Escolar, dentro del Máster de Matemática Aplicada.

En Murcia, a 19 de Septiembre de 2007

Fdo: Gabriel Vera Boti

D. Bernardo Cascales Salinas, Catedrático del Área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia.

AUTORIZA: La presentación de la Tesis de Máster titulada “Teorema de la Acotación Uniforme”, realizada por D. José Jesús Rosell Escolar, bajo mi inmediata dirección y supervisión, dentro del Máster de Matemática Avanzada.

En Murcia, a 19 de Septiembre de 2007

Fdo: Bernardo Cascales Salinas

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi mujer Mónica, a mi hija Claudia, y a la memoria de mi madre.

Agradecicmientos

Quisiera agradecer a D. Bernardo Cascales Salinas toda la paciencia que ha tenido y su ánimo en todos los aspectos, es un gran profesor y mejor persona.

Tesis de Master

El teorema de la Acotación Uniforme

José Jesús Rosell Escolar

dirigida por

Bernardo Cascales Salinas

Introducción

En esta memoria estudiamos el *Teorema de la Acotación Uniforme* de Banach y Steinhaus, que nos permite deducir la equicontinuidad de una familia de funcionales lineales y continuos si ésta está puntualmente acotada. Hemos estudiado la evolución del Teorema con los años. Damos distintas demostraciones y algunas notables aplicaciones que ponen de manifiesto el enorme potencial e importancia de este resultado. Concluimos la memoria recogiendo resultados de un profundo trabajo de investigación, [16], donde se analizan entre otras cosas posibles mejoras del teorema de Banach-Mackey, íntimamente relacionado con el Teorema de la Acotación Uniforme. Algunos de los resultados presentados contienen pequeñas aportaciones originales.

El *Teorema de Acotación Uniforme* fue publicado por primera vez utilizando la técnica del *Sliding-Hump* creada por Lebesgue, aunque más adelante, en una de las famosas reuniones en el *Café Escocés* se demostró con la ayuda del *teorema de Baire*, de una manera más elegante: estas distintas demostraciones están recogidas en la memoria.

Esta memoria esta dividida en cuatro capítulos.

El Capítulo 1 se dedica a unas breves reseñas históricas de Banach e Steinhaus. Nos ha parecido importante ubicar a los autores del Teorema de la Acotación Uniforme en su contexto histórico. A la vez, hemos incluido un epígrafe dedicado al *Scotish Book*, originado por Banach, donde hemos recogido algunos de los problemas allí contemplados que marcaron el desarrollo del Análisis Funcional durante la segunda mitad del siglo XX: en particular recogemos los problemas concernientes al Teorema del Punto Fijo de Schauder, Teoría de la Aproximación y los problemas del Hiperplano y Subespacio Homogéneo de Banach cuya resolución valió a Gowers la medalla Fields en 1998.

En el Capítulo 2 recogemos distintas demostraciones del Teorema de la Acotación Uniforme. Nuestra idea aquí es ir de los casos particulares a los casos más generales, explorando a la vez todas las técnicas que han sido utilizadas para demostrar el resultado. Empezamos con una demostración del Teorema de la Acotación Uniforme en espacios de Hilbert donde, junto a la completitud del Hilbert, utilizamos propiedades elementales del producto escalar: no se necesita en este caso el Teorema de Baire. El Teorema de Baire es utilizado para demostrar el Teorema de la Acotación Uniforme entre espacios de Banach y el método del *sliding hump* se utiliza para la demostración en el caso de espacios de Fréchet. Acabamos el capítulo estudiando la noción de espacio tonelado que permite demostrar las versiones más generales del Teorema de la Acotación Uniforme: se demuestra que la clase de espacios localmente convexos tonelados está caracterizada por la propiedad de que en ellos se satisface el Teorema de la Acotación uniforme (tomados como espacios de partida).

El Capítulo 3 se dedica a diversas aplicaciones clásicas: (a) Teorema de la Base débil; (b) estudio de aplicaciones bilineales separadamente y conjuntamente continuas; (c) estudio de funciones holomorfas vectoriales; (d) métodos de sumabilidad; (e) existencia de funciones continuas 2π-periódicas cuya serie de Fourier es puntualmente divergente; (f) convergencia de sucesiones de operadores polinómicos trigonométricos definidos en espacios de funciones continuas; (g) estudio del teorema de Gráfica cerrada para espacios tonelados. Destacamos que en el estudio que hacemos de la relación entre espacios tonelados y el Teorema de la Gráfica Cerrada hemos generalizado técnicas de [24] que nos han permitido dar un punto de vista original cuando estudiamos espacios metrizables tonelados. También nos ocupamos de separar las distintas clases de espacios en los que se satisface el Teorema de la Acotación uniforme, por ejemplo los espacios de Banach y espacios normados tonelados: al hacer esto comentamos algunas posibles aplicaciones de estos resultados al campo de la integración vectorial.

En el Capítulo 4 hemos estudiado en profundidad el artículo de investigación [16]. La cuestión que estudiamos es la siguiente. El Teorema de la Acotación Uniforme entre espacios de Banach se utiliza para demostrar la siguiente equivalencia (que en el contexto general de espacios localmente convexos se conoce como Teorema de Banach-Mackey):

Teorema A.- *Un subconjunto A de un espacio normado X está acotado en norma si sólo si $x^*(A)$ está acotado para todo $x^* \in B_{X^*}$.*

Lo que hacemos en este capítulo, siguiendo a [16], es estudiar condiciones que aseguran que se puede obtener la equivalencia anterior bajo la hipótesis más débil de que $x^*(A)$

está acotado pero sólo para los puntos extremales x^* de la bola unidad B_{X^*}. Para esto usamos el ***Teorema de Krein-Milman***, el ***Teorema de inversión de Milman***, el ***Teorema de Rainwater*** y el ***Principo de seleción de Bessaga-Pelczynski***, llegando a demostrar la caracterización de Fonf de los espacios de Banach que no contienen a c_0 en términos que el conjunto de puntos extremales de su bola dual tiene que ser *pequeño*. Esto nos permite demostrar que en el Teorema A de arriba se puede reemplazar B_{X^*} por el conjunto de puntos extremales $ExtB_{X^*}$ cuando $X \not\supset c_0$.

La terminología y notación que utilizamos es estandar y es la empleada en la inmensa mayoría de los libros de Análisis Funcional y topología como [11, 29] y [28, 15]. Cuando es necesario fijamos la notación empleada y algunas definiciones.

Dadas las exigencias que me ha supuesto el desarrollo este trabajo, he tenido que repasar y estudiar muchos conceptos generales y teoremas de Análisis Funcional, algunos de los cuales he recogido en el *glosario* al final. Los términos que están en el glosario aparecen la primera vez en el texto resaltados en itálica y en negrita, ejemplo Espacios de ***Hilbert***.

PARA finalizar quisiera agradecer todo el apoyo y amor que me ha dado Mónica, su paciencia, sus silencios y sobre todo su ilusión para que trabaje. A Claudia por darme todos los días una *pequeñita* alegría. A Carlos Angosto que me ha ayudado a depurar una parte de esta memoria. A Bernado Cascales por animarme, guiarme y apoyarme en este mi primer trabajo.

A mi madre.

José Jesús Rosell Escolar
Murcia, 19 de Septiembre de 2007.

Contenidos

Capítulo 1

Biografías de Banach y Steinhaus

«CONTENIDOS»

- Biografía de Banach: tomada de *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Banach*.
- Biografía de Steinhauss: tomada de *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Steinhaus*.
- Comentarios sobre el *Scottish Book*.
- Selección de algunos problemas del *Scottish Book* y otros propuestos por Banach en su libro [*Théorie des óperations linéaires*] que han dado lugar al desarrollo de algunas de las teorías más importantes en Análisis Funcional.

PRESENTAMOS en este trabajo el teorema de la acotación uniforme, un teorema que fue probado por primera vez por Helly para sucesiones de funcionales lineales y continuos en $C[a,b]$ en su obra de 1912 *Uber linearer Funktionaloperatioen*. La primera versión más general fue presentada en 1922 por Banach en *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales* ,por Hanh en *Uber Folgen linearer Operationen* y por Hildebrandt en *On uniform limitedness of sets of funtional operations*. La versión, quizás más elegante, de este teorema fue publicada por Banach y Steinhaus en 1927, en *Sur le principe de condensation de la singularities* usando el teorema de la categoría de Baire en vez de la técnica de *sliding hump*, prueba sugerida por Saks mientras leía una versión preliminar del teorema. Durante un tiempo, al teorema se le llamo *teorema de Banach-Steinhaus*.

Comenzamos con las biografías de Banach y Steinhaus. Junto a este teorema publicaron muchos otros trabajos que dieron lugar al nacimiento de lo que hoy conocemos como Análisis Funcional. En este camino no estuvieron solos, formaron un grupo de matemáticos que se reunían en el café escocés para hablar, proponer, solucionar y premiar distintos problemas matemáticos, algunos de los cuales no se han resuelto, y que se escribieron en el llamado Scotish Book. Terminaremos el capítulo seleccionando algunos de estos problemas y del libro de Banach *Théorie des óperations linéaires*.

Nuestras referencias básicas para este capítulo son [1, 32, 33].

1.1. Stefan Banach

STEFAN Banach nació en Kracovia, Polonia, el 30 de marzo de 1892 y murió en Leópidas, Ucrania, el 31 de agosto de 1945. El padre de Banach fue Stefan Greczek, funcionario de hacienda. Banach es el apellido de la madre, de la cual sólo se sabe que se llamaba Katarzyna Banach desconociéndose más sobre ella. En sus primeros años de estudiante, Banach tomó contacto con las matemáticas y las ciencias, consiguiendo sus mejores notas.

Algunos compañeros destacaban de Banach:

> *"Banach fue un alumno amable de trato cordial con sus compañeros, que estaba interesado en las matemáticas. Cuando hablaba de matemáticas, lo hacía muy rápido, tan rápido como pensaba. Wilkosz era parecido, no habiendo problema matemático que no pudieran resolver entre los dos, aunque Wilkosz estaba interesado además en problemas de física"*

Al finalizar la secundaria Banach consiguió notas excelentes lo que le valió para ingresar en la Universidad junto con Wilkosz; sin embargo pensaron que no había nada nuevo que descubrir en matemáticas y empezaron carreras distintas: Banach empezó ingeniería y Wilkosz lenguas orientales.

Banach abandonó Kracovia y se fue a Leópidas en 1910, a la facultad de ingeniería técnica, donde tuvo que trabajar como tutor para pagarse los estudios. Se graduó en 1914. No se sabe con seguridad cuales eran sus planes en 1914, pero no pudo llevarlos a cabo de forma inmediata. En agosto de 1914, al poco de su graduación, estalló la primera guerra mundial. Leópidas estuvo, en tiempos de estudiante de Banach, bajo control de Austria, sin control de la Unión Soviética. Varsovia sólo tenía una Universidad de lengua rusa y estaba situada en la zona llamada "Vistula". Con el final de la primera guerra mundial, Leópidas fue ocupada por el ejército soviético. Banach no fue alistado en el ejército por ceguera parcial en su ojo izquierdo. Durante la guerra trabajó construyendo caminos y también trabajó en Kracovia donde ganaba algún dinero enseñando en las escuelas locales. Además acudió a talleres matemáticos en la Universidad de Jagiellonian en Kracovia y aunque no se puede asegurar, se cree que estuvo en la clases de Zaremba.

En la primavera de 1916, ocurrió el cambio más significativo en la vida de Banach. Steinhaus, que estaba llevando a cabo el servicio militar, fue a una cita en la Universidad de Leópidas. Según relata en sus memorias, conoció a Banach mientras paseaba por las calles de Kracovia:

> *"Durante uno de mis muchos paseos por la ciudad, escuche las palabras* «medida de Lebesge». *Aproveché la ocasión y me presente a los dos jóvenes estudiantes de matemáticas. Ellos me dijeron que tenían a otro compañero llamado Wilton Wilkosz, a quien admiraban. Los estudiantes eran Stefan Banach y Otto Nikodym. Desde entonces nos reuníamos regularmente y decidimos establecer una sociedad matemática."*

Steinhaus contó a Banach un problema en el que estaba trabajando sin éxito. Después de unos días, Banach tuvo la idea principal del contraejemplo y entre los dos escribieron un artículo que fue presentado a Zaremba para su publicación. La guerra impidió la publicación, pero el artículo, el primero de Banach, apareció en el boletín de la Universidad de Kracovia en 1918. Desde ese primer artículo con Steinhaus, Banach escribió varios más, algunos de ellos muy importantes en poco tiempo. Es imposible decir que si no hubiese aparecido Steinhaus, Banach no habría empezado sus investigaciones matemáticas. También se sospecha que fue Steinhaus quien presentó a Banach la que sería su mujer, Lucjia Braus. Se casaron en el complejo de montaña de Zakopane en 1920.

Por iniciativa de Steinhaus, se fundó la Sociedad Matemática de Kracovia en 1919. Zaremba dirigió la sesión inaugural y fue elegido primer presidente de la Sociedad. Banach dio dos conferencias en 1919 y continuó produciendo artículos de gran calidad. La Sociedad Matemática de Kracovia se convirtió en 1920 en la Sociedad Polaca de Matemáticas. A Banach se le ofreció el asesoramiento de Lommicki en la Universidad técnica de Leópidas en 1920: trabajó en matemáticas en su disertación bajo la supervisión de Lommicki. No es la manera usual para doctorarse, ya que Banach no tenía calificaciones matemáticas en la Universidad. De cualquier manera, se le hizo una excepción con su *"Operaciones en conjuntos abstractos y sus aplicaciones en ecuaciones integrales"*, que constituyó su tesis: algunos dicen que este trabajo *"fue el nacimiento del análisis funcional"*

En 1922 la Universidad Jan Kmizimierz en Leópidas incorporó a Banach en su plantilla. El calendario de la Universidad de 1920-21 decía:

> *"El 7 de abril de 1922, por resolución del consejo de la facultad, el doctor Stefan Banach recibe su habilitación como docente en matemáticas."*

En 1924 Banach fue a París para permanecer el curso académico 1924-25. Entre las dos guerras mundiales estuvo muy ocupado. Escribió importantes artículos sobre aritmética, geometría y álgebra. Entre ellos destaca el *Teorema de la acotación uniforme* en 1927 que dio lugar al *Teorema de Banach-Steinhaus* ese mismo año. En 1929, junto con Steinhaus, fundaron la nueva revista *Studia Mathematica* siendo sus primeros editores. La revista estaba destinada a *"la búsqueda y publicación de resultados en el análisis funcional y sus aplicaciones"*. En 1931 empezaron una serie de monografías matemáticas, bajo la supervisión de Banach y Steinhaus en Leópidas, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz y Sierpinski en Varsovia. El primer volumen de esta serie fue *Théorie des opérations linéaires* escrito por Banach y aparecido en 1932. Era una versión francesa de la monografía que publicó Banach en polaco en 1931 y que rápidamente se convirtió en una publicación clásica. En 1936 Banach expuso en el congreso internacional de matemáticas en Oslo las nuevas ideas en las que estaban trabajando el grupo de Leópidas.

Figura 1.1: Café Escocés

Otra influencia positiva para Banach fue la contratación de Kuratowski en la Universidad Técnica de Leópidas en 1927, en la que permaneció hasta 1934. Banach colaboró con Kuratowski y escribieron varios artículos juntos durante ese periodo. El método de trabajo de Banach era poco convencional. Le gustaba hacer matemáticas con sus colegas en los cafes de Leópidas. Ulam recuerda las sesiones del *Café Escocés*:

"Era difícil durante esas sesiones. Discutíamos problemas propuestos en el momento, a menudo sin solución evidente hasta después de horas pensándolos. Al día siguiente a Banach le gustaba venir con notas que contenían correcciones de pruebas que había completado"

Andrej Turowicz, también profesor de matemáticas en la Universidad de Kazimierz, describe el estilo de trabajo de Banach de la siguiente forma:

"Banach estaba la mayoría del día en los cafes, no sólo en compañía de otros compañeros, también él sólo. Le gustaba el ruido y la música, no le molestaban para concentrarse y pensar. Habían casos, cuando los cafes cerraban por las noches, en los que solía ir a la estación de tren, donde la cafetería estaba abierta. Con un vaso de cerveza, él pensaba en sus problemas."

En 1939, justo cuando empezó la segunda guerra mundial, Banach fue elegido presidente de la Sociedad Matemática Polaca. Al principio de la guerra, las tropas soviéticas ocuparon Leópidas. Banach, que estaba bien considerado entre los matemáticos soviéticos, fue bien tratado por la nueva administración soviética gobernante. La ocupación nazi de Leópidas en junio de 1941 significó para Banach vivir en condiciones difíciles. Fue arrestado bajo sospecha de tráfico ilegal de divisas alemanas pero fue liberado a las pocas semanas. Él sobrevivió a esa época, cuando mataron a los académicos polacos, entre ellos a Lomnicki durante la trágica noche del 3 de julio 1941. Tan pronto como regresaron las tropas soviéticas, renovó sus contactos. Se encontró con Sobolev a las afueras de Moscú, pero estaba severamente enfermo. Sobolev dando una conferencia en memoria de Banach dijo de este encuentro:

"A pesar de la dura etapa de años de guerra, y a pesar de su grave enfermedad, sus ojos estaban llenos de vida. Emanaba la misma sociabilidad, amabilidad y extraordinario entendimiento del Stefan Banach que yo conocí en Leópidas antes de la guerra: gran sentido del humor, energía y gran talento".

Banach planeó ir a Kracovia después de la guerra para tomar un puesto en la Universidad, pero murió de cáncer en Leópidas en 1945. Banach fundo el análisis funcional moderno e hizo su mayor contribución en la teoría de espacio vectorial topológico , además de la teoría de la medida, integración, teoría de conjuntos y series ortogonales. En su tesis, escrita en 1920, definió axiomáticamente lo que hoy llamamos espacio de Banach. No fue el único que trabajó en esa idea, Wiener introdujo esta noción también pero no la desarrolló.

La importancia de la contribución de Banach es que desarrolló una teoría sistemática del análisis funcional, donde hasta entonces sólo habían resultados aislados que pasaron a formar parte de esta teoría. Banach probó un número de resultados fundamentales en espacios normados lineales, y de muchos otros teoremas que llevan su nombre como por ejemplo:

- El teorema de Hahn-Banach de extensiones de funcionales lineales.
- El teorema de Banach-Steinhaus, que desarrollaré en esta tesis.
- La teorema de Banach-Alaoglu.
- El teorema del punto fijo de Banach.
- La paradoja de Banach-Tarski, sobre la descomposición de una bola mediante una partición finita en dos bolas idénticas a la primera.

1.2. Hugo Steinhaus

HUGO Dyonizy Steinhaus nació el 23 de Enero de 1887 en Jaslo, Galicia, imperio austriaco (ahora Polonia) y murió el 25 de Febrero de 1972 en Wroclaw, Polonia. Hugo Steinhaus nació en el seno de una familia de intelectuales judíos. Su ciudad de nacimiento esta a medio camino entre Kracovia y Leópidas. Su tío fue un importante político del imperio. Después de su servicio militar en la legión de Polonia al principio de la primera guerra mundial, Steinhaus vivió en Kracovia.

Paseando por Leópidas en 1916, conoció a Banach y a Nikodym. Steinhaus creó la Sociedad de Matemáticas de Kracovia, que paso después a ser la Sociedad Matemática de Polonia. En esta época empezó su colaboración con Banach y tomó posesión como profesor en la Universidad Jan Kazimierz de Leópidas. Kac, alumno de Steinhaus durante esos años, cuenta:

" La influencia de Lebesgue era directa. La escuela, la sociedad matemática,... Banach y Steinhaus concentrados principalmente en el estudio del análisis funcional y en sus diversas aplicaciones, la teoría general de series ortogonales, la teoría de la probabilidad. No hay duda que algunas de estas teorías estarían archivadas todavía si no se entendieran perfectamente la medida e integral de Lebesgue".

Steinhaus fue la figura principal de los matemáticos de Leópidas hasta 1941. Fue el primero en definir y discutir, en 1925, el concepto de estrategia en teoría de juego. Steinhaus publicó su segundo trabajo con Banach, *Sur le principle de la condensation des singularités*, en 1927. En 1929, junto con Banach creó la revista *Studia Mathematica*. En la serie de monografías matemáticas –editadas por Steinhaus y Banach en Leópidas, Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz y Sierpinski en Varsovia– Steinhaus contribuyó con un volumen escrito junto con Kaczmarz en 1937 titulado *Teoría de series ortogonales.*

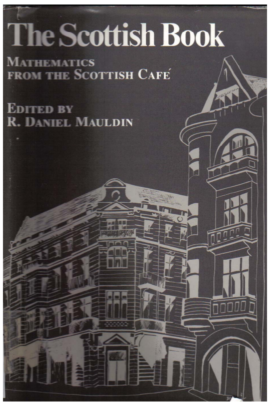
Steinhaus es también conocido por su libro *Mathematical Snapshots* escrito en 1937. Como ya se ha comentado anteriormente, los matemáticos de Leópidas hicieron un gran trabajo de desarrollo en los cafes, en particular en el *Café Escocés* aunque Steinhaus prefería, según Ulam, *"frecuentar los salones de té que sirvieran las mejores pastas"*. Fue precisamente en el Café Escocés donde se abrió y empezó a escribir el *Libro Escocés –Scottish Book–* que llegó a ser un libro de problemas propuestos por los matemáticos que se reunían. Steinhaus propuso diez de ellos, incluyendo el último de todos escrito el 31 de mayo de 1941, días antes de la ocupación de Leópidas por las tropas nazis.

Cuando las hostilidades de la guerra terminaron en 1938, Steinhaus propuso a Lebesgue para un premio honorífico de Leópidas. Steinhaus bromeaba diciendo que *"No será un mal recuerdo para olvidar, tener a Banach primero y a Lebesgue al final para el premio"*. La recepción a Lebesgue, después de la ceremonia del premio, fue en el *Café Escocés* pero sólo fueron quince matemáticos, dada que la escuela matemática de Leópidas se reducía considerablemente por cuestiones políticas. Steinhaus estuvo el año 1941 escondiéndose de los nazis, sufriendo una gran privación y hambre, pero siempre pensando en las matemáticas.

En 1945 Steinhaus se fue a la Universidad de Wroclaw, e hizo muchas visitas a las universidades de Estados Unidos. Después de terminar la segunda guerra mundial, el *Libro Escocés* que había sido escondido por Mazur, Steinhaus lo envió a Ulam que vivía en Estados Unidos. El libro fue traducido al inglés y publicado. Steinhaus, ahora en la universidad de Wroclaw, decidió que era demasiado bueno para que terminara y en 1946, Steinhaus extendió la tradición del Café Escocés a Wroclaw con el *New Scottish Book*.

La bibliografía de Steinhaus contiene 170 artículos, su trabajo más importante lo hizo en análisis funcional, pero para él su descubrimiento más importante fue Stefan Banach. Algunos de sus trabajos fueron en series trigonométricas. Fue el primero en dar algunos ejemplos y contraejemplos para avances en esta materia. Fue el primero que dio un ejemplo de serie trigonométrica que era divergente en cada punto, a la vez que sus términos tienden a cero. También dio un ejemplo de serie trigonométrica que convergen en todos los puntos de un intervalo pero diverge en otro. Además contribuyó con estudios en series ortogonales, teoría de probabilidad, funciones reales y sus aplicaciones. En particular a Steinhaus se le asocia con la teoría de funciones independientes, que deriva de su trabajo en teoría de la probabilidad, y fue el primero de dar una definición precisa del concepto de *independencia* y de *distribución uniforme*.

1.3. El libro escocés



ENTRE la primera y la segunda guerra mundial, la ciudad de Leópidas fue un importante centro cultural y científico. La vida social florecía en numerosos cafes donde se reunían artistas y científicos. Algunos cafes se encontraban cerca del Politécnico de Leópidas, donde trabajan Banach y Steinhaus. Los matemáticos del Politécnico se empezaron a reunir en el *Café Roma* los sábados por la noche, después del seminario semanal de Matemáticas; sin embargo Banach, molesto porqué el Café no le quería dar crédito, decidió trasladar las tertulias al *Café Escocés*, situado en la acera de enfrente.

Además de Banach, otros asistentes eran Steinhaus, Mazur , Kaczmarz, Auerbach, Schauder, Kuratowski y Nikodym, entre otros. Generalmente llegaban al café entre las cinco y las siete de la tarde y se pasaban varias horas planteando y resolviendo problemas matemáticos y anotando las soluciones en las mesas, lo cual no era del agrado del dueño del local. Cuando alguien planteaba un problema, los miembros del grupo se quedaban en silencio, mientras bebían tazas de café. En una ocasión una de esas reuniones duró diecisiete horas, dando por resultado la demostración de un importante teorema del análisis funcional; sin embargo al día siguiente se encontraron con que la mesa donde ésta se apuntó había sido escrupulosamente borrada. Para evitar más problemas con el dueño y que se perdiera el trabajo, Lucja, esposa de Banach, compró una gruesa libreta de pasta dura, la cual encargó al dueño del local para que su marido y sus colegas apuntaran sus problemas. El *Libro Escocés*, como comenzó a llamarse a la libreta, estaba al alcance de todo matemático que acudía al café. En ella se apuntaban problemas abiertos al inicio de cada página impar, dejando el resto de la página y el reverso de esta en blanco para que alguien después proporcionara la solución.

El primer problema en el libro, propuesto por Banach el 17 de Julio de 1935, fue:

Problema 1

¿Cuándo un espacio métrico (posiblemente del tipo B) puede ser metrizado por una nueva métrica de forma que sea completo y compacto, y que todas las sucesiones que convergían en la anterior métrica lo hagan en la nueva? ¿Puede, por ejemplo, el espacio c_0 ser metrizado de esta forma?

Con frecuencia la persona que apuntaba un problema en el libro, ofrecía un premio por su solución, el cual podía ser un café, una cerveza, una botella de vino o de cognac o un ganso vivo. En 1936 la sombra de la guerra se cernía sobre Europa. Los matemáticos que se reunían en el Café acordaron que en caso de bombardeo, Mazur guardaría el libro en una caja de ajedrez y lo enterraría junto a una de las porterías del campo de fútbol de la ciudad, para recuperar el libro al acabar las hostilidades. Entre 1939 y 1941, en el *Libro Escocés* aparecen anotaciones de distinguidos matemáticos soviéticos como Alexandrov, Sobolev y Lusternik.

El *Libro Escocés* sobrevivió a la guerra en buen estado y Steinhaus mandó una copia a Ulam que se había exiliado en Estados Unidos. En 1957 Ulam lo tradujo al inglés y distribuyó unas copias entre amigos; un año después en el Congreso Internacional de Matemáticas que se celebraba en Edimburgo, Ulam distribuyó copias entre los asistentes.

El último problema lo escribió Steinhaus el 31 de Mayo de 1941, en total hay 193 problemas registrados. El *Libro Escocés*, estuvo en posesión de Lucja, la esposa de Banach, hasta su muerte en 1954, que pasó a Stefan, hijo de Banach.

Steinhaus, que consideraba que un sólo libro era poco,y propuso continuar con el espíritu de investigación lanzando un *Nuevo Libro Escocés*, pero faltaban muchos compañeros, entre ellos Banach, y los demás estaban exiliados en distintos países, lo que supuso que no se llegara a buen término el proyecto.

A continuación recogemos unos pocos problemas del *Libro Escocés*, véase [32], y también del libro de Banach [1], que han marcado el desarrollo de algunas parcelas importantes en el Análisis Funcional del último siglo. Durante la década de los noventa el matemático inglés William T. Gowers resolvió algunos problemas planteados por Banach utilizando técnicas de análisis combinatorio, ganando el ganso del premio. Por estas y otras aportaciones se le concedió la medalla Fields en 1998.

Caricatura del Café Escocés

Problema 7 (Banach y Mazur) - Clasificación espacios de Banach por homeomorfismos

¿Son dos subconjuntos convexos, compactos y de dimensión infinita de un espacio de Banach (del tipo B) siempre homeomorfos?

Keller probó que todos los subespacios compacto, convexos, infinito dimensionales de un espacio de Hilbert son homeomorfos con el cubo $[0,1]^{\aleph_0}$ y es extensible a espacios de Fréchet : Anderson y Kadec, demostraron que todos los espacios de Fréchet de dimensión infinita y separables son homeomorfos y esta teoría es culminada por Toruńczyk [39] al concluir que cualquier espacio de Fréchet es homeomorfo a un espacio de Hilbert.

Problema 49 (Banach y Mazur) - Existencia de espacios Universales

¿Existe un espacio E del tipo B con la propiedad W que es universal para todos los espacios del tipo B con la propiedad W?
La propiedad W es la siguiente:

1. *El espacio es separable y débilmente compacto. Es decir, de cada sucesión acotada podemos extraer una subsucesión débilmente convergente a un elemento.*
2. *El espacio contiene una base(numerable).*
3. *El espacio adjunto es separable.*

El espacio E es isométricamente (isomorfamente) universal para los espacios de una clase $\mathscr{K}$ si cada espacio de esta clase es isométrico (isomorfo) a un subespacio vectorial del espacio E.

Este problema fue probado negativamente para la propiedad (1) en 1967 por W. Szlenk de Varsovia, que demostró que si X es un espacio de Banach separable que contiene isomorfismo de todos los espacios de Banach separables y reflexivos, entonces X^* no es separable: notar que en nuestro lenguaje moderno la noción de espació débilmente compacto corresponde a la noción de espacio de Banach reflexivo.

(2) fue probado por Banach y Mazur quienes demostraron que $C[0,1]$ es universal para todos los espacio de Banach separables.

(3) fue probado negativamente por P. Wojtaszczyk en 1970 usando los métodos de Szlenk

Problema 54 (Schauder) - Teoría del punto fijo

(a) Un conjunto convexo, cerrado y compacto H es transformado mediante una aplicación continua $U(x)$ en una parte de si mismo. H está contenido en un espacio vectorial topológico metrizable y completo. ¿Tiene H un punto fijo?
(b) El mismo problema que el anterior pero cuando además H se supone que es localmente convexo.

Este problema ha dado lugar a una cantidad enorme de resultados concernientes al teorema del punto fijo, véase el articulo de Granas en el libro [32]. Mientras que el problema

(b) tienen solución positiva el problema (a) todavía permanece abierto: actualmente hay una discusión muy viva sobre la solución que para (a) fue publicada por Cauty en [6]; han habido congresos dedicados exclusivamente a discutir la validez de la prueba de Cauty pero aún hoy no esta claro que esta prueba sea cierta.

Problema 153 (Mazur) - Teoría de la Aproximación

Dada una función continua $f(x,y)$ definida para $0 \leq x,y \leq 1$ y el número positivo $\varepsilon > 0$, ¿existen números $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$; $c_1, c_2, \ldots, c_n$ con la propiedad

$$\left| f(x,y) - \sum_{k=1}^{n} c_k f(a_k, y) - f(x, b_k) \right| \leq \varepsilon$$

en el intervalo $0 \leq x,y \leq 1$?

Grothendieck probó en su tesis doctoral, 1955, que este problema es equivalente a al problema de la Aproximación: esta última cuestión fue considerada uno de los problemas centrales abiertos en el Análisis Funcional. El problema de la aproximación es el siguiente: *¿Es cada operador lineal compacto T de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y el límite de operadores de Rango finito?* El espacio de Banach Y se dice que tiene la propiedad de la aproximación si la respuesta al problema anterior es positiva para cada espacio de Banach X y cada operador compacto T. Cada espacio Y con una base de Schauder tiene la propiedad de la aproximación: así el problema 153 está muy relacionado con el problema de la base (*¿Tiene cada espacio de Banach separable una Base de Schauder?*). Como cada espacio de Hilbert tiene (y por tanto la propiedad de la aproximación) Grothendieck concluyó que el Problema 153 tiene solución positiva si f es Lipschitziana con constante de Lipschitpz menor o igual que 2.

La respuesta al problema de la aproximación (así como al Problema 153 y al problema de la base) es negativa. Esto fue probado por Enflo en 1972, [14]. El ganso prometido por la solución al Problema 153 se entregó a Enflo un año después durante una charla de Enflo en Varsovia.

Acabamos esta sección recogiendo dos de los problemas más famosos de Banach que no están en *Scotish book* pero que aparecen en [1]. Estos problemas han dado lugar a una enorme teoría de que fue culminada por los resultados de Gowers que le valieron una medalla Fields en 1998.

Problema del hiperplano y del homomorfismo de Banach, [1]

(a) ¿Es cada espacio de Banach infinito dimensional isomorfo a sus hiperplanos?
(b) ¿Es ℓ^2 el único espacio de Banach que es isomorfo a todos sus subespacios infinito dimensionales?

Tsirelson [7] construyó un espacio de Banach reflexivo que no contiene subespacios isomorfos a ℓ^p para $1 < p < +\infty$. Un espacio de Banach X se llama estable si para cualesquiera sucesiones acotadas $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ en X y para dos ***ultrafiltros*** libres $\mathscr{U}$ y $\mathscr{V}$ en $\mathbb{N}$

$$\lim_{n\in\mathscr{U}} \lim_{m\in\mathscr{V}} \|x_n + y_m\| = \lim_{m\in\mathscr{V}} \lim_{n\in\mathscr{U}} \|x_n + y_m\|.$$

Krivine y Maurey [30] probaron que los espacios de Banach estables contienen, para cada $\varepsilon > 0$, un subespacio que es $(1+\varepsilon)$-isométrico a ℓ_p para algún p. La construcción de Tsirelson fue modificada por Schlumprecht [37] abriendo así la puerta para la construcción de Gowers y Maurey [20] de un espacio separable reflexivo X que no contiene ningún subespacio infinito-dimensional con una base incondicional (ver Gowers, [17]. El ejemplo X de Gowers-Maurey tiene la propiedad de que, para cada subespacio Z, cada proyección lineal y continua P de X sobre Z es trivial, *i.e.*, o $\dim PZ < \infty$ o $\dim Z/PZ < \infty$. Un espacio de Banach con esta propiedad se dice que es *hereditariamente indescomponible*. Un espacio de Banach hereditariamente indescomponibe no es isomorfo a ninguno de sus subespacios propios y esto proporciona una respuesta al *problema del hiperplano de Banach* en el que se preguntaba si cada espacio de Banach infinito dimensional es isomorfo a sus hiperplanos [18].

La siguiente dicotomía establecida por Gowers ([19]) clarifica que los espacios hereditariamente indescomponibles no son sólo ejemplos patológicos, sino que son esenciales desde el punto de vista de la estructura en la teoría general de los espacios de Banach: *cada espacio de Banach de dimensión infinita tiene un subespacio hereditariamente indescomponible o un subespacio con una base incondicional*. La demostración de este resultado es combinatoria y utiliza teoría de Ransey. Como una consecuencia del resultado anterior Gowers resolvió el *"homogeneous space problem"* mostrando que ℓ^2 es el único espacio de Banach que es isomorfo a cada uno de sus subespacios de dimensión infinita.

Capítulo 2

Teorema de la Acotación Uniforme

«CONTENIDOS»

- Demostración del teorema de la Acotación Uniforme en espacios de Hilbert sin necesidad del teorema de Baire ni del método del *Sliding-Hump*.
- Demostración del Teorema de la Acotación Uniforme en espacios de Banach utilizando el teorema de Baire.
- Demostración del Teorema de la Acotación Uniforme en espacios de Fréchet utilizando el método del *Sliding-Hump*.
- Introducción de los espacios tonelados como los espacios naturales donde sirve el teorema de la Acotación Uniforme.
- Estudio de la relación entre espacios tonelados y el teorema de la Gráfica cerrada.

En este capítulo estudiamos el teorema de la Acotación Uniforme yendo del caso más particular (espacios de Hilbert) al caso más general (espacios tonelados) para los que el teorema es cierto. Haciéndolo así aislamos lo esencial de las pruebas poniendo de manifiesto como en los espacios de Hilbert no es necesario el concurso del teorema de Baire, sección 2.1. A partir de ahí demostramos en la sección 2.2 el teorema en el caso de espacios de Banach, utilizando el teorema de Baire, y enunciando el resultado que sigue que parece no ser la forma habitual en la que los libros lo enuncian:

Teorema 2.2.10. *Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio de Banach e $(Y_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ una familia de espacios normados. Sea $A_i : X \to Y_i$, $i \in I$, lineal y continua de forma que cada $x \in X$ se tiene que $sup_{i\in I}||A_i(x)||_i < \infty$. Entonces $sup_{i\in I}||A_i|| < \infty$.*

El método del *Sliding-Hump* es utilizado después, sección 2.3, para demostrar el teorema de la Acotación Uniforme para espacios de Fréchet tal y como aparece en [3] por vez primera para este tipo de espacios.

Finalmente introducimos los espacios tonelados como aquellos en los que de forma natural se satisface el teorema de la Acotación Uniforme, sección 2.4. Esta sección se completa demostrando que la clase de espacios tonelados es la clase más general de espacios localmente convexos que pueden tomarse en partida para demostrar el teorema de Gráfica Cerrada cuando se consideran los espacios de Banach como espacios de llegada: damos una demostración de este resultado que es novedosa y hace intervenir las ideas originales de Banach que están detrás de los conceptos de conjunto CS-compacto y CS-cerrado en espacios metrizables tales como se introducen en [23] para espacios normados: nuestra demostración no es la que habitualmente se puede encontrar en los libros.

Nuestras referencias básicas para este capítulo son [4, 24, 26, 29].

2.1. El Teorema de la Acotación Uniforme para Espacios de Hilbert

Abordamos el Teorema de la Acotación Uniforme para formas lineales definidas en un ***Espacio de Hilbert***, sin necesidad de utilizar el teorema de la Categoría Baire. La demostración nos servirá para, usando el ***Teorema de representación de Riesz***, demostrar el teorema entre dos espacios de Hilbert cualesquiera. Los artículos y libros utilizados son [22] y [8].

Como motivación para la prueba del Teorema de la Acotación Uniforme, Teorema 2.1.2 debajo, empezamos por aislar el siguiente ejercicio. Siguiendo la notación habitual si $(H, < \cdot >)$ es un espacio de Hilbert, denotaremos por $\|\cdot\|$ la norma asociada dada por $\|x\|^2 :=< x,x >$ para cada $x \in H$.

Proposición 2.1.1. *Sea $\{y_n\}_n$ una sucesión ortogonal en el espacio de Hilbert $(H, < \cdot >)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para cada $x \in H$ existe $M(x) \in \mathbb{R}$ tal que

$$|< x, y_n >| \leq M(x)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

(ii) La sucesión $\{y_n\}_n$ es acotada en norma.

Demostración. La implicación (ii)⇒(i) es clara. Sea $M > 0$ tal que $\|y_n\| \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$. La desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que

$$|< x, y_n >| \leq \|x\| \|y_n\| \leq \|x\| M := M(x).$$

Recíprocamente, la implicación (i)⇒(ii) se demuestra por reducción al absurdo. Supongamos que (i) es cierta y que $\{y_n\}_n$ no está acotada en norma. Entonces podemos seleccionar una subsucesión, $\{z_n\}_n$ de $\{y_n\}_n$ tal que $\|z_n\| \geq n^2$. Definimos ahora $e_n = \dfrac{z_n}{\|z_n\|}$, $n \in \mathbb{N}$. Notamos que $\{e_n\}_n$ es una sucesión ortonormal. Entonces, la serie

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k$$

converge a un elemento $x \in H$ dado que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. Tenemos así que

$$< x, z_n > = < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k, z_n > = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < e_k, \|z_n\| e_n > = \frac{1}{n} \|z_n\| \geq \frac{n^2}{n} = n.$$

Por lo tanto $|< x, z_n >| \to +\infty$ lo que conlleva una contradicción con (i) que termina la prueba. □

En general aunque no tengamos *ortogonalidad* de la sucesión $\{y_n\}_n$ podemos todavía hacer la prueba de la proposición anterior en general: necesitamos una construcción más complicada que es recogida en el teorema que sigue.

Teorema 2.1.2 (Teorema de la Acotación Uniforme). *Sea $(H, < \cdot >)$ un espacio de Hilbert y sea $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de vectores en H. Si para cada $x \in H$ existe $M(x) \in \mathbb{R}$ independiente de α para el que se cumple*

$$|< x, y_\alpha >| \leq M(x) \tag{2.1}$$

para todo $\alpha \in A$, entonces existe M tal que

$$\|y_\alpha\| \leq M \tag{2.2}$$

para todo $\alpha \in A$.

Demostración. La demostración la hacemos por reducción al absurdo suponiendo que (2.2) no es cierta y que (2.1) si lo es. Si esto es así podemos determinar $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión, elegida de entre los $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$, tal que $\{\|y_n\|\}_n$ es monótona creciente con límite $+\infty$ pero satisfaciendo, gracias a (2.1), que

$$|< x, y_n >| \leq M(x) \tag{2.3}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Seleccionamos ahora un número natural $n(1)$ para el que se cumpla

$$\left\|y_{n(1)}\right\| \geq 1^2,$$

Definimos $z_1 = y_{n(1)}$ y $e_1 = z_1 / \|z_1\|$.

Por hipótesis existe $M(e_1) \in \mathbb{R}$ tal que $| < e_1, y_n > | \leq M(e_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Determinamos ahora $n'(2) > n(1)$ cumpliendo $\|y_n\| \geq 2^2$ para todo $n \geq n'(2)$ y definimos la sucesión $\beta_n = \dfrac{| < e_1, y_n > |}{\|y_n\|}$. Por hipótesis se tiene que,

$$0 \leq \beta_n \leq \frac{M(e_1)}{\|y_n\|} \to 0$$

y por tanto $\{\beta_n\}_n$ también tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Así existe $n^*(2) \in \mathbb{N}$ cumpliendo

$$\beta_n = \frac{| < e_1, y_n > |}{\|y_n\|} \leq 2^{-2} \text{ para todo } n \geq n^*(2).$$

Tomando $n(2) = \text{máx}\{n'(2), n^*(2)\}$ se cumple que

$$\frac{| < e_1, y_{n(2)} > |}{\left\|y_{n(2)}\right\|} \leq 2^{-2}, \ \left\|y_{n(2)}\right\| \geq 2^2 \text{ y } n(2) > n(1)$$

Definimos $z_2 = y_{n(2)}$ y $e_2 = z_2 / \|z_2\|$

Procediendo recurrentemente, obtenemos una subsucesión $\{z_n\}_n$ de $\{y_n\}_n$ cumpliendo $\|z_n\| \geq n^2$ y de forma que para sus vectores normalizados $\{e_n\}_n = z_n / \|z_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$| < e_1, e_{n+1} > | + | < e_2, e_{n+1} > | + \ldots + | < e_n, e_{n+1} > | \leq 2^{-(n+1)}$$

para todo n.

Los vectores e_n satisfacen las siguientes propiedades:

(a)

$$|<e_n,e_m>| \leq \sum_{k=1}^{m-1} |<e_k,e_m>| \leq 2^{-m} \text{ para todo } n<m. \tag{2.4}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |<e_k,e_n>| = \sum_{k=1}^{n-1} |<e_k,e_n>| + 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |<e_k,e_n>| \leq$$

$$2^{-n}+1+\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} = 1+2^{-n}+\frac{2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 1+2^{-n+1}$$

Observemos que (b) conduce de forma inmediata la desigualdad

$$\sum_{k=1 k\neq n}^{\infty} |<e_k,e_n>| \leq 2^{-n+1} \tag{2.5}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a demostrar a continuación que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} e_k$ converge en H. Denotemos por $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} e_k$ su suma parcial n-ésima, que es un vector de H al ser combinación lineal de un conjunto finito de vectores. Al ser H espacio de Hilbert la convergencia de la serie anterior equivale a que la sucesión $\{S_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy. Fijados $2 \leq n < m$ al calcular $\|S_m - S_{n-1}\|^2$ tenemos

$$\|S_m - S_{n-1}\|^2 = <S_m - S_{n-1}, S_m - S_{n-1}> = <\frac{1}{n}e_n + \ldots + \frac{1}{m}e_m, \frac{1}{n}e_n + \ldots + \frac{1}{m}e_m> =$$
$$\left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right) + \sum_{j=n, j\neq n}^{m} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{j} <e_n,e_j> + \ldots + \sum_{j=n, j\neq m}^{m} \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{j} <e_m,e_j>.$$

Al tomar valores absolutos y teniendo en cuenta (2.5) se concluye que

$$\|S_m - S_{n-1}\|^2 \leq \left(\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}\right) + \left(\frac{1}{n2^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{m2^{m-1}}\right) \to 0$$

cuando $m,n \to \infty$ dado que las series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot 2^{k-1}}$ son convergentes. Consecuentemente la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$ es de Cauchy en H y por tanto converge a un punto $x \in H$ como queríamos demostrar, *i.e.*,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k \in H.$$

Para terminar la prueba demostraremos ahora que la sucesión $\{| < x, z_n > |\}_n$ no está acotada, lo que proporciona una contradicción con (2.3) dado que $\{z_n\}_n$ es una subsucesión de $\{y_n\}_n$. Empezamos por notar que

$$\begin{aligned}
< x, z_n > &= < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e_k, z_n > \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < e_k, z_n > \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < e_k, z_n > \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < e_k, \|z_n\| e_n > = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \|z_n\| < e_k, e_n > \\
&= \|z_n\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < e_k, e_n > .
\end{aligned}$$

Por tanto tenemos, usando (2.5)

$$\begin{aligned}
&| < x, z_n > | = \\
&= ||z_n|| \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < e_k, e_n > \right| \geq n^2 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} < e_k, e_n > \right| = n \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k} < e_k, e_n > \right| \\
&= n \left| 1 - \left(- \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{n}{k} < e_k, e_n > \right) \right| \geq \\
&\geq n \left(1 - n \left| \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{1}{k} < e_k, e_n > \right| \right) \geq n \left(1 - n \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{1}{k} | < e_k, e_n > | \right) \\
&\geq n \left(1 - n \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} | < e_k, e_n > | \right) \geq n \left(1 - \frac{n}{2^{n-1}} \right) \to +\infty
\end{aligned}$$

cuando n tiende a infinito, llegando a contradicción que termina la prueba. □

Observemos que en realidad la condición (2.2) es de hecho equivalente a la condición (2.1) dado que claramente (2.2)⇒(2.1) si utilizamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz tal y como ya se hizo en la Proposición 2.1.1. Esta equivalencia la recogemos en el siguiente Corolario.

Corolario 2.1.3. *Sea* $(H, <\cdot>)$ *un espacio de Hilbert y* $B \subset H$. *Son equivalentes:*

(i) Para cada $x \in H$ *se tiene que* $\sup_{y\in B} |<x,y>| < +\infty$.

(ii) B *es acotado en norma.*

Este corolario nos dice que los subconjuntos acotados para las topologías débil y de la norma de un espacio de Hilbert son los mismos: véase el Capitulo 3 donde se trata esta cuestión en espacios más generales.

Pudiera pensarse que el enunciado del Teorema 2.1.2 es más débil que el clásico teorema de la Acotación Uniforme para aplicaciones lineales y continuas en espacios de Hilbert. Como vemos a continuación esto no es así: con la ayuda del teorema de representación de Riesz obtenemos el resultado general que se sigue del Teorema 2.1.2.

Corolario 2.1.4. *Sean* H_1 *y* H_2 *dos espacios de Hilbert, y* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una familia de operadores lineales acotados de* H_1 *a* H_2 *de manera que*

$$\|T_\alpha(x)\| \leq M(x)$$

para todo $x \in H_1$ *y todo* $\alpha \in A$. *Entonces existe* $M > 0$ *cumpliendo que*

$$\|T_\alpha\| < M$$

para todo $\alpha \in A$.

Demostración. Denotamos por $<\cdot>$ el producto escalar en ambos espacios de Hilbert. Sea B_{H_2} la bola unidad cerrada del Hilbert H_2. Para cada $y \in B_{H_2}$ y $\alpha \in A$, definimos $F_{\alpha y} : H_1 \to \mathbb{K}$ por la fórmula

$$F_{\alpha y}(x) = <T_\alpha(x), y>$$

que es un funcional lineal y acotado al ser composición de dos funcionales lineales y acotados:

$$F_{\alpha y} = \phi_y \circ T_\alpha$$

donde $\phi_y(z) = <z,y>$ para $z \in H_2$. Por el ***Teorema de representación de Riesz*** existe $x_{\alpha y} \in H_1$ de manera que cumple

$$F_{\alpha y}(x) = <x, x_{\alpha y}> \text{ y } ||F_{\alpha y}|| = ||x_{\alpha y}||.$$

La familia $\{x_{\alpha y} : \alpha \in A, y \in B_{H_2}\}$ satisface que para cada $x \in H_1$

$$|<x, x_{\alpha y}>| = |F_{\alpha y}(x)| = |<T_\alpha(x), y>| \leq ||T_\alpha(x)|| \cdot ||y|| \leq ||T_\alpha(x)|| \cdot 1 \leq M(x)$$

cota que no depende de α ni de y. Por 2.1.2 existe $M > 0$ tal que $||x_{\alpha y}|| \leq M$ para todo $\alpha \in A$ y todo $y \in B_{H_2}$. Por tanto:

$$\begin{aligned} M &\geq \sup_{\alpha\in A}\sup_{y\in B_{H_2}} ||x_{\alpha y}|| = \sup_{\alpha\in A}\sup_{y\in B_{H_2}} ||F_{\alpha y}|| = \\ &= \sup_{\alpha\in A}\sup_{y\in B_{H_2}}\sup_{x\in B_{H_1}} |F_{\alpha y}(x)| = \sup_{\alpha\in A}\sup_{y\in B_{H_2}}\sup_{x\in B_{H_1}} |<T_{\alpha y}(x), y>| = \\ &= \sup_{\alpha\in A}\sup_{x\in B_{H_1}}(\sup_{y\in B_{H_2}} |<T_{\alpha y}(x), y>|) = \sup_{\alpha\in A}(\sup_{x\in B_{H_1}} ||T_\alpha(x)||) = \\ &= \sup_{\alpha\in A} ||T_\alpha|| \end{aligned}$$

Por lo que $||T_\alpha|| \leq M$ para todo $\alpha \in A$ y termina la demostración. □

2.2. El Teorema de la Acotación Uniforme para espacios de Banach

Abordamos el teorema de la Acotación Uniforme en su versión para espacios de Banach. Usaremos aquí como herramienta el teorema de la Categoría de Baire, definiendo previamente los conjuntos de primera y segunda categoría. Completamos la sección con una pequeña variante del teorema de la Acotación Uniforme, cuya demostración es un pequeño ejercicio, en el que se permite que las aplicaciones lineales acotadas que intervienen tomen valores en espacios normados distintas, que no es la forma habitual de presentación en los libros. Aquí hemos utilizado como referencias básicas los libros [4], [21] y [29].

La siguiente definición es bien conocida en topología.

Definición 2.2.1. *Sea T un espacio topológico y R un subconjunto de T. Se dice que R es* denso en ninguna parte *o* raro *si su clausura tiene interior vacío, i. e. , int$\overline{R} = \emptyset$. Las uniones numerables de conjuntos raros en T se llaman conjuntos de primera categoría en T. Los conjuntos que no son de primera categoría en T se llaman de segunda categoría en T.*

Obsérvese que el espacio T es de segunda categoría en sí mismo si, y sólo si, la intersección numerable de abiertos densos es no vacía. A las intersecciones numerables de abiertos se les da en topología el nombre de conjuntos G_δ.

Definición 2.2.2. *Un espacio topológico se llama de Baire si la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos es un conjunto denso.*

Todo espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo. El siguiente teorema, conocido como teorema de la categoría, es una herramienta fundamental para la prueba de muchos resultados del Análisis: teorema de la Acotación Uniforme, teorema de la Gráfica Cerrada, existencia de funciones continuas no diferenciables, existencia de puntos de equicontinuidad para sucesiones de funciones puntualmente convergentes, etc.

Si (M,d) es un espacio métrico $x \in M$ y $r > 0$ utilizamos la siguiente notación para las bolas cerradas y abiertas en el espacio:

$$B[x,r] := \{y \in M : d(y,x) \leq r\}$$
$$B(x,r) := \{y \in M : d(y,x) < r\}.$$

Teorema 2.2.3 (Teorema de Baire)**.** *Si (M,d) es un espacio métrico completo, entonces M es espacio de Baire.*

Demostración. Sea $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos en M. Como sabemos, demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es denso es equivalente a demostrar que para cualquier abierto no vacío $V \subset M$ se tiene que $V \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n)$ es no vacío. Como G_1 es denso en M, $G_1 \cap V$ es un abierto no vacío. Tomemos $x_1 \in M$ y $r_1 < 1$ de modo que $B[x_1, r_1] \subset V \cap G_1$. Como G_2 es denso en M, existen $x_2 \in M$ y $r_2 < 1/2$ de modo que

$$B[x_2, r_2] \subset G_2 \cap B(x_1, r_1) \subset G_2 \cap G_1 \cap V. \tag{2.6}$$

Por inducción se construyen sucesiones $(x_n)_n$ en M y $(r_n)_n$ en $(0,\infty)$ con $r_n < 1/n$, de modo que

$$B[x_n, r_n] \subset G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset G_n \cap \ldots \cap G_2 \cap G_1 \cap V.$$

La sucesión $(x_n)_n$ así construida es de Cauchy puesto que se tiene

$$B(x_n, r_n) \subset B[x_n, r_n] \subset B(x_{n-1}, r_{n-1})$$

y $\text{lím}_n r_n = 0$: obsérvese que para $m \geq n$ se tiene

$$x_m \in B(x_n, r_n) \tag{2.7}$$

y por lo tanto $d(x_m, x_n) \leq r_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Dado que (M, d) es métrico completo, existe $x \in M$ que es el límite $(x_n)_n$. Gracias a (2.6) y a (2.7) se tiene que

$$x \in B[x_n, r_n] \subset G_n \cap V \text{ para cada } n.$$

De esta forma hemos demostrado que, $x \in V \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n)$ y así termina la prueba. □

Conviene observar que si el espacio M no es completo el teorema anterior no es cierto. Por ejemplo para $M = \mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ con la métrica inducida por la de $\mathbb{R}$ se cumple que $G_n := M \setminus \{q_n\}$ es un abierto denso, mientras que $\cap_n G_n = \emptyset$.

El teorema de Baire es herramienta básica en la demostración del teorema que siguiente.

Teorema 2.2.4 (Teorema de la acotación uniforme)**.** *Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de aplicaciones lineales continuas del espacio normado X en el espacio normado Y y sea*

$$D = \{x \in X : \sup_{i \in I} \|A_i(x)\| = \infty\}.$$

Entonces

(i) Si D^c es de segunda categoría, entonces D es vacío y $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$.

(ii) Si X es de Banach, entonces, o bien $\sup_{i \in I} \|A_i\| < \infty$, *o bien D es un G_δ denso en X.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$D_n = \bigcup_{i \in I} \{x \in X : \|A_i(x)\| > n\}.$$

Cada D_n es abierto. Efectivamente, como $B(0,n) = \{y \in Y : \|y\| > n\}$ es un conjunto abierto en Y, al ser los A_i continuos se tiene que $A_i^{-1}(B(0,n))$ es abierto; por lo tanto $D_n = \bigcup_{i \in I} A_i^{-1}(B(0,n))$ es abierto por ser unión de abiertos. Por otro lado tenemos que

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n.$$

Probamos esta igualdad: sea $x \in D$, cumple que $\sup_{i \in I} \|A_i(x)\| = \infty$, que equivale a decir que para n existe $i_n \in I$ tal que $\|A_{i_n}(x)\| > n$ y por definición de D_n se tiene que $x \in D_n$

para todo n por lo que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$. Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$, entonces $x \in D_n$para todo n, por lo que existe $i_n \in I$ de manera que $\|A_{i_n}(x)\| > n$ por lo que $\sup_{i\in I} \|A_i(x)\| = \infty$ y por tanto $x \in D$.

Si $D^c = \bigcup_n D_n^c$ es de segunda categoría, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $D_{n_0}^c$ tiene interior no vacío, es decir, existe $B[x_0, r] \subset D_{n_0}^c$. Por tanto, para todo $x \in B[x_0, r]$ y para cada $i \in I$ se tiene que $\|A_i(x)\| \leq n_0$ por definición de $D_{n_0}^c$. De aquí se sigue que si $y \in B[0, r]$ se tiene que $x_0 - y \in B[x_0, r]$ ya que $\|(x_0 - y) - x_0\| = \|y\| \leq r$. Consecuentemente, para cada $y \in B[0, r]$ y cada $i \in I$ tenemos

$$\|A_i(y)\| = \|A_i(y - x_0 + x_0)\| \leq \|A_i(x_o)\| + \|A_i(x_0 - y)\| \leq n_0 + n_0 = 2n_0.$$

De aquí se sigue que D es vacío y que $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$. Efectivamente, $x \in X$ se tendría que $\frac{rx}{\|x\|} \in B[0, r]$ y por tanto para todo i se tendría $\|A_i(\frac{rx}{\|x\|})\| \leq 2n_0$ de lo que se deduce que $\|A_i(x)\| \leq \frac{2n_0\|x\|}{r}$. Esta última desigualdad conduce a que $D = \emptyset$ y $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$.

Veamos ahora (ii). Si X es un espacio de Banach, el teorema de Baire 2.2.3 nos proporciona que la densidad de D equivale a que todos los D_n son densos. Por tanto se tiene la siguiente alternativa:

- **ó** algún D_n no es denso, en cuyo caso D_n^c tiene interior no vacío, y procediendo como en el apartado anterior se obtendría que D es vacío y $\sup_{i\in I} \|A_i\| < \infty$
- **ó** bien todos los D_n son densos, en cuyo caso D es un G_δ denso.

Esto termina la prueba. □

El teorema puede ser reformulado como sigue:

Teorema 2.2.5 (Teorema de la acotación uniforme)**.** *Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de aplicaciones lineales continuas del espacio de Banach X en el espacio normado Y. Entonces*

- ***ó*** $\{x \in X : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty\}$ *es de primera categoría en X,*
- ***ó*** $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$.

La segunda opción se da cuando $\{x \in X : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty\}$ es de segunda categoría en X, por ejemplo cuando $X = \{x \in X : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty\}$.

El ejemplo que sigue pone de manifiesto que el teorema anterior no es cierto si sólo se supone que el espacio de partida X es normado: en la sección 2.4 veremos que hay una noción más débil que la completitud del espacio X que puede ser utilizada para obtener el teorema de la Acotación Uniforme.

Ejemplo 2.2.6. *Sean $X = (c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ y $(f_n)_n$ la sucesión de formas lineales en X definidas por*

$$f_n(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ donde } x = (x_j)_j \in c_{00}.$$

La sucesión $(f_n)_n$ es puntualmente acotada y $\|f_n\| = n$, i.e.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < +\infty \text{ para cada } x \in c_{00} \text{ y } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| = +\infty.$$

Demostración. Sea $x = (x_n)_n \in c_{00}$, existe $N \in \mathbb{N}$ de manera que $x_n = 0$ cuando $n > N$; por tanto la sucesión

$$\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_N(x), f_N(x), f_N(x), \ldots\}$$

tiene una cantidad finita de términos distintos y en consecuencia

$$\sup\{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty,$$

Por otro lado, dada f_n si $x \in x_{00}$ con $\|x\|_\infty \leq 1$ sabemos que

$$|f_n(x)| = |\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n,$$

por lo que

$$\|f_n\| = \sup\{|f_n(x)| : \|x\|_\infty \leq 1\} \leq n.$$

Si tomamos ahora

$$x = (1, \underbrace{\ldots}_{n}, 1, 0, \ldots),$$

se tiene que $\|x\|_\infty = 1$ y concluimos que y

$$n = f_n(x) \leq \|f_n\| \leq n.$$

Así concluimos $\|f_n\| = n$ y así termina la prueba. □

Teorema 2.2.7 (Teorema de Banach-Steinhaus)**.** *Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión de aplicaciones lineales continuas de un espacio de Banach X en un espacio normado Y tal que existe $T(x) = \lim T_n(x)$ para todo $x \in X$, entonces:*

(i) La aplicación $T \in L(X,Y)$ y

$$\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \leq \sup_n \|T\|.$$

(ii) T_n converge uniformemente hacia T sobre los subconjuntos compactos de X.

Demostración. La sucesión $(T_n(x))_n$ es acotada para cada $x \in X$ por ser convergente, y por el teorema de la Acotación Uniforme 2.2.5 podemos concluir que $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Obviamente T es lineal y si $x \in B_X$ entonces:

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq \liminf_n \|T_n\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty,$$

por lo que $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\| < +\infty$ lo que prueba el Teorema de Banach-Steinhaus.

Para probar el segundo apartado, considerando la sucesión $(T_n - T)_n$, puede suponerse, sin perder generalidad, que $T = 0$. Dados un conjunto compacto $A \subset X$ y $\varepsilon > 0$, se trata de probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $\|T_n(x)\| < \varepsilon$, para todo $x \in A$. Desde luego esa acotación puede conseguirse si x varía en un conjunto finito. Como A es compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en A tales que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, \varepsilon/2M)$$

siendo $M := \sup_n \|T_n\| < \infty$ –suponemos que $M > 0$ pues en otro caso nada hay que demostrar. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n(x_i)\| < \varepsilon/2$ si $n \geq n_0$ y $1 \leq i \leq p$. Si $x \in A$, entonces existe x_j tal que $x \in B(x_j, \varepsilon/2M)$ y, por tanto,

$$\|T_n(x)\| \leq \left\|T_n(x - x_j)\right\| + \left\|T_n(x_j)\right\| \leq \|T_n\| \cdot \|x - x_j\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así pues $\lim_n T_n(x) = 0$ uniformemente en el compacto A. $\square$

El siguiente corolario generaliza en particular el Corolario 2.1.3.

Corolario 2.2.8. *Sean X e Y espacios normados:*

(i) Si $A \subset X$, entonces A es acotado si, y sólo si, para cada $x^* \in X^*$, el conjunto $x^*(A)$ es acotado en $\mathbb{K}$.

(ii) Si X es un espacio de Banach y $A \subset X^*$, entonces A es acotado en norma si, y sólo si, $\{x^*(x) : x^* \in A\}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{K}$ para cada $x \in X$.

(iii) Si $T : X \to Y$ es lineal, entonces T es continua si, y sólo si, para cada $y^* \in Y^*$, la composición $y^* \circ T$ pertenece a X^*.

Demostración. Veamos la demostración de (i). Si $A \subset X$ está acotado entonces $x^*(A)$ es acotado para cada $x^* \in X^*$: al ser A acotado, existe $M > 0$ tal que $\|a\| \leq M$ para todo $a \in A$, sea $x^* \in X^*$ entonces $|x^*(a)| \leq \sup\{|x^*(a)| : x^* \in X^*\} = \|a\| \leq M$ para todo $a \in A$, por lo que $x^*(A)$ está acotado para todo x^*. Recíprocamente, observemos que cada $a \in A$ determina una aplicación lineal continua definida en el dual $(X^*, \|\cdot\|)$ mediante

$$\hat{a}(x^*) = x^*(a), \text{ para cada } x^* \in X^*;$$

el teorema de Hahn-Banach nos garantiza que $\|\hat{a}\| = \|a\|$, [4, Proposición 3.1.8]. Por tanto, si $x^*(A)$ está acotado para cada $x^* \in X^*$ se tiene que la familia $\{\hat{a}\}_{a \in A}$ de aplicaciones lineales cumple las hipótesis del Teorema 2.2.5 y por lo tanto $\sup\{\|\hat{a}\| : a \in A\} = \sup\{\|a\| : a \in A\} < \infty$ y queda probado el apartado (i).

El apartado (ii) se obtiene de forma análoga.

El directo del apartado (iii) es inmediato, ya que si T es continua, entonces la composición de aplicaciones lineales continuas es continua. Para el recíproco, basta ver que $T(B_X)$ el acotado, pero se deduce de (i) y por tanto T es continua. □

El resto de esta sección está dedicado a recoger los resultados que necesitamos para demostrar el Teorema 2.2.10 donde permitimos en el clásico teorema de la Acotación Uniforme 2.2.5 que las aplicaciones tomen valores en espacios normados diferentes.

Recordemos que si $\{Y_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios vectoriales (sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$) el producto $\prod_{i \in I} Y_i$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial con las operaciones:

i) $(y_i)_{i \in I}, (\widetilde{y}_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$, la suma se define como:

$$(y_i)_{i \in I} + (\widetilde{y}_i)_{i \in I} = (y_i + \widetilde{y}_i)_{i \in I}$$

ii) $a \in \mathbb{K}$, $(y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} Y_i$, el producto por un escalar se define como:

$$a \cdot (y_i)_{i \in I} = (a \cdot y_i)_{i \in I}$$

Notemos que el vector nulo en $\prod_{i \in I} Y_i$ es $(0_i)_{i \in I}$ donde cada 0_i es el elemento nulo en el correspondiente Y_i.

Proposición 2.2.9. *Sean $\{Y_i, \|\cdot\|_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios normados. Definimos*

$$\bigoplus_{\ell^\infty(I)} Y_i := \{(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i : \sup_{i\in I} \|y_i\|_i < \infty\}.$$

(i) *$\bigoplus_{\ell^\infty(I)} Y_i$ es un subespacio vectorial de $\prod_{i\in I} Y_i$.*

(ii) *La aplicación $\|\cdot\|_\infty : \bigoplus_{\ell^\infty(I)} Y_i \to \mathbb{K}$ dada por*

$$\|(y_i)_{i\in I}\|_\infty := \sup_{i\in I} \|y_i\|_i$$

es una norma en $\bigoplus_{\ell^\infty(I)} Y_i$.

(iii) *Si cada $(Y_i, \|\cdot\|_i)$ es un espacio de Banach, entonces $\bigoplus_{\ell^\infty(I)} Y_i$ es espacio de Banach.*

(iv) *Sea $I_j : (Y_j, \|\cdot\|_j) \to \bigoplus_{\ell^\infty(I)} Y_i$ definida como*

$$I_j(y) = (y_i)_{i\in I} = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ y & si\ i = j \end{cases}$$

Entonces I_j es isometría:

Demostración. La demostración es muy sencilla, pero para hacer autocontenida esta memoria la incluimos a continuación: para simplificar la notación escribiremos $Y := \bigoplus_{\ell^\infty(I)} Y_i$.

Veamos como se demuestra (i). Sean $a, b \in \mathbb{K}$ e $(y_i)_{i\in I}(\widetilde{y}_i)_{i\in I} \in Y$, tenemos que probar que

$$a\cdot(y_i)_{i\in I} + b\cdot(\widetilde{y}_i)_{i\in I} \in Y.$$

Por la definición del producto por un escalar y la definición de suma tenemos que

$$a\cdot(y_i)_{i\in I} + b\cdot(\widetilde{y}_i)_{i\in I} = (a\cdot y_i + b\cdot\widetilde{y}_i)_{i\in I},$$

y al tomar norma en $(Y_i, \|\cdot\|_i)$ tenemos:

$$\|a\cdot y_i + b\cdot\widetilde{y}_i\|_i \leq |a|\cdot\|y_i\|_i + |b|\cdot\|\widetilde{y}_i\|_i \leq |a|\cdot\sup_{i\in I}\|y_i\|_i + |b|\sup_{i\in I}\|\widetilde{y}_i\|_i$$

pero $M = \sup_{i\in I} \|\widetilde{y}_i\|_i < \infty$ y $N = \sup_{i\in I} \|\widetilde{y}_i\|_i < \infty$, por lo tanto, para todo $i \in I$ se tiene que

$$\|a\cdot y_i + b\cdot\widetilde{y}_i\|_i \leq |a|\cdot M + |b|\cdot N < \infty$$

y por tanto

$$\sup_{i\in I} \|a\cdot (y_i)_{i\in I} + b\cdot (\widetilde{y}_i)_{i\in I}\|_i < \infty.$$

De esta forma hemos demostrado que $a\cdot (y_i)_{i\in I} + b\cdot (\widetilde{y}_i)_{i\in I} \in Y$. Así Y es un subespacio vectorial de $\prod_{i\in I} Y_i$.

Demostramos ahora (ii). Para ello comprobamos en (α),(β) y (γ) debajo que $\|\cdot\|_\infty$ satisface las propiedades de una norma.

(α) $\|(y_i)_{i\in I}\|_\infty = 0$ *si, y sólo si,* $(y_i)_{i\in I} = (0_i)_{i\in I}$: si $(y_i)_{i\in I} = (0_i)_{i\in I}$, por la definición de $\|\cdot\|_\infty$ se tiene que

$$\|(y_i)_{i\in I}\|_\infty = \|(0_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I} \|0_i\|_i = 0.$$

Recíprocamente, si $\|(y_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I} \|(y_i)\|_i = 0$ entonces se tiene que $0 \le \|y_i\|_i \le 0$ para todo $i\in I$, y por eso

$$\|y_i\|_i = 0_i \text{ para todo } i\in I.$$

Como $\|\cdot\|_i$ es una norma en Y_i se cumple que $y_i = 0_i$ para todo $i\in I$, y consecuentemente tenemos que $(y_i)_{i\in I} = (0_i)_{i\in I}$.

(β) $\|a(y_i)_{i\in I}\|_\infty = |a|\cdot\|(y_i)_{i\in I}\|_\infty$:Sea $a\in\mathbb{K}$ e $(y_i)_{i\in I}\in Y$ tenemos

$$\|a\cdot (y_i)_{i\in I}\|_\infty = \|(a\cdot y_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I}\|a\cdot y_i\|_i = \sup_{i\in I}|a|\cdot\|y_i\|_i =$$
$$= |a|\sup_{i\in I}\cdot\|y_i\|_i = |a|\cdot\|(y_i)_{i\in I}\|_\infty.$$

(γ) $\|(y_i)_{i\in I} + (\widetilde{y}_i)_{i\in I}\|_\infty \le \|(y_i)_{i\in I}\|_\infty + \|(\widetilde{y}_i)_{i\in I}\|_\infty$: Por definición tenemos que

$$\|(y_i)_{i\in I} + (\widetilde{y}_i)_{i\in I}\|_\infty = \|(y_i+\widetilde{y}_i)_{i\in I}\|_\infty = \sup_{i\in I}\|y_i+\widetilde{y}_i\|_i.$$

Para cada $i\in I$, por ser norma $\|\cdot\|_i$, tenemos que

$$\|y_i+\widetilde{y}_i\|_i \le \|y_i\|_i + \|\widetilde{y}_i\|_i \le \sup_{i\in I}\|y_i\|_i + \sup_{i\in I}\|\widetilde{y}_i\|_i = \|(y_i)_{i\in I}\|_\infty + \|(\widetilde{y}_i)_{i\in I}\|_\infty.$$

Combinando las desigualdades anteriores tenemos:

$$\|(y_i)_{i\in I} + (\widetilde{y}_i)_i\|_\infty = \sup_{i\in I}\|y_i+\widetilde{y}_i\|_i \le \|(y_i)_{i\in I}\|_\infty + \|(\widetilde{y}_i)_{i\in I}\|_\infty.$$

Esto termina la demostración de que $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado.

La afirmación en (*iii*) se demuestra como sigue. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(Y, \|\cdot\|_\infty)$: para cada $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $x_n = (y_i^n)_{i\in I}$, $y_i^n \in Y_i$. Al ser $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ existe n_ε de manera que si $m, n \geq n_\varepsilon$ se tiene que

$$\|x_m - x_n\|_\infty \leq \varepsilon;$$

por definición de $\|\cdot\|_\infty$ se tiene

$$\|x_m - x_n\|_\infty = \sup_{i\in I} \|y_i^m - y_i^n\|_i \leq \varepsilon$$

y por tanto tendremos que

$$\|y_i^m - y_i^n\|_i \leq \varepsilon \text{ para todo } i \in I, \tag{2.8}$$

y para $m, n \geq n_\varepsilon$. Por lo tanto cada sucesión $\{y_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(Y_i, \|\cdot\|_i)$ es de Cauchy. Como $(Y_i, \|\cdot\|_i)$ es espacio de Banach, cada $\{y_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a un punto $y_i \in Y_i$. Si $x = (y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} Y_i$, afirmamos que x es el límite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y. Efectivamente, si en la ecuación (2.8) fijamos $m \geq n_\varepsilon$ y tomamos límites cuando $n \to \infty$ deducimos que para cada $i \in I$ se tiene que

$$\|y_i^m - y_i\|_i \leq \varepsilon.$$

Tomando ahora supremos en $i \in I$ la desigualdad anterior se obtiene que para $m \geq n_\varepsilon$ tenemos $\|x_m - x\| \leq \varepsilon$. Para terminar observamos que $x_{n_\varepsilon} \in Y$ y $x_{n_\varepsilon} - x \in Y$ y como Y es un subespacio vectorial de $\prod_{i\in I} Y_i$ concluimos que $x \in Y$ y así termina la prueba de que Y es un espacio de Banach.

La demostración de (iv) es elemental. A partir de las definiciones involucradas tenemos que para cada $y \in Y_j$ se tiene

$$\|I_j(y)\|_\infty = \sup_{i\in I} \|I_j(y)\|_i = \|y\|_j,$$

puesto que todos las coordenadas de $I_j(y)$ son cero salvo la j-ésima que vale y. $\square$

Teorema 2.2.10 (Teorema de la Acotación Uniforme)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach e $(Y_i, \|\cdot\|_i)_{i\in I}$ una familia de espacios normados y para cada $i \in I$ sea $A_i : X \to Y_i$ lineal y continua. Si para cada $x \in X$ se tiene que*

$$\sup_{i\in I} \|A_i(x)\|_i < \infty,$$

entonces

$$\sup_{i\in I}\|A_i\|<\infty.$$

Demostración. Utilizando las inmersiones I_i construidas en la proposición anterior tenemos

$$(X,\|\cdot\|)\xrightarrow{A_i}(Y_i,\|\cdot\|_i)\xrightarrow{I_i}(Y,\|\cdot\|_\infty).$$

Al componer se tiene

$$(X,\|\cdot\|)\xrightarrow{I_i\circ A_i}(Y,\|\cdot\|_\infty).$$

Obsérvese que gracias a que I_i es una isometría, para cada $x\in X$ se tiene que

$$\|(I_i\circ A_i)(x)\|_\infty=\|I_i(A_i(x))\|_\infty=\|A_i(x)\|_i.$$

Así, la hipótesis $\sup_{i\in I}\|A_i(x)\|_i<\infty$, para cada $x\in X$, se lee ahora como

$$\sup_{i\in I}\|(I_i\circ A_i)(x)\|_\infty<\infty \text{ para cada } x\in X.$$

Aplicando el Teorema de la Acotación Uniforme 2.2.5 a la familia de aplicaciones lineales $(I_i\circ A_i)_{i\in I}$ concluimos que

$$\sup_{i\in I}\|I_i\circ A_i\|<\infty.$$

Esto último significa que

$$\sup_{i\in I}\|I_i\circ A_i\|=\sup_{i\in I}\sup_{x\in B_X}\|I_i(A_i(x))\|_\infty=\sup_{i\in I}\sup_{x\in B_X}\|A_i(x)\|_i=\sup_{i\in I}\|A_i\|$$

con lo que $\sup_{i\in I}\|A_i\|<\infty$ y la demostración ha terminado. □

2.3. Demostración del Teorema de la Acotación Uniforme por Sliding-Hump

Abordamos en esta sección el teorema de la acotación uniforme utilizando la técnica del *Sliding-Hump*. Esta técnica fue creado por Lebesgue y usado por Toeplitz para proporcionar condiciones suficientes que asegurasen la regularidad y consistencia en los métodos de sumabilidad de matrices. Toeplitz la usó para demostrar el principio de acotación uniforme al considerar los funcionales como matrices, aunque la técnica puede usarse en el caso general, como demostró Steinhaus. Con la técnica del *Sliding-Hump* somos capaces de llevar el teorema de la aplicación uniforme a la categoría de los espacios de Fréchet siguiendo la demostración dada en [3]: como veremos aquí el teorema de la acotación uniforme lo que establece es la coincidencia de las familias de equicontinuos y puntualmente acotados en un espacio de Fréchet.

Para esta sección los libros utilizados son [3] y [29].

Empezamos la sección reformulando el Teorema de la Acotación uniforme 2.2.5 que ya hemos demostrado para espacios normados en términos de subconjuntos puntualmente acotados y equicontinuos: si E y F son dos ***espacios localmente convexos*** denotaremos por $\mathscr{L}(E,F)$ el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de E en F.

Recordemos la noción de subconjunto equicontinuo.

Definición 2.3.1. *Dada una colección de aplicaciones lineales $\mathscr{H}$ entre dos espacios localmente convexos E e F, se dice equicontinua en $x \in E$ cuando, para todo entorno V de 0 en F existe un entorno U de x en E de manera que para todo $T \in \mathscr{H}$ se tiene que $T(U) \subset T(x)+V$.*

Es fácil comprobar que $\mathscr{H}$ es equicontinuo en 0 si, y sólo si, es equicontinuo en algún $x \in E$ si, y sólo si, es equicontinuo en cada $x \in E$.

Para espacios normados se tiene la siguiente equivalencia:

Proposición 2.3.2. *Sean $(E,\|\cdot\|)$ y $(F,\|\cdot\|)$ dos espacios normados. Para un subconjunto $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$, son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{H}$ es equicontinuo.*

(ii) $\sup\{\|T\| : T \in \mathscr{H}\} < \infty$

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Sea $V = B_F[0,1]$ la bola unidad cerrada de F. Al ser $\mathscr{H}$ equicontinuo existe $\varepsilon > 0$ de manera que $T(B_E[0,\varepsilon]) \subset B_F[0,1]$ para todo $T \in \mathscr{H}$. Esto significa que si $x \in E$ y $\|x\| \leq \varepsilon$ entonces $\|T(x)\| \leq 1$. En particular, si $\|x\| \leq 1$ entonces $\|\varepsilon x\| = \varepsilon\|x\| \leq \varepsilon$, luego $\|T(\varepsilon x)\| \leq 1$ y tenemos que $\varepsilon\|T(x)\| \leq 1$ por lo que $\|T(x)\| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ para todo $T \in \mathscr{H}$. Ahora se tiene que

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

para todo $T \in \mathscr{H}$ y así queda establecido que $(i) \Rightarrow (ii)$.

La demostración de $(ii) \Rightarrow (i)$ es como sigue. Si $\|T\| \leq M$ para todo $T \in \mathscr{H}$ entonces $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$ y para todo $T \in \mathscr{H}$. Fijando x_0, al ser cada T lineal se tiene

$$\|T(x) - T(x_0)\| = \|T(x - x_0)\| \leq M \cdot \|x - x_0\|.$$

Así para cada $x \in B_E[x_0, \varepsilon/M]$ se cumple

$$\|T(x) - T(x_0)\| \leq M \cdot \|x - x_0\| \leq M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon,$$

es decir, $T(B_E[x_0, \varepsilon/M]) \subset B_F[T(x_0), \varepsilon]$ para cada $T \in \mathscr{H}$. Esto último nos dice que $\mathscr{H}$ es equicontinuo y la prueba termina. □

La siguiente definición puede encontrarse en [29].

Definición 2.3.3. *Sean E y F espacios localmente convexos.*

(i) Un subconjunto $A \subset E$ se dice que es acotado si para cada entorno absolutamente convexo U de 0 en E, U absorbe a A, es decir, existe $r > 0$ tal que $A \subset rU$.

(ii) Un subconjunto $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$ se dice que es puntualmente acotado *si para cada $x \in E$ el conjunto $\mathscr{H}(x) := \{T(x) : T \in \mathscr{H}\}$ es acotado en F.*

Es fácil comprobar que A es acotado en E si, y sólo si, para cada seminorma continua p en E se tiene que el conjunto $p(A) := \{p(x) : x \in A\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. Por otro lado la noción de conjunto puntualmente acotado en $\mathscr{L}(E,F)$ corresponde precisamente a la noción de conjunto acotado para la topología de convergencia puntual en $\mathscr{L}(E,F)$ que es claramente una topología localmente convexa.

Después de las definiciones anteriores y la Proposición 2.3.2 el teorema de la acotación uniforme para espacios de Banach 2.2.5 puede ser reformulado en los siguientes términos:

Teorema 2.3.4. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ un subconjunto de aplicaciones lineales y continuas. Si $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado, entonces $\mathscr{H}$ es equicontinuo.*

El siguiente teorema es pues una generalización no trivial del teorema de la acotación uniforme para espacios de Banach.

Teorema 2.3.5 (Teorema de la Acotación Uniforme)**.** *Sea E un **espacio de Fréchet**, F un espacio localmente convexo y $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$. Si $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado, entonces $\mathscr{H}$ es equicontinuo.*

Demostración. Sea $\{q_n\}_n$ una sucesión en E de seminormas continuas crecientes, en el sentido de que para todo $x \in E$ se tiene

$$q_n(x) \leq q_{n+1}(x).$$

tal que si escribimos $\{x \in E : q_n(x) < 1\} =: U_n$, entonces $\{U_n\}_n$ es una base de entornos de 0. Al ser la sucesión $\{q_n\}_n$ creciente, se tiene que la sucesión de entornos $\{U_n\}_n$ es decreciente, es decir,

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$$

La demostración es por reducción al absurdo: suponemos que $\mathscr{H}$ no es equicontinuo. Esto significa que existe W entorno de 0 en F, tal que

$$\text{para todo } V \text{ entorno de cero en } E \text{ existe } g \in \mathscr{H} \text{ tal que } g(V) \not\subseteq W. \tag{2.9}$$

Como F es un espacio localmente convexo, su topología está asociada a la familia de seminormas continuas en F, por el ***teorema de caracterización de espacios localmente convexos***, y podemos pues suponer que para cierta seminorma continua p en F, el entorno $W = \{y \in F : p(y) \leq 1\}$. Definimos en E el conjunto $U = \{x \in E : p(f(x)) \leq 1, f \in \mathscr{H}\}$. Como por definición $f(U) \subset W$ para todo $f \in \mathscr{H}$, U no puede ser entorno de cero en E después de (2.9): así ningún múltiplo positivo de U_n puede ser subconjunto de U. Aplicando todo esto a $\frac{1}{2}U_1$ podemos concluir que

$$\text{existe } x_1 \in E \text{ tal que } q_1(x_1) < \frac{1}{2} \text{ y existe } f_1 \in \mathscr{H} \text{ con } p(f_1(x_1)) > 1.$$

Llamamos $n_1 = 1$ y $M_1 = \sup\{p(f(x_1)) : f \in \mathscr{H}\}$ (observar que $M_1 < +\infty$ porque $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado). Al ser f_1 continua, para el entorno de cero W en F, existe $n_2 > n_1$ tal que se cumple $f_1(U_{n_2}) \subset W$. De aquí se sigue que $p(f_1(x)) \leq q_{n_2}(x)$ para todo x en E. Efectivamente, si $x \in E$ tenemos que

$$\frac{x}{q_{n_2}(x) + \varepsilon} \in U_{n_2} \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

De ahí se sigue que

$$p\left(f_1\left(\frac{x}{q_{n_2}(x)+\varepsilon}\right)\right)=\frac{p(f_1(x))}{q_{n_2}(x)+\varepsilon}\leq 1$$

y por tanto

$$p(f_1(x))\leq q_{n_2}(x)+\varepsilon \text{ para todo x en } E.$$

Tomando límites cuando $\varepsilon\to 0$ concluimos que

$$p(f_1(x))\leq q_{n_2}(x) \text{ para todo } x \text{ en } E$$

Notemos que de hecho para cada $\rho>0$ el conjunto

$$U^{\rho}=\{x\in E : p(f(x))\leq\varepsilon \text{ para todo } f\in\mathscr{H}\},$$

ya que $U=\frac{1}{\rho}U^{\rho}$ y U no es entorno de cero.

Si repetimos los argumentos de antes con $\frac{1}{2^2}U_2$ y con U^{2+M_1+1} podemos asegurar que

$$\text{existe } x_2\in E \text{ tal que } q_2(x_2)<\frac{1}{2^2} \text{ y existe } f_2\in\mathscr{H} \text{ con } p(f_2(x_2))>2+M_1+1.$$

Procediendo por recurrencia encontramos tres sucesiones $\{n_k\}_k\subset\mathbb{N}$ (esta estrictamente creciente), $\{f_k\}_k\subset\mathscr{H}$ y $\{x_k\}_k\subset E$ cumpliendo:

(α) $q_{n_k}(x_k)<\frac{1}{2^k}$.
(β) $p(f_k(x_k))\geq 1+k+\sum_{j=1}^{k-1}M_j$ siendo $M_0=0$ y $M_k=\sup\{p(f(x_k)) : f\in\mathscr{H}\}$.
(γ) $p(f_k(x))\leq q_{n_{k+1}}(x)$ para todo $x\in E$.

Dado un entero positivo m existe un entero positivo s cumpliendo que $n_s>m$. Notar que si tomamos $r>s$ tenemos que $n_r>n_s>m$, luego cumple que $q_{n_r}\geq q_{n_s}\geq q_m$ y así si $t>0$ es otro entero positivo arbitrario podemos concluir que:

$$q_m\left(\sum_{k=r}^{r+t}x_k\right)\leq\sum_{k=r}^{r+t}q_{n_k}(x_k)\overset{(\alpha)}{\leq}\sum_{k=r}^{r+t}\frac{1}{2^k}\leq\sum_{k=r}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2^r}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^{r-1}}$$

Por lo tanto la serie en E, $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$, cumple el criterio de Cauchy para toda seminorma q_m y es como el espacio E es de Frechet la serie es convergente a un elemento x de E, es decir, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in E$. Fijando un entero positivo j tenemos:

$$
\begin{aligned}
p(f_j(x)) = & \\
=& p\left(f_j\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)\right) = p\left(f_j\left(\sum_{k=1}^{j-1} x_k + x_j + \sum_{k=j+1}^{\infty} x_k\right)\right) \\
=& p\left(\sum_{k=1}^{j-1} f_j(x_k) + f_j(x_j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} f_j(x_k)\right) \\
\geq & p(f_j(x_j)) - p\left(\sum_{k=1}^{j-1} f_j(x_k)\right) - p\left(\sum_{k=j+1}^{\infty} f_j(x_k)\right) \\
\geq & p(f_j(x_j)) - \sum_{k=1}^{j-1} p(f_j(x_k)) - \sum_{k=j+1}^{\infty} p(f_j(x_k)) \\
\overset{(\beta)}{\geq} & 1 + j + \sum_{k=1}^{j-1} M_k - \sum_{k=1}^{j-1} p(f_j(x_k)) - \sum_{k=j+1}^{\infty} p(f_j(x_k)) \\
=& 1 + j + \sum_{k=1}^{j-1} [M_k - p(f_j(x_k))] - \sum_{k=j+1}^{\infty} f_j p((x_k)) \\
\geq & 1 + j - \sum_{k=j+1}^{\infty} p(f_j(x_k)) \overset{(\gamma)}{\geq} 1 + j - \sum_{k=j+1}^{\infty} q_{n_{j+1}}(x_k) \\
\geq & 1 + j - \sum_{k=j+1}^{\infty} q_{n_k}(x_k) \overset{(\alpha)}{\geq} 1 + j - \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + j - \frac{1}{2^j} > j.
\end{aligned}
$$

Por lo que $p(f_j(x)) > j \to \infty$ cuando $j \to \infty$ lo que contradice la hipótesis de que $\mathscr{H}$ está puntualmente acotado y termina la prueba. $\square$

El siguiente lema lo utilizaremos en el último resultado de la sección.

Lema 2.3.6. *Sean E, F dos espacios localmente convexos y $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$. Si $\mathscr{H}$ es equicontinuo entonces $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado.*

Demostración. Sea V absolutamente convexo entorno de 0 en F y fijemos $x \in E$. Por equicontinuidad existe U entorno de 0 en E tal que $T(U) \subset V$ para cada $T \in \mathscr{H}$. Como $\lim_{r\to 0} rx = 0$, existe $r > 0$ tal que $rx \in U$. Así, $T(rx) \in V$ para cada $T \in \mathscr{H}$ y por tanto

$$\mathscr{H}(x) = \{T(x) : T \in \mathscr{H}\} \subset \frac{1}{r}V,$$

lo que termina la prueba. □

Combinando los dos resultados anteriores tenemos:

Corolario 2.3.7. *Sea E un espacio de Fréchet, F un espacio localmente convexo y $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado.

(ii) $\mathscr{H}$ es equicontinuo.

Demostración. Es consecuencia inmediata del lema anterior y del Teorema 2.3.5. □

2.4. El Teorema de la Acotación Uniforme para espacios tonelados

En esta sección extendemos los resultados de secciones anteriores a espacios localmente convexos más generales. Para ello introducimos de forma natural la clase de espacios tonelados, que a la postre es la clase de espacios de espacios localmente convexos para la que es cierto el teorema de la Acotación Uniforme.

Para esta sección hemos usado como referencias los libros [13], [5], [4], [26] y [29]

Con el ánimo de hacer mas intuitiva la definición de espacio tonelado empezamos por analizar la relación entre conjuntos equicontinuos y entornos del origen así como la relación entre conjuntos puntualmente acotados y toneles.

Definición 2.4.1. *Sea E un espacio localmente convexo. Un subconjunto D de E se dice que es un* tonel *si es cerrado, absolutamente convexo y absorbente (recordemos, D es absorbente si para cada $x \in E$ existe $\rho_x > 0$ tal que $x \in \rho_x D$).*

Todo entorno del origen absolutamente convexo y cerrado en E es un tonel, pero como veremos mas adelante el recíproco no es verdad.

Empezamos por demostrar el siguiente resultado.

Proposición 2.4.2. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado.

(ii) *Para todo entorno del origen V absolutamente convexo y cerrado en F, el conjunto $W = \bigcap_{T\in\mathscr{H}} T^{-1}(V)$ es un tonel en E.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Fijamos V un entorno de 0 en F como en (ii) y demostramos a continuación las tres propiedades necesarias para W ser un tonel:

(a) Como cada $T \in \mathscr{H}$ es continua, $T^{-1}(V)$ es cerrado en E y por tanto W es cerrado en E por ser intersección de cerrados.

(b) Como cada $T \in \mathscr{H}$ es lineal, $T^{-1}(V)$ es absolutamente convexo: efectivamente sean $a, b \in T^{-1}(V)$, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ de manera que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. Aplicamos entonces

$$T(\alpha a + \beta b) = \alpha T(a) + \beta T(b) \in \alpha V + \beta V \subset V$$

por ser V absolutamente convexo. Luego cada $T^{-1}(V)$ es absolutamente convexo, y por tanto W es absolutamente convexo.

(c) Falta ver que es absorbente. Fijemos $x \in E$. Al ser $\mathscr{H}$ puntualmente acotado, existe $\rho_x > 0$ de manera que $\mathscr{H}(x) = \{T(x) : T \in \mathscr{H}\} \subset \rho_x V$. Esto último implica que para cada $T \in \mathscr{H}$ tenemos $x \in \rho_x T^{-1}(V)$ y por tanto $x \in \rho_x W$, lo que prueba que W es absorbente.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Para razonar esta implicación se vuelven atrás los pasos del razonamiento que hemos hecho en (c) en la implicación anterior. Efectivamente, dado un entorno del origen V absolutamente convexo y cerrado en F, existe $\rho_x > 0$ tal que $x \in \rho_x W$. Esto significa que para cada $T \in \mathscr{H}$ tenemos $x \in \rho_x T^{-1}(V)$, o lo que es lo mismo que
$\mathscr{H}(x) = \{T(x) : T \in \mathscr{H}\} \subset \rho_x V$. Así, $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado. □

La siguiente proposición es elemental (y de forma implícita ya la hemos utilizado en algún razonamiento antes) pero clarificadora junto con la Proposición 2.4.2 de cara a dar la definición de espacio tonelado.

Proposición 2.4.3. *Sean E y F dos espacios localmente convexos y $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$\mathscr{H}$ es equicontinuo.*

(ii) *Para todo entorno del origen V en F, el conjunto $\bigcap_{T\in\mathscr{H}} T^{-1}(V)$ es un entorno del origen en E.*

(iii) *Para todo entorno del origen V en F, existe un entorno del origen U en E de manera que $\bigcup_{T\in\mathscr{H}} T(U) \subset V$.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que $\mathscr{H}$ es equicontinuo. Sea V un entorno del origen en F, existe un entorno del origen U en E de manera que $T(U) \subset V$ para todo $T \in \mathscr{H}$; lo que equivale a decir que $U \subset T^{-1}(V)$ para todo $T \in \mathscr{H}$ por lo que $U \subset \bigcap_{T\in\mathscr{H}} T^{-1}(V)$ y así $\bigcap_{T\in\mathscr{H}} T^{-1}(V)$ es un entorno del origen en E.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea V un entorno del origen en F. Por (ii) $U = \bigcap_{T\in\mathscr{H}} T^{-1}(V)$ es un entorno del origen en E, y por definición de U, $T(U) \subset V$ para todo $T \in \mathscr{H}$, por lo que $\bigcup_{t\in\mathscr{H}} T(U) \subset V$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea V un entorno del origen en F. Por (iii) existe un entorno del origen U en E de manera que $\bigcup_{t\in\mathscr{H}} T(U) \subset V$. Así para cada $T \in \mathscr{H}$ se tiene que $T(U) \subset \bigcup_{T\in\mathscr{H}} T(U) \subset V$, por lo que la familia $\mathscr{H}$ es equicontinuo. □

A la vista de las dos proposiciones anteriores es fácil dar ahora un ejemplo de un espacio localmente convexo donde hay un tonel que no es entorno del origen.

Ejemplo 2.4.4. *Sea* $(c_{00}, ||\cdot||_\infty)$ *y la familia de aplicaciones* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *definidas como*

$$f_n(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Entonces

$$W = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}([-1,1])$$

es un tonel que no es entorno del origen.

Demostración. En el Ejemplo 2.2.6 se razonó que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas en $(c_{00}, ||\cdot||_\infty)$ que es puntualmente acotada y no es uniformemente acotada. Si utilizamos la Proposición 2.4.2 obtenemos que W es un tonel, pero utilizando las Proposiciones 2.3.2 y 2.4.3 se concluye que W no puede ser entorno del origen. □

La definición que sigue aparece ahora de forma natural.

Definición 2.4.5. *Un espacio localmente convexo E se dice tonelado si todo tonel en E es un entorno del origen.*

El ejemplo 2.4.4 nos dice que c_{00} con su norma del supremo es un espacio normado no tonelado. Es claro también a la vista de las Proposiciones 2.4.2 y 2.4.3 que la noción de espacio tonelado está introducida *ad hoc* para que se cumpla el Teorema de la Acotación Uniforme tal y como recogemos en el siguiente resultado.

Teorema 2.4.6 (Teorema de la Acotación Uniforme para Espacios Tonelados)**.** *Sea E un espacio localmente convexo tonelado y F un espacio localmente convexo $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$. Si $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado entonces $\mathscr{H}$ es equicontinuo.*

Demostración. Sea V un entorno del origen absolutamente convexo y cerrado en F y escribamos

$$W := \bigcap_{T \in \mathscr{H}} T^{-1}(V).$$

Dado que $\mathscr{H}$ es puntualmente acotado la Proposición 2.4.2 nos asegura que W es un tonel en E. Al ser un espacio tonelado, W es un entorno de 0 en E, y ahora la Proposición 2.4.3 nos dice que es $\mathscr{H}$ es equicontinuo. □

La versión que acabamos de demostrar del Teorema de la Acotación Uniforme contiene como casos particulares los casos que ya hemos demostrado para espacios de Hilbert, Banach y de Fréchet. Eso es consecuencia del siguiente resultado.

Teorema 2.4.7. *Todo espacio localmente convexo de Baire es tonelado.*

Demostración. Sea D un tonel en E espacio de Baire. Al ser D absorbente, se tiene que

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nD$$

Al ser espacio de Baire, E es de segunda categoría y por lo tanto dado que D es cerrado existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\operatorname{int}(n_0 D)$ es no vacío. Fijemos $\omega \in \operatorname{int}(n_0 D)$; entonces existe un entorno abierto de ω, U, de manera que

$$\omega \in U \subset D.$$

Sea $y = \frac{\omega}{n_0}$, entonces se tiene que

$$y \in V := \frac{1}{n_0} U \subset D.$$

Así V es abierto y como D es absolutamente convexo se tiene que

$$0 \in \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}V \subset D.$$

El conjunto $\frac{1}{2}V - \frac{1}{2}V$ es un abierto (por ser suma de abiertos) que contiene a 0 y por tanto D es un entorno del origen y la demostración queda terminada. □

Corolario 2.4.8. *Los espacios de Banach y los espacios de Fréchet son tonelados.*

Demostración. Por el teorema de Baire 2.2.3, todo espacio de Banach y de Frechet son espacios de Baire, y por el resultado anterior, tonelados. □

Vamos a continuación a demostrar que la clase de los espacios tonelados se caracterizan porque en ellos se satisface el Teorema de la Acotación Uniforme.

Definición 2.4.9. *Sea E un espacio localmente convexo y sea E' su dual topológico. Si U (resp. V) es un subconjunto de E (resp. de E'), se define la polar (absoluta) de U (resp. V) como*

$$U^\circ = \{x' \in E' : |x'(x)| \leq 1 \textit{ para todo } x \in U\}$$

$$\textit{(resp. } V^\circ = \{x \in E : |x'(x)| \leq 1 \textit{ para todo } x' \in V\}\textit{).}$$

El siguiente lema bien conocido será utilizado en la prueba del Teorema 2.4.12.

Lema 2.4.10. *Sea E un espacio localmente convexo, y sea U un subconjunto de E absolutamente convexo y cerrado. U es entorno del origen si y sólo si U° es equicontinuo.*

Demostración. Supongamos que U es un entorno del origen. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in \varepsilon U$. Se tiene que $x = \varepsilon x_U$ para cierto $x_U \in U$ y así

$$|x'(x)| = |x'(\varepsilon x_U)| = \varepsilon |x'(x_U)| \leq \varepsilon$$

Lo que nos quiere decir es que si V es entorno de 0 en $\mathbb{K}$ existe un $\varepsilon > 0$ de manera que $B(0,\varepsilon) \subset V$ y por lo anterior, como εU es entorno del origen en E, tenemos que $x'(\varepsilon U) \subset B(0,\varepsilon)$ y por definición, U° es equicontinua.

Para probar el recíproco, usaremos ***teorema del bipolar*** y la ***coincidencia de clausuras para topologías compatibles***. Supongamos que U° es equicontinuo, con U un subconjunto absolutamente convexo y $\tau-$cerrado. Si consideramos la topología débil $\sigma(E,E')$ en E y la ***coincidencia de clausuras para topologías compatibles*** sabemos que un conjunto es cerrado en la topología original de E si, y sólo si, es $\sigma(E,E')-$cerrado. Por el ***teorema del bipolar*** sabemos que

$$U^{\circ\circ} = \left(U^\circ\right)^\circ = \overline{\mathrm{aco}(U)}^{\sigma(E,E')} = \overline{U}^{\sigma(E,E')} = \overline{U} = U,$$

donde $\mathrm{aco}(U)$ es la envoltura absolutamente convexa de U. Ahora bien, si U° es equicontinuo entonces $U^{\circ\circ}$ es un entorno del origen: efectivamente, como U° es equicontinuo existe un entorno del origen $V \subset E$ de manera que $|x'(x)| \leq 1$ para cada $x \in V$ y para todo $x' \in U^\circ$. Por definición de polar, se tiene que $V \subset U^{\circ\circ}$ y así $U^{\circ\circ}$ es entorno del origen. Por lo tanto, $U = U^{\circ\circ}$ es entorno del origen y termina la demostración de la proposición. □

Para toneles tenemos la siguiente caracterización.

Lema 2.4.11. *Sea E un espacio localmente convexo, $U \subset E$ un subconjunto de E absolutamente convexo y cerrado. U es un tonel si y sólo si U° está puntualmente acotado.*

Demostración. Supongamos que U es un tonel, es decir, U es absorbente. Si $x \in E$ existe $\rho_x > 0$ de forma que $x \in \rho_x U$; si tomamos ahora $x' \in U^\circ$ se tiene que

$$|x'(x)| = |x'(\rho_x x_U)| = \rho_x |x'(x_U)| \leq \rho_x \text{ para todo } x' \in U^\circ,$$

y por tanto U° está puntualmente acotado.

Recíprocamente, supongamos que U° está puntualmente acotado. Como U es absolutamente convexo y cerrado, para demostrar que es un tonel sólo falta demostrar que es absorbente. Si $x \in E$, existe $M_x > 0$ de manera que $|x'(x)| \leq M_x$ para todo $x' \in U^\circ$. Por lo tanto, $\frac{x}{M_x}$ cumple que $|x'(\frac{x}{M_x})| \leq 1$ y así $\frac{x}{M_x} \in U^{\circ\circ}$. El Teorema del bipolar nos dice ahora que $U^{\circ\circ} = U$ y concluimos que $\frac{x}{M_x} \in U$. Esto significa que $x \in M_x U$ y así U es absorbente. □

Llegamos por fin a la caracterización de los espacios tonelados como aquellos en los que se verifica el Teorema de la Acotación Uniforme.

Teorema 2.4.12. *Para un espacio localmente convexo E las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) E es tonelado.

(ii) El Teorema de la Acotación uniforme es válido para cualquier familia de aplicaciones de E en otro espacio localmente convexo, i.e., *para todo espacio localmente convexo F todo subconjunto $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,F)$ puntualmente acotado es equicontinuo.*

(iii) El Teorema de la Acotación uniforme es válido para cualquier familia de aplicaciones de E en el cuerpo $\mathbb{K}$, i.e., *todo subconjunto $\mathscr{H} \subset \mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E'$ puntualmente acotado es equicontinuo.*

Demostración. La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ es el Teorema 2.4.6. Como claramente $(ii) \Rightarrow (iii)$ lo único que nos queda demostrar es que $(iii) \Rightarrow (i)$. Sea $D \subset E$ un tonel, por lema 2.4.11, sabemos que D° está puntualmente acotado, luego D° es equicontinua por hipótesis, y por el lema 2.4.10, D es un entorno del origen, por lo tanto el espacio E es tonelado. □

A continuación damos otro ejemplo de espacio normado no tonelado un poco mas sofisticado que el exhibido en el Ejemplo 2.4.4: lo que hacemos, en la práctica, es utilizar en nuestra construcción las proposiciones 2.4.2 y 2.4.3.

Ejemplo 2.4.13. *Sea $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ que son continuas y existe un entorno de 0, que depende de f, de manera que f se anula en dicho entorno. Si E se dota con la norma del supremo $\|\cdot\|_\infty$, entonces el conjunto*

$$D = \left\{ f \in E : \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un tonel que no es un entorno de 0. *Consecuentemente $(E, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado que no es tonelado.*

Demostración. Vemos en primer lugar que D es un tonel:

- *D es absolutamente convexo.* Sean $f, g \in D$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ de manera que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned} \left|(\alpha f + \beta g)\left(\frac{1}{n}\right)\right| &= \left|\alpha f\left(\frac{1}{n}\right) + \beta g\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq |\alpha| \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| + |\beta| \left|g\left(\frac{1}{n}\right)\right| \\ &\leq |\alpha| \frac{1}{n} + |\beta| \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Por tanto $\alpha f + \beta g \in D$ y así D es absolutamente convexo.

-*D es cerrado.* Sea $\{f_m\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de D que convergen a $f \in E$. En particular para todo $x \in [0,1]$ se tiene que $f_m(x)$ converge a $f(x)$. Si $\varepsilon > 0$ existe un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de manera que $|f(\frac{1}{n}) - f_{m_\varepsilon}(\frac{1}{n})| \leq \varepsilon$ por lo tanto

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f_{m_\varepsilon}\left(\frac{1}{n}\right) + f_{m_\varepsilon}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{1}{n}\right) - f_{m_\varepsilon}\left(\frac{1}{n}\right)\right| + \left|f_{m_\varepsilon}\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}.$$

Como ε se puede tomar tan pequeño como se quiera, nos queda que $|f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n}$, por tanto $f \in D$ y así D es cerrado.

-*D es absorbente.* Sea $f \in E$ y fijemos ε tal que $f(x) = 0$ si $x < \varepsilon$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Por otra parte como f está acotada en $[0,1]$, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [0,1]$. En estas condiciones, si definimos $\lambda = \frac{1}{N \cdot M} > 0$ afirmamos que $\lambda f \in D$. Efectivamente, se tiene dos casos:

(a) Si $n > N$ entonces $|\lambda f(\frac{1}{n})| = |\lambda \cdot 0| = 0 < \frac{1}{n}$.

(b) Para $n = 1, 2, \ldots N$ tenemos que

$$\left|\lambda f\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \lambda \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \lambda \cdot M = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{n}.$$

Por lo que $\lambda f \in D$ y así D es absorbente.

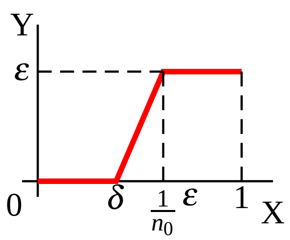
A continuación vemos que D no es un entorno de 0. Probaremos que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una función $f_\varepsilon \in B_E(0,\varepsilon)$ tal que $f_\varepsilon \notin D$. Efectivamente, sea $0 < \delta < \varepsilon$ fijo y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\delta < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Definamos la función

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 0 & si\; 0 \leq x < \delta \\ \frac{\varepsilon(x-\delta)}{\frac{1}{n_0}-\delta} & si\; x \leq \delta < \frac{1}{n_0} \\ \varepsilon & si\; \frac{1}{n_0} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Gráficamente:



De esta manera tenemos una función f_ε contenida en $B_E(0,\varepsilon)$ porque $||f_\varepsilon|| = \varepsilon$ pero, para n_0 se tiene que $f_\varepsilon(\frac{1}{n_0}) = \varepsilon > \frac{1}{n_0}$ y por tanto no pertenece a D. Hemos establecido por tanto que el espacio $(E, ||\cdot||_\infty)$ es un espacio normado que no es tonelado.

Vamos a continuación a reinterpretar lo demostrado hasta ahora para ver directamente que en $(E, ||\cdot||_\infty)$ no se cumple el Teorema de la Acotación Uniforme, es decir, proporcionaremos un subconjunto de E' que es puntualmente acotado pero que no es equicontinuo (uniformemente acotado).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\{A_n : E \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal dada por

$$A_n(f) := n \cdot f(\frac{1}{n}),$$

para $f \in E$. Es claro que cada A_n es $\|\cdot\|_\infty$-continua y por tanto $A_n \in E'$.

Comprobamos ahora que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está puntualmente acotada. Si $f \in E$ existen M_f y ε_f de manera que cumplen

(a) $|f(x)| \leq M_f$ para todo $x \in [0,1]$.
(b) Si $x < \varepsilon_f$ se tiene que $f(x) = 0$.

Fijemos $n_f \in \mathbb{N}$ de forma que si $n > n_f$ se tiene que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Tenemos dos casos:

(i) Si $n > n_f$, entonces $n \cdot f(\frac{1}{n}) = n \cdot 0 = 0$
(ii) Si $n \leq n_f$, entonces $|n \cdot f(\frac{1}{n})| = n \cdot |f(\frac{1}{n})| \leq n \cdot M_f \leq n_f \cdot M_f$

En definitiva, la sucesión

$$\{A_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{A_1(f), A_2(f), \ldots, A_{n_f}(f), 0, 0, \ldots\}$$

está acotada por $n_f \cdot M_f$.

Obsérvese, por otro lado, que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$A_n^{-1}([-1,1]) = \{f \in E : |f(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n}\}$$

y por tanto $D = \bigcap_{n\in I} A_n^{-1}([-1,1])$. Ya hemos probado que D es un tonel que no es entorno de 0. La Proposición 2.4.3 nos dice que la familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es equicontinua, es decir, no es uniformemente acotada. Notamos para terminar que esta última afirmación puede demostrarse directamente sin apelar a la Proposición 2.4.3. Ciertamente, se tiene:

$$||A_n|| = n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por un lado, si $f \in E$ de manera que $||f||_\infty \leq 1$ entonces se tiene que

$$|A_n(f)| = |nf(\frac{1}{n})| \leq n \cdot ||f||_\infty \leq n \cdot 1 = n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que

$$\|A_n\| = \sup\{|A_n(f)| : ||f||_\infty \leq 1\} \leq n.$$

Para demostrar la desigualdad contraria, sea $n \in \mathbb{N}$ y fijemos $0 < \delta < \frac{1}{n}$ y definamos:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < \delta \\ \frac{x-\delta}{\frac{1}{n}-\delta} & si\ \delta \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & si\ \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que $\|f\|_\infty = 1$ y que

$$A_{n_f}(f) = n \cdot f(\frac{1}{n}) = n,$$

Quedando así establecido que $\|A_n\| = n$ como queríamos demostrar. □

Terminamos la sección y el capítulo demostrando el Teorema de Ascoli, y alguna consecuencia, para subconjuntos equicontinuos de espacios localmente convexos: el Teorema de Ascoli en espacios de funciones es una potente herramienta en Análisis Matemático que se utiliza por ejemplo en el estudio de la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y en el estudio de las familias normales de funciones holomorfas (Teorema de Montel).

Definición 2.4.14. *Sea F un espacio localmente convexo, T un conjunto y sea $\mathfrak{S}$ una familia de subconjuntos de T dirigida por la inclusión $\subset$. Consideramos el espacio vectorial de aplicaciones de T en F, F^T y sea $\mathfrak{B}$ una base de entornos del origen en F. Definimos, cuando $S \in \mathfrak{S}$ y $V \in \mathfrak{B}$ la familia*

$$M(S,V) = \{f \in F^T : f(S) \subset V\}$$

Esta familia es un base de entornos del origen de F^T para una única topología, llamada la topología de convergencia uniforme en $\mathfrak{S}$ o también $\mathfrak{S}$-topología. En particular, si E,F son espacios localmente convexos y tomamos $T := E$ en las definiciones de antes, podemos definir en $\mathscr{L}(E,F)$ las siguientes $\mathfrak{S}$-topologías:

(i) Cuando $\mathfrak{S}$ es la familia de subconjuntos finitos de E, la $\mathfrak{S}$-topología en $\mathscr{L}(E,F)$ denotada por $\tau_p(E)$ se denomina de convergencia simple o puntual. Notamos que los subconjuntos τ_p-acotados de $\mathscr{L}(E,F)$ son los conjuntos puntualmente acotados en el sentido que hemos utilizado en las distintas versiones del Teorema de la Acotación Uniforme.

(ii) Cuando $\mathfrak{S}$ es la familia de subconjuntos precompactos de E, la $\mathfrak{S}$-topología en $\mathscr{L}(E,F)$ denotada por $\tau_{pc}(E)$ se denomina de convergencia precompacta.

Teorema 2.4.15 (Teorema de Ascoli)**.** *Sean E y F dos espacios localmente convexos y sea H un subconjunto equicontinuo de $\mathscr{L}(E,F)$. Las restricciones a H de las siguientes topologías son idénticas:*

(i) La topología de convergencia simple en un subconjunto total de E.

(ii) La topología de convergencia simple en E.

(iii) La topología de convergencia precompacta.

Demostración. Sea A un subconjunto total de E y denotemos por $\tau_p(A)$ la topología en $\mathscr{L}(E,F)$ de convergencia puntual sobre A.

Como la topología de convergencia precompacta $\tau_{pc}(E)$ está generada por los subconjuntos precompactos de E, y como todo conjunto finito es compacto, en particular es precompacto, se concluye que topología de convergencia precompacta $\tau_{pc}(E)$ es más fina que la topología de convergencia simple $\tau_p(E)$. Como los subconjuntos finitos de A son subconjuntos finitos de E se tiene que $\tau_p(E)$ es más fina que $\tau_p(A)$.

Para terminar la prueba vamos a establecer que la restricción de la topología $\tau_p(A)$ a H en más fina que la topología $\tau_{pc}(E)$ inducida en H. Demostraremos que para cada $u_0 \in H$, cada V entorno del origen absolutamente convexo en F y cada $S(\neq \emptyset)$ un subconjunto precompacto de E, existe un subconjunto finito S_0 de A y un entorno V_0 del origen en F de manera que

$$[u_0 + M(S_o, V_0)] \cap H \subset u_0 + M(S, V).$$

Sea W un entorno del origen absolutamente convexo en F tal que $W+W+W+W \subset V$ y sea U entorno del origen absolutamente convexo en E de forma que $T(U) \subset V$ para todo $T \in H$ (aquí utilizamos que H es equicontinuo). Al ser S precompacto existen elementos $y_i \in S$,$i = 1,2,\ldots m$ de manera que $S \subset \bigcup_{i=1}^m (y_i + U)$. Como A es total tenemos que $\overline{\text{span } (A)} = E$, para cada y_i existen $x_{ij} \in A$ y escalares λ_{ij} con $i = 1,2\ldots n; j = 1,2\ldots m$ de forma que $y_i \in \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}x_{ij} + U$. Consecuentemente

$$S \subset \bigcup_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij}x_{ij} + U + U \right).$$

Elegimos un entorno del origen absolutamente convexo V_0 en F de manera que $\sum_{i,j}(\lambda_{ij}V_0) \subset W$ y fijamos el conjunto finito $S_0 = \{x_{ij} : i = 1,\ldots m, j = 1,\ldots n\}$. Si $v \in M(S_0, V_0)$ tenemos que $v(x_{ij}) \in V_0$ y además

$$v(S) \subset \bigcup_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{ij} V_0) + v(U) + v(U) \subset W + v(U) + v(U).$$

Sea $u_0 \in H$ y sean $w \in H \cap [u_0 + M(S_0, V_0)]$. Tendremos que $w = u_0 + v$ para cierto $v \in M(S_0, V_0)$. Como $v = w - u_0$ se tiene que $v(U) \subset w(U) + u_0(U) \subset W + W$ al ser U equilibrado. Por lo tanto $v(S) \subset V$ y en particular $w = u_0 + v \in u_0 \cap M(S, V)$. □

Cuando $F = \mathbb{K}$ y consideramos el dual $\mathscr{L}(E, F) = E'$ de el espacio localmente convexo E, la topología de convergencia puntual en E' se llama topología débil* y se denota por $\sigma(E', E)$.

El siguiente resultado es bien conocido en Análisis Funcional.

Teorema 2.4.16 (Alaoglu-Bourbaki)**.** *Sea E un espacio localmente convexo. Todo equicontinuo H de E' es $\sigma(E', E)$- relativamente compacto.*

Demostración. Sea $H \subset E'$ un subconjunto equicontinuo. Consideremos el espacio localmente convexo $E'[\sigma(E', E)]$ como subespacio de $(\mathbb{K}^E, t_p(E))$. Para ver que H es $\sigma(E', E)$-relativamente compacto es suficiente, después del ***teorema de Tychonoff***, probar que se tiene $\overline{H}^{\sigma(E',E)} = \overline{H}^{t_p(E)} \subset E'$ y que H es puntualmente acotado. Ahora bien, $\overline{H}^{t_p(E)}$ está formado por aplicaciones lineales y continuas, porque sus elementos son límites puntuales de redes equicontinuas de aplicaciones lineales. Por otro lado H es puntualmente acotado: se puede hacer un sencillo razonamiento directo o utilizar las Proposiciones 2.4.2 y 2.4.3. □

Como consecuencia inmediata de lo anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.4.17. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. La bola dual B_{X^*} es $\sigma(X^*, X)$-compacta en X^*.*

Una combinación de los resultados anteriores nos permite concluir:

Corolario 2.4.18. *Sea Sean E un espacio localmente convexo y sea H un subconjunto equicontinuo de E'. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) H es relativamente compacto para la topología de convergencia uniforme sobre precompactos de E.

(ii) Si E es separable, la topología $\sigma(E',E)$ inducida en H es metrizable.

Demostración. La afirmación en (i) es consecuencia del Teorema de Ascoli 2.4.15 y del Teorema de Alaoglu-Bourbaki 2.4.16. La afirmación en (ii) es consecuencia también del Teorema de Ascoli utilizando ahora que si $A \subset E$ es un conjunto numberable y denso entonces la topología metrizable $\tau_p(A)$ coincide con $\sigma(E',E)$ al restringirla a H. □

En particular para espacios tonelados se tiene el siguiente resultado.

Corolario 2.4.19. *Sea Sean E un espacio localmente convexo tonelado y sea H un subconjunto puntualmente acotado (*i.e. *$\sigma(E',E)$-acotado) de E'. Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) H es relativamente compacto para la topología de convergencia uniforme sobre precompactos de E.

(ii) Si E es separable, la topología $\sigma(E',E)$ inducida en H es metrizable.

Capítulo 3

Aplicaciones del Teorema de la Acotación Uniforme

«CONTENIDOS»

- Teorema de la Base débil.
- Aplicaciones bilineales separadamente y conjuntamente continuas.
- Funciones holomorfas vectoriales (Teorema de Dunford).
- Métodos de sumabilidad permanentes (Teorema de Toeplitz)
- Convergencia puntual de series de Fourier de funciones continuas.
- Convergencia de sucesiones de operadores polinómicos trigonométricos definidos en espacios de funciones continuas.
- Espacios tonelados y el Teorema de la Gráfica cerrada.

ESTE capítulo está dedicado al estudio de las aplicaciones del Teorema de la Acotación que se han detallado en el listado de contenidos un poco más arriba. Como se observará al leer el capítulo las aplicaciones que hemos estudiado son de lo más variadas: esto pone de manifiesto el gran alcance del Teorema. Quizás, vale la pena comentar que según circula en *el boca a boca* que Banach-Steinhaus demostraron el Teorema de la Acotación uniforme para demostrar la existencia de funciones continuas 2π-periódicas cuya serie de Fourier no converge en todos los puntos. Destacamos también que en el estudio que hacemos de la relación entre espacios tonelados y el Teorema de la Gráfica Cerrada hemos generalizado técnicas de [24] que nos han permitido dar un punto de vista original cuando estudiamos espacios metrizables tonelados.

Nuestras referencias básicas para el capítulo han sido [13], [24], [29], [27], [4] y [40].

3.1. El Teorema de la base débil en espacios tonelados

Empezamos por generalizar el Corolario 2.2.8 para espacios localmente convexos arbitrarios.

Teorema 3.1.1 (Banach-Mackey)**.** *Sea E un espacio localmente convexo. Para un conjunto $A \subset X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) A es débil acotado, i. e., *$x'(A)$ es acotado en $\mathbb{K}$ para cada $x' \in E'$.*

(ii) A es acotado en E.

Demostración. Es fácil comprobar que las aplicaciones lineales continuas llevan conjuntos acotados en conjuntos acotados y por tanto $(ii) \Rightarrow (i)$. Para la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ razonamos como sigue. Supongamos que (i) es cierto. Tenemos que demostrar que para cada entorno absolutamente convexo U de 0 en E se tiene que $A \subset \rho U$ para algún $\rho > 0$. Esto último es equivalente a que

$$\sup_{x \in A} \sup_{x' \in U^\circ} |x'(x)| \leq \rho,$$

es decir, probar que A es acotado equivale a demostrar que A está uniformemente acotado sobre U° para cada entorno absolutamente convexo U de 0 en E. Utilizando el lema 2.4.10 U° es equicontinuo y así el Teorema de Alaoglu-Bourbaki 2.4.16 nos asegura que U° es $\sigma(E', E)$-compacto. Por otro lado como U° es absolutamente convexo tenemos que $E'_{U^\circ} := \operatorname{span} U^\circ = \cup_{n=1}^{\infty} nU^\circ$. Una aplicación de la Proposición [29, §20. 11. (2)] nos dice que E'_{U° es un espacio de Banach dotado la norma

$$\|x'\| := \inf\{\rho > 0 : x' \in \rho U^\circ\},$$

para $x' \in E'$. Es fácil comprobar que la bola unidad cerrada de $(E'_{U^\circ}, \|\cdot\|)$ es precisamente U°. Por otro lado cada $x \in A$ puede mirarse como una aplicación lineal $\hat{x} : E'_{U^\circ} \to \mathbb{K}$ dada por $\hat{x}(x') := x'(x)$ para cada $x' \in E'_{U^\circ}$ que es $\|\cdot\|$-continua. La hipótesis (i) implica que el conjunto $\hat{A} := \{\hat{x} : x \in A\}$ es puntualmente acotado como subconjunto de $\mathscr{L}(E'_{U^\circ}, \mathbb{K})$. Una aplicación tel teorema de la Acotación Uniforme 2.2.5 nos permite concluir que

$$\sup_{x \in A} \sup_{x' \in U^\circ} |\hat{x}(x')| = \sup_{x \in A} \sup_{x' \in U^\circ} |x'(x)| < +\infty.$$

y termina la prueba. $\square$

La siguiente definición generaliza el concepto de Base de Schauder que es bien conocida en espacios de Banach.

Definición 3.1.2. *Sea E un espacio localmente convexo. Una sucesión $\{e_n\}_n$ se dice que es una base débil de Schauder en E si:*

(i) Para cada $x \in E$, se tiene

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x) e_n$$

para unos únicos coeficientes $e'_n(x) \in \mathbb{K}$, siendo la serie convergente en la topología débil $\sigma(E, E')$ de E (en otras palabras, $x'(\sum_{n=1}^{m} e'_n(x)e_n - x) \to 0$ cuando $m \to \infty$ para cada $x' \in E'$).

(ii) $e'_n \in E'$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Cuando en (i) la convergencia de la serie es en la topología del espacio entonces se dice que la base es una base de Schauder sin especificar la topología.

Es bien conocido que si E es un espacio de Banach entonces toda base débil es una base de Schauder. En general podemos probar este resultado como consecuencia del Teorema de la Acotación Uniforme en espacios tonelados.

Teorema 3.1.3 (Teorema de la base débil)**.** *Sea E un espacio tonelado. Si $\{e_n\}_n$ es una base débil de Schauder en E, entonces $\{e_n\}_n$ es una base de Shauder.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos

$$u_n(x) = \sum_{m=1}^{n} e'_m(x) e_m - x.$$

Observemos que dado que cada $e'_m \in E'$ se tiene que $u_m \in \mathscr{L}(E, E)$. Por otro lado, la hipótesis $\{e_n\}_n$ es una base débil significa que para cada $x \in E$ se tiene que

$$x'(u_n(x)) \to 0$$

y en consecuencia el conjunto $x'\Big(\{u_n(x) : n \in \mathbb{N}\}\Big)$ es acotado en $\mathbb{K}$. Utilizando el teorema de Banach-Mackey 3.1.1 concluimos que $\{u_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en E, y ahora el Teorema de la Acotación Uniforme para espacios tonelados 2.4.6 nos permite concluir que el conjunto $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo en $\mathscr{L}(E, E)$.

Observar que si $E_0 = \text{span}\,\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ entonces para cada $x \in E_0$ se tiene que $u_n(x)$ converge a 0 para la topología original en E. Al ser $\{e_n\}_n$ una base débil el subespacio E_0 es denso débilmente en E y por la ***coincidencia de clausuras para topologías compatibles*** concluimos que E_0 es denso en E.

Por la equicontinuidad de $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, dado un entorno absolutamente convexo V de 0 en E, existe un entorno U de 0 en E de forma que $u_n(U) \subset \frac{1}{2}V$ para todo n. Dado $x \in E$ podemos elegir $x_0 \in E_0$ tal que $x - x_0 \in U$. Tenemos que $u_n(x - x_0) = u_n(x) - u_n(x_0) \in \frac{1}{2}V$, luego $u_n(x) \in u_n(x_0) + \frac{1}{2}V$ para todo n. Pero como $x_0 \in E_0$, existe n_0 de manera que $u_n(x_0) \in \frac{1}{2}V$ para todo $n > n_0$. Por lo tanto $u_n(x) \in V$ para todo $n > n_0$ y así la serie converge en la topología original de E y termina la prueba. $\square$

3.2. Aplicaciones bilineales

Sean E, F, G espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$; una aplicación f de $E \times F$ en G se dice bilineal si para todo $x \in E$ y todo $y \in F$, las aplicaciones parciales $f_x : y \to f(x,y)$ y $f^y : x \to f(x,y)$ son lineales. Si E, F, G son espacios localmente convexos, es sencillo demostrar que una aplicación bilineal f es continua si y sólo si lo es en (0, 0); de acuerdo con esto, una familia $\mathscr{B}$ de aplicaciones bilineales es equicontinua si y sólo si lo es en $(0,0)$. Una aplicación bilineal f se llama separadamente continua si todas las aplicaciones parciales f_x y f^y son continuas; es decir, si $f_x \in \mathscr{L}(F,G)$ para todo $x \in E$ y $f^y \in \mathscr{L}(E,G)$ para todo $y \in F$. Análogamente, una familia $\mathscr{B}$ de aplicaciones bilineales de $E \times F$ en G es separadamente equicontinua si son equicontinuas las familias $\{f_x : f \in \mathscr{B}\}$ y $\{f^y : f \in \mathscr{B}\}$ para todo $x \in E$ y todo $y \in F$. Finalmente, si $G = \mathbb{K}$, entonces una aplicación bilineal de $E \times F$ en G se denomina forma bilineal en $E \times F$.

Es fácil poner ejemplos de aplicaciones bilineales separadamente continuas que no son continuas.

Ejemplo 3.2.1. *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita y sea $F := E'$ su espacio dual. Entonces la aplicación de dualidad*

$$f : (E, \|\cdot\|) \times (E', \sigma(E',E)) \to \mathbb{K}$$

dada por $f(x,x') := x'(x)$ es bilineal, separadamente continua y no es continua.

Demostración. Es claro que f es bilineal y separadamente continua. Si f fuera continua existiría $\varepsilon > 0$ y un subconjunto finito $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ tal que para el $\sigma(E', E)$-entorno de 0 dado por $V = \{x' \in E' : \sup_{i=1,2,\dots,n} |x'(x_i)| < 1\}$ tendremos

$$f\Big(B_E(0,\varepsilon) \times V\Big) \subset B_{\mathbb{K}}[0,1]. \tag{3.1}$$

Ahora bien, como E es de dimensión infinita siempre podemos encontrar $x \in B_E(0,\varepsilon)$ linealmente independiente de $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$. Así el teorema de Hahn-Banach nos garantiza la existencia de $x' \in E'$ con $x'(x_i) = 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$ y $x'(x) = 2$. Así las cosas, $(x, x') \in B_E(0,\varepsilon) \times V$ pero $|f(x,x')| = 2$. Obtenemos así una contradicción con (3.1) que termina la prueba. □

Bajo hipótesis más restrictivas en E y F si puede derivarse continuidad de la continuidad separada para aplicaciones bilineales.

Teorema 3.2.2. *Sean E, F y G espacios localmente convexos con E y F metrizables. Si E es un espacio tonelado, entonces toda familia $\mathscr{B}$ de aplicaciones bilineales de $E \times F$ en G separadamente equicontinua es equicontinua.*

Demostración. Teniendo en cuenta que para cada $f \in \mathscr{B}$ se tiene la identidad

$$f(x,y) - f(x_0 - y_0) = f(x - x_0, y - y_0) + f(x - x_0, y_0) + f(x_0, y - y_0)$$

y la equicontinuidad separada de $\mathscr{B}$, es suficiente demostrar la equicontinuidad de $\mathscr{B}$ en (0, 0). Designemos por $\{U_n\}_n$ y $\{V_n\}_n$ sucesiones decrecientes formando base de entornos de 0 en E y F respectivamente; $\{U_n \times V_n\}$ es una base de entornos de 0 en $E \times F$. Si suponemos que $\mathscr{B}$ no es equicontinuo en $(0,0)$, existirá un entorno W_0 de 0 en G y sucesiones $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$, con $x_n \in U_n$, $y_n \in V_n (n \in N)$ tales que para todo n se tiene que $f_n(x_n, y_n) \notin W_0$, para una cierta sucesión $\{f_n\}_n$ tomada en $\mathscr{B}$. Demostraremos que esto es imposible y de esta forma terminará la prueba. Como para todo $x \in E$ fijo, la familia $\{f_x : f \in \mathscr{B}\}$ el teorema de Asoli 2.4.15 nos dice que $\{f_x : f \in \mathscr{B}\}$ está acotada en uniformemente en los subconjuntos compactos de F. En particular $\{f_x(y_n) : f \in \mathscr{B}, n \in \mathbb{N}\}$ será acotado en G, ya que al ser $\{y_n\}_n$ una sucesión nula de F es relativamente compacta. En particular, el subconjunto $\{f_n^{y_n} : n \in N\}$ de $\mathscr{L}(E, G)$ está puntualmente acotado. Por tanto, como E es tonelado el Teorema de la Acotación Uniforme para espacios tonelados 2.4.6 nos permite concluir que $\{f_n^{y_n} : n \in N\}$ es equicontinuo. De esto último se sigue la existencia de un entorno U de 0 en E para el que $f_n^{y_n}(U) \subset W_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto último, contradice la hipótesis de que $f_n(x_n, y_n) \notin W_0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $\{x_n\} \to 0$ en E y así para cierto $N \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \in U$ para cada $n \geq N$. $\square$

Corolario 3.2.3. *Sean E, F y G espacios localmente convexos con E y F metrizables. Si E es un espacio tonelado, entonces toda aplicación bilineal de $f : E \times F \to G$ separadamente continua, es continua*

Demostración. Basta aplicar el teorema anterior para la familia $\mathscr{B} := \{f\}$. $\square$

Utilizando otra vez el Teorema de la Acotación Uniforme 2.4.6 pero en $\mathscr{L}(F, G)$ podemos demostrar cuando F es también tonelado el siguiente resultado.

Corolario 3.2.4. *Sean E, F espacios localmente convexos metrizables y tonelados y G un espacio localmente convexo. Si $\mathscr{B}$ es una familia de aplicaciones bilineales de $E \times F$ en G separadamente continuas, tales que $\{f(x, y) : f \in \mathscr{B}\}$ es acotado en G para todo $(x, y) \in E \times F$, entonces $\mathscr{B}$ es equicontinuo.*

3.3. Funciones holomorfas vectoriales

Las funciones holomorfas vectoriales y el teorema de Liouville para ellas son la herramienta para demostrar que el espectro de un operador entre espacios de Banach es no vacío.

Definición 3.3.1. *Sean Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo y $f : \Omega \to X$ una función. Se dice que f es:*

(i) Débilmente holomorfa en Ω si $x^* f$ es holomorfa en Ω para cada $x^* \in X^*$.

(ii) Holomorfa en Ω si para cada $a \in \Omega$ existe el límite $\lim_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$.

Utilizando que los funcionales $x^* \in X^*$ son lineales y continuos se ve fácilmente que toda función holomorfa $f : \Omega \to X$ es débilmente holomorfa. El recíproco también es verdad, y para demostrarlo se utiliza el teorema de la acotación uniforme y la fórmula de Cauchy para funciones holomorfas complejas.

Teorema 3.3.2 (Dunford)**.** *Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, X un espacio de Banach complejo, y $f : \Omega \to X$ una función. Entonces f es holomorfa en Ω sí y sólo sí, es débilmente holomorfa.*

Demostración. Es claro que si existe el límite $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} := f'(z_0)$ entonces existe $\lim_{x\to a} \dfrac{x^*f(z)-x^*f(a)}{z-a} := x^*f'(x_0)$ para todo $x^* \in X^*$, y por tanto si f es holomorfa entonces x^*f es holomorfa para cada $x^* \in X^*$.

Para el recíproco utilizamos que la existencia de $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ equivale a que se cumpla la condición de Cauchy, y por tanto, basta probar que existen un entorno V de z_0 y una constante $M > 0$ tales que la función

$$G(z,\omega) := \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \frac{f(\omega)-f(z_0)}{\omega-z_0}$$

verifica la acotación $\|G(z,\omega)\| \leq M|z-\omega|$ para todo $z,\omega \in V$. Sea $B[z_0,r] \subset \Omega$ y sea $z \in B(z_0,r)$ fijo; como x^*f es holomorfa en Ω, la ***fórmula de Cauchy*** nos permite escribir

$$x^*f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x^*f(s)}{s-z}ds,$$

siendo $\Gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0,2\pi]$. Utilizando las correspondientes fórmulas para z_0 y $\omega \in B(z_0,r)$, se obtiene

$$x^*G(z,\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{x^*f(s)(z-\omega)}{(s-z)(s-\omega)(s-z_0)}ds.$$

Al ser $\{\Gamma(\theta) : \theta \in [0,2\pi]\}$ compacto, también lo es $\{x^*f(\Gamma(\theta)) : \theta \in [0,2\pi]\}$ para cada $x^* \in X^*$ y, por tanto, $\{f(\Gamma(\theta)) : \theta \in [0,2\pi]\}$ es un conjunto acotado en X: sea $\alpha := \sup\{\|f(\Gamma(\theta))\| : \theta \in [0,2\pi]\} < \infty$. Por otra parte, fijados zy $\omega \in B(z_0,r/2)$ la ecuación anterior conduce

$$\|G(z,\omega)\| = |x^*G(z,\omega)| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha|z-\omega|}{(r/2)(r/2)r}2\pi r = \frac{4}{r^2}\alpha|z-\omega|,$$

lo que prueba que $G(z,\omega) \to 0$ cuando $z,\omega \to z_0$ y así se tiene que f es holomorfa en Ω. □

El teorema de Liouville se satisface para funciones holomorfas vectoriales, *i. e.* , si $f : \mathbb{C} \to X$ es holomorfa y acotada entonces f es constante.

Corolario 3.3.3. *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo y $f : \mathbb{C} \to X$ una función holomorfa para la que x^*f es acotada para cada $x^* \in X^*$. Entonces f es constante.*

Demostración. Para cada $x^* \in X^*$, x^*f es una función entera acotada. Por el teorema de Liouville x^*f es constante y así $x^*f(z) = x^*f(0)$ para cada $z\mathbb{C}$. Como X^* separa los puntos de X se obtiene $f(z) = f(0)$ para cada $z \in \mathbb{C}$. □

3.4. Métodos de sumabilidad

Como es bien conocido, si una sucesión (x_n) converge entonces la sucesión de sus medias de Césaro

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\right)_n$$

converge al mismo límite. A pesar de que el recíproco no es verdad, la convergencia de Césaro es a veces una herramienta adecuada para obtener algunos resultados relevante. Por ejemplo, se sabe que hay funciones continuas en $[0,2\pi]$, 2π-periódicas, cuya serie de Fourier es puntualmente divergente en un G_δ-denso de $[0,2\pi]$, como veremos en la siguiente aplicación, pero sin embargo, las medias de Césaro de las sumas parciales de su serie de Fourier convergen uniformemente. Obsérvese que si $(x_n)_n$ es una sucesión, entonces la sucesión de sus medias de Césaro $(y_n)_n$ se obtiene como resultado de la multiplicación de una matriz infinita por la sucesión $(x_n)_n$ del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \dots \\ & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} & \dots \\ & & \dots\dots\dots & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Es natural estudiar transformaciones en el espacio de sucesiones a través de matrices infinitas.

Definición 3.4.1. *Sea $M = (k_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ una matriz infinita, $k_{n,m} \in \mathbb{K}$. Una sucesión $(x_m)_m$ en $\mathbb{K}$ se dice que es M-convergente a x en $\mathbb{K}$ si para cada $n \in \mathbb{N}$ la serie $\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m$ converge, digamos a y_n, y la sucesión $(y_n)_n$ converge a x. Se dice que es un método se sumabilidad permanente cuando transforma cada sucesión convergente $(x_m)_m$ en una sucesión $(y_n)_n = \left(\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m\right)_n$ que es convergente y cumple* $\lim_m x_m = \lim_n y_n$.

La matriz de Césaro es un método de sumabilidad permanente. El siguiente teorema caracteriza cuándo una matriz infinita es un método de sumabilidad permanente.

Teorema 3.4.2 (Toeplitz)**.** *Una matriz infinita $M = (k_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ es un método de sumabilidad sí y sólo sí se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $s = \sup\{\sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}| : n = 1,2,\ldots\} < \infty$.
2. $\lim_n k_{n,m} = 0$ *para cada* $m \in \mathbb{N}$.
3. $\lim_n \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} = 1$.

Demostración. Veamos en primer lugar que si M es un método de sumabilidad permanente, entonces se satisfacen las condiciones $1,2,3$ anteriores. Para cada $x = (x_m)_m \in c$ y para cada n y k naturales consideremos las sumas $f_k^n(x) := \sum_{m=1}^{k} k_{n,m} x_m$ y $f^n(x) := \sum_{m=1}^{\infty} k_{n,,m} x_m$ (la convergencia es parte de la hipótesis). Claramente $f_k^n, f^n : c \to \mathbb{K}$ son aplicaciones lineales y, como se puede comprobar fácilmente, se tiene que $f_k^n \in (c, \|\cdot\|_\infty)^*$ y $\|f_k^n\| = \sum_{m=1}^{k} |k_{n,m}|$. Dado que $f_k^n(x) \to f^n(x)$ para cada $x \in c$, el *teorema de Banach-Steinhaus* 2.2.7 nos dice que f^n es continua y que $\sup_k \|f_k^n\| = \sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}| < \infty$. De aquí se sigue que $\|f^n\| = \sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}|$. Dado que M que es un método de sumabilidad permanente, para cada $x \in c$, la sucesión $(f^n(x))_n$ es convergente, y una nueva aplicación del *teorema de Banach-Steinhaus* nos da ahora que:

$$\sup\{\|f^n\| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}| : n = 1,2,\ldots\} = s < \infty$$

con la que queda establecida la validez de 1. La propiedad 2 se obtiene aplicando M a cada elemento $e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$ donde 1 está en la coordenada n-ésima; 3 se obtiene aplicando M a la sucesión constante igual a 1.

Recíprocamente, supongamos que M es una matriz que satisface las propiedades 1, 2 y 3. Sea $x = (x_m)_m \in c$. Para $n = 1,2,\cdots$ tenemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m} x_m| \leq \left(\sum_{m=1}^{\infty} |k_{n,m}|\right) \|x\|_\infty \leq s\,\|x\|_\infty.$$

Como $s < \infty$ concluimos que $\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m$ converge en $\mathbb{K}$, digamos a y_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Escribamos ahora $Mx := (y_n)_n = y$. Tenemos que demostrar que $y \in c$ y que $\lim_n y_n = \lim_m x_m$. Sea $\lambda := \lim_m x_m$ y $\varepsilon > 0$. Tomemos $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que se cumpla que $\sup\{|x_m - \lambda| : m_0 \leq m \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$. Tomemos ahora n_0 tal que para $n > n_0$,

$$\sum_{m=1}^{m_0} |k_{n,m}| < \varepsilon \text{ y } \left|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} - 1\right| < \varepsilon$$

Entonces

$$|y_n - \lambda| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} x_m - \lambda\right| \leq \left|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m}(x_m - \lambda)\right| + |\lambda| \left|\sum_{m=1}^{\infty} k_{n,m} - 1\right|$$

$$\leq \left| \sum_{m=1}^{m_0} k_{n,m}(x_m - \lambda) \right| + \left| \sum_{m_0+1}^{\infty} k_{n,m}(x_m - \lambda) \right| + |\lambda|\varepsilon$$

$$\leq c_1\varepsilon + s\varepsilon + |\lambda|\varepsilon$$

para una constante c_1 adecuada, y la prueba queda terminada. □

3.5. Convergencia puntual de la serie de Fourier de funciones continuas

Sabemos que cualquier función $f \in L^2([-\pi,\pi])$ queda determinada en $L^2([-\pi,\pi])$, por sus coeficientes de Fourier

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \; n \in \mathbb{Z}$$

en el sentido de que las sumas n-ésimas s_n definidas mediante

$$s_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikx}, \; n = 0,1,2,\ldots$$

verifican que $\lim_n s_n = f$ en la norma $\|\cdot\|_2$. Cuando f es una función continua 2π-periódica también lo son las funciones $s_n(f)$ y cabe preguntarse si $s_n(f)$ convergerá a $f(x)$ para cada x. El teorema de Banach-Steinhaus permite dar una respuesta negativa a esa cuestión en la forma que pasamos a exponer.

En primer lugar es sencillo comprobar que

$$s_n(f;x) := s_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt,$$

donde

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt},$$

(D_n son los llamados núcleos de Dini). Sea $X = \{f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$: claramente X es un subespacio cerrado de $(C([0,2\pi]), \|\cdot\|_\infty)$. El problema es determinar si $\lim_n s_n(f;x) = f(x)$ para cada $x \in [-\pi,\pi]$ y cada $f \in X$. Fijado $x \in [-\pi,\pi]$ definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal $T_n : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{K}$ mediante $T_n f := s_n(f;x)$. El funcional T_n es continuo ya que

$$|T_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty |D_n(x-t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|D_n\|_1 \|f\|_\infty .$$

De hecho, se verifica que $\|T_n\| = (1/2\pi)\|D_n\|_1$ y que $\|D_n\|_1 \geq (8/\pi)\sum_{k=1}^{n} 1/k$ para cada $n \in \mathbb{N}$ como se demuestra en [31, p. 77 y p. 30]. Se obtiene que para $x \in [-\pi, \pi]$ existe un G_δ denso F_x de X con la propiedad de que

$$s^*(f;x) := \sup\{|s_n(f;x)| : n \in \mathbb{N}\} = \infty,$$

para cada $f \in F_x$. Así, para cada $f \in F_x$ la serie de Fourier de f no converge en x. Más aún, es cierto el resultado más fuerte:

Proposición 3.5.1. *Sea $X = \{f \in C([-\pi, \pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ con la norma inducida por $\|\cdot\|_\infty$ de $C([-\pi, \pi])$. Existe un G_δ denso $F \subset X$ con la siguiente propiedad: para cada $f \in F$, el conjunto*

$$Q_f := \{x \in [-\pi, \pi] : s^*(f;x) = \infty\}$$

es un G_δ denso en $[-\pi, \pi]$

Demostración. Sea $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso en $[-\pi, \pi]$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $F_i \subset X$ un G_δ denso en X con la propiedad de que $s^*(f;x_i) = \infty$ para cada $f \in F_i$. Definamos $F := \cap_{i\in\mathbb{N}} F_i$. El conjunto F es un intersección numerable de abiertos densos, y por el teorema de Baire 2.2.3, es un G_δ denso en X. Fijado $f \in F$ considerando el conjunto $Q_f := \{x : s^*(f;x) = \infty\}$. Por la definición de F es claro que $x_i \in Q_f$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y por tanto Q_f es denso en T. Pero además Q_f es un G_δ ya que

$$\{x : s^*(f;x) = \infty\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \{x : m < s^*(f;x)\}$$

y $\{x : m < s^*(f;x)\}$ es abierto, puesto que las sumas de Fourier s_n de una función continua f son funciones continuas y

$$\{x : m < s^*(f;x)\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : m < |s_n(f;x)|\}.$$

De hecho puede probarse que F y los conjuntos Q_f son no numerables. □

3.6. Operadores polinómicos trigonométricos

Podemos obtener una generalización introduciendo el concepto de operador polinómico. Sea X el espacio de funciones continuas 2π-periódicas y sea $\widehat{H}_n$ el subespacio de los polinomio trigonométricos de grado n a lo sumo. Un operador continuo linear U en X se llama operador trigonométrico polinomial de grado n si :

1. $U(f) \in \widehat{H}_n$ para todo $x \in X$
2. $U(f) = x$ para todo $f \in \widehat{H}_n$

En otras palabras, un operador polinómico que asigna a cada función 2π-periódica a un polinomio trigonométrico de grado a lo sumo n, y dejando fijos a éstos polinomios. Si $y = U(f)$, el valor de y para un valor dado s, lo denotamos por $U(f;s) = y(s)$, podemos definir para una función $f(t)$ en X a la función $f^h(t) := f(t+h) \in X$ para todo h. Como $f \in X$ es uniformemente continua,

$$\|f^h - f\|_\infty = \max_t |f^h(t) - f(t)| \to 0 \text{ cuando } h \to 0 \tag{3.2}$$

Lema 3.6.1. *Si U es un operador polinómico de grado n, entonces tenemos la identidad:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f^\tau; s-\tau)d\tau = s_n(f)(s)$$

Identidad de Zygmund-Marcinkiewicz-Berman

Demostración. Supongamos que $f \in \widehat{H}_n$, tal que $f^\tau \in \widehat{H}_n$ también. Entonces

$$U(f^\tau; s-\tau) = x^\tau(s-\tau) = f(s)$$

pero, como s_n es un operador polinómico de grado n, tenemos que

$$s_n(f;s) = f(s)$$

lo que prueba la identidad en este caso. Supongamos que $f(t) = \cos(mt)$ o $f(t) = \operatorname{sen}(mt)$ donde $m > n$ en este caso:

$$f^\tau = \cos m(t+\tau) = \cos mt \cos m\tau - \sin mt \sin m\tau = x_1(t)\cos m\tau + x_2(t)\sin m\tau$$

Por lo tanto, si $y_1 = U(f_1)$ y $y_2 = U(f_2)$ obtenemos (siendo $y_1, y_2 \in \widehat{H}_n$)

$$U(f^\tau; s-\tau) = y_1(s-\tau)\cos m\tau + y_2(s-\tau)\sin m\tau.$$

Pero $y_1(s-\tau)$ e $y_2(s-\tau)$ son polinomios trigonométricos en τ de grado a lo sumo n, por lo que son ortogonales a las funciones $\cos m\tau$ y $\operatorname{sen} m\tau$, de aquí se sigue $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f^\tau; s-\tau) d\tau = 0$ y claramente también el término de la derecha de la identidad, en este caso también es cero. Consideramos el término a la izquierda de la identidad, que denotamos para abreviar $F_s(f)$, tenemos

$$\begin{gathered}|U(f^{\tau+h}; s-\tau-h) - U(f^\tau; s-\tau)| \leq \\ \left|U(f^{\tau+h}; s-\tau-h) - U(f^\tau; s-\tau-h)\right| + |u(f^\tau; s-\tau-h) - U(f^\tau; s-\tau)| \leq \\ \leq \left\|U(f^{\tau+h} - f^\tau)\right\| + |U(f^\tau; s-\tau-h) - U(f^\tau; s-\tau)| \leq \\ \|U\| \left\|f^{\tau+h} - f^\tau\right\| + |U(f^\tau; s-\tau-h) - U(f^\tau; s-\tau)|\end{gathered}$$

Para h suficientemente pequeño, el primer término es tan pequeño como queramos , por (3.2), y por tanto también en el segundo término, por lo que $U(f^\tau, s)$ es continuo. El funcional F_s es aditivo y $|F_s(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U(f^\tau : s-\tau)| d\tau \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|U\| \, \|f^\tau\| d\tau = \|U\| \, \|f\|$, lo que nos da un funcional acotado. Escribiendo $g_s(f) = s_n(f)$, $F_s = g_s$ en el conjunto denso de polinomios trigonométricos en X, y son continuas, por tanto coinciden en todo el espacio X y la identidad se cumple □

Teorema 3.6.2 (Norma mínima)**.** *De todos los operadores polinómicos trigonométricos de grado n, el operador s_n es el que tiene la menor norma.*

Demostración. Por identidad anterior tenemos

$$\|s_n(f)\| = \max_x |s_n(f; x)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_s |U(f^\tau : s-\tau)| d\tau \leq \|U\| \, \|f\|$$

lo que no da $\|s_n\| \leq \|U\|$. □

En general tenemos $\|U\| \geq \|s_n\| \geq A\ln(n)$.

Teorema 3.6.3 (Lozinskii-Kharshiladze)**.** *Sea $\{U_n\}$ una sucesión de operadores polinómicos trigonométricos, donde U_n tiene grado n, entonces la norma de esos operadores tienden a infinito. En particular, no existe sucesión convergente en el espacio X.*

Demostración. La primera parte se deduce de el teorema anterior 3.6.2, la segunda usando *el teorema de Banach-Steinhaus*, ya que de existir, estaría acotada y por *el teorema de Banach-Steinhaus* los operadores U_n estarían acotados también, lo que es una contradicción. □

3.7. Espacios tonelados y el teorema de la gráfica cerrada

Cuando una aplicación lineal es continua, sabemos que su gráfica es cerrada, pero en general no podemos decir lo mismo del recíproco, basta tomar un espacio topológico T y dos topologías distintas τ estrictamente mas gruesa que ρ, la aplicación identidad $I : (T,\tau) \to (T,\rho)$ tiene la gráfica cerrada pero no es continua. El Teorema de la gráfica cerrada garantiza el recíproco en ciertas condiciones del espacio de partida, cuestión importante porque se da a menudo que es más fácil demostrar que una aplicación tiene la gráfica cerrada que probar la continuidad de forma directa. Para aplicaciones lineales T entre espacios de Banach E y F, T es continua si, y sólo si, T tiene gráfica cerrada, [24]. En esta sección vamos a demostrar que la clase de espacios localmente convexos la tonelación equivale a que se satisfaga el teorema de gráfica cerrada para la familia de los espacios de Banach en llegada.

Vamos a utilizar aquí definiciones de [24] combinadas con algunas ideas de [41]: las demostraciones que damos aquí de estos resultados son más simples que las tradicionales que se pueden encontrar en diversas monografías y suponen una aproximación personal a la cuestión.

Definición 3.7.1. *Sea E un espacio localmente convexo y $A \subset E$*

(i) Se dice que A es CS-compacto, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A y cualquier sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = 1$, se verifica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$ converge a un punto de A.

(ii) Se dice que A es CS-cerrado, si para toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A y cualquier sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = 1$, para las cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$ converja, se verifica que su suma pertenece a A.

El siguiente lema nos proporciona ejemplos naturales de conjuntos CS-compactos.

Lema 3.7.2. *Sea E un espacio normado, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en B_E la bola unidad de E, y sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{B}}$ una sucesión en $\mathbb{K}$ cumpliendo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| \leq 1$. Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ converge y pertenece a B_E. Es decir, B_E es un CS-compacto.*

Demostración. Tomamos un n y comprobamos que $\sum_{k=1}^{n}\alpha_n x_n$ está en B_E:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_n x_n\right\| \leq \sum_{k=1}^{n}\|\alpha_n x_n\| = \sum_{k=1}^{n}|\alpha_n|\cdot\|x_n\| \leq \sum_{k=1}^{n}|\alpha_n|\cdot 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| \leq 1$$

Al tender n a infinito se obtiene el resultado deseado. $\square$

En la demostración del Lema 3.7.3 utilizamos el siguiente hecho elemental: sea E un espacio vectorial topológico metrizable, y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de entornos decrecientes del origen e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $y_n \in U_n$ para todo n, entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

Notamos que el lema que sigue generaliza el correspondiente resultado que se demuestra en [24] para espacios normados.

Lema 3.7.3. *Sea E un espacio localmente convexo metrizable y U un subconjunto de E absolutamente convexo y CS-cerrado. Entonces* $\mathrm{int}(\overline{U}) \subset U$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{int}(\overline{U}) \neq \emptyset$, pues en otro caso no tenemos nada que probar. Fijemos $x \in \mathrm{int}(\overline{U})$. Observamos que

$$0 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \in \frac{1}{2}\mathrm{int}(\overline{U}) - \frac{1}{2}\mathrm{int}(\overline{U}) \subset \overline{U},$$

y así $\overline{U}$ es un entorno del origen en E. Fijemos una base de entornos del origen en E, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que cumplan que

$$B_n \subset \overline{U} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $x \in \mathrm{int}(\overline{U})$ podemos tomar $\lambda > 1$ tal que $\lambda x \in \mathrm{int}(\overline{U})$. Para λx tenemos que $\lambda x - \frac{\lambda-1}{2}B_1$ es entorno de λx. Por la definición de adherencia de $\overline{U}$ sabemos que

$$\left(\lambda x - \frac{\lambda-1}{2}B_1\right) \bigcap U \neq \emptyset$$

por lo que existe $y_1 \in \frac{\lambda-1}{2}B_1$ y $x_1 \in U$ de manera que

$$\lambda x - y_1 = x_1$$

es decir

$$y_1 = \lambda x - x_1 \in \frac{\lambda-1}{2}B_1$$

Como además se tiene que

$$\frac{\lambda-1}{2}B_1 \subset \frac{\lambda-1}{2}\overline{U}.$$

Tomo $y_1 - \frac{\lambda - 1}{2^2} B_2$ entorno de y_1, y repitiendo argumento sabemos que:

$$\left(y_1 - \frac{\lambda - 1}{2^2} B_2 \right) \bigcap \frac{\lambda - 1}{2} U \neq \emptyset$$

existe $y_2 \in \frac{\lambda - 1}{2^2} B_2$ y $x_2 \in U$ de manera que

$$y_1 - y_2 = \frac{\lambda - 1}{2} x_2$$

por lo que tenemos

$$y_2 = y_1 - \frac{\lambda - 1}{2} x_2 \in \frac{\lambda - 1}{2^2} B_2$$

Por recurrencia tenemos

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\lambda - 1}{2^n} x_{n+1} \in \frac{\lambda - 1}{2^n} B_{n+1} \subset \frac{\lambda - 1}{2^n} \overline{U}$$

La sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al origen en E. Reescribiendo y_n se obtiene:

$$y_n = \lambda x - x_1 - \frac{\lambda - 1}{2} x_2 - \ldots - \frac{\lambda - 1}{2^{n-1}} x_n$$

y al tender n a infinito se tiene que

$$0 = \lambda x - x_1 - \frac{\lambda - 1}{2} x_2 - \ldots - \frac{\lambda - 1}{2^{n-1}} x_n - \ldots$$

y se obtiene

$$x = \frac{1}{\lambda} x_1 + \frac{\lambda - 1}{\lambda 2} x_2 + \ldots + \frac{\lambda - 1}{2^{n-1}} x_n + \ldots$$

con $\{x_n\} \in U$ para todo n, y además

$$\frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda - 1}{\lambda 2^n} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1$$

Al ser U CS-cerrado, obtenemos que $x \in U$ □

El siguiente resultado pone de manifiesto la relación entre conjuntos CS-compactos y CS-cerrados con aplicaciones lineales con gráfica cerrada.

Lema 3.7.4. *Sean E,F dos espacios localmente convexos, y $T : E \to F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada. Si $A \subset F$ es un conjunto CS-compacto, entonces $T^{-1}A$ es CS-cerrado en E.*

Demostración. Sea $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $T^{-1}A$ de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$ converge a un elemento $x \in E$. Sea $z_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, con $n \in \mathbb{N}$ es una sucesión en E que converge a x por lo tanto

$$Tz_n = T\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k T x_k$$

Cada Tx_k están en A y al ser CS-compacto, sabemos que la sucesión $\{Tz_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un $y \in A$. En el espacio producto $E \times F$ la sucesión (z_n, Tz_n) converge al punto (x,y), pero como T tiene la gráfica cerrada, la sucesión (z_n, Tz_n) converge a un punto del grafo, por lo que $Tx = y$ y por tanto $x \in T^{-1}A$ □

Podemos demostrar ahora el Teorema de Gráfica cerrada tomando como espacios de partida espacios localmente convexos metrizables y tonelados (extendiendo así el teorema de la Gráfica Cerrada de Banach) y damos una demostración autocontenida y original.

Teorema 3.7.5 (Teorema Gráfica Cerrada para espacios metrizables y tonelados)**.** *Sea E un espacio localmente convexo metrizable y tonelado, F un espacio de Banach y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada. Entonces T es continua.*

Demostración. Sea $B_F = \{y \in F : \|y\| \leq 1\}$ y sea $U = T^{-1}(B_F)$. Entonces U es absolutamente convexo y absorbente: sean $x,y \in U$; sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ de manera que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$, entonces

$$\|T(\alpha x + \beta y)\| = \|T(\alpha x) + T(\beta y)\| \leq |\alpha|\|T(x)\| + |\beta|\|T(y)\| \leq |\alpha| \cdot 1 + |\beta| \cdot 1 \leq 1.$$

lo que demuestra que es absolutamente convexo. Sea $x \in E$, entonces $Tx \in F$ por lo que existe $\rho > 0$ de manera que $Tx \in \rho B_F$, por lo tanto $T(\frac{x}{\rho}) \in B_F$ y significa que $\frac{x}{\rho} \in U$ y se deduce que $x \in \rho U$. Lo que demuestra que es absorbente. Entonces $\overline{U}$ es un tonel, y al ser E tonelado $\overline{U}$ es un entorno del origen.

Por 3.7.2 sabemos que B_F es un CS-compacto, y por 3.7.4 tenemos que $U = T^{-1}(B_F)$ es CS-cerrado, aplicando ahora 3.7.3 obtenemos que $0 \in \operatorname{int}(\overline{U}) \subset U$, lo que demuestra que U es entorno del origen y por tanto T es continua □

Notamos que existen de hecho espacios normados tonelados que no son espacios de Banach, por lo que el teorema anterior tiene más alcance que el clásico teorema de la Gráfica Cerrada entre espacios de Banach: en [40, p. 133] se demuestra que

$$\ell_0^\infty := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \in \ell^\infty \text{ y } \#(x(\mathbb{N})) < \infty\}$$

dotado de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es un espacio tonelado que no es un espacio de Banach.

El siguiente lema es el último resultado de tipo técnico que necesitamos para demostrar el Teorema 3.7.7 donde se establece la caracterización de los espacios tonelados via el Teorema de la Gráfica Cerrada.

Proposición 3.7.6. *Sean E, F dos espacios localmente convexos. Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Si hay un sistema fundamental de entornos cerrados y absolutamente convexos $\{U_i\}_{i\in I}$ del origen en F tales que $f^{-1}U_i$ es cerrado en E para todo $i \in I$, entonces f tiene gráfica cerrada.*

Demostración. Sea G la clausura de $f(E)$ en F, es suficiente probar que el grafo de f es cerrado en $E \times G$. Sea $V_i = U_i \cap G$, para todo $i \in I$. Consideramos f una aplicación de E en G y sea

$$g : G'[\sigma(G',G)] \to E^*[\sigma(E^*,E)]$$

donde $g = f^*$. Si $u \in G'$, existe un índice j en I de manera que $u \in W_j$, siendo W_j el polar de V_j en G'. Como g es continuo, tenemos que $g(W_j)$ es un subconjunto compacto de $E^*[\sigma(E^*,E)]$. Sean P_j y Q_j los conjuntos polares de $f^{-1}(V_j)$ en E' y en E^* respectivamente. Como $f^{-1}(V_j)$ es cerrado y absolutamente convexo, tenemos que Q_j es la clausura de P_j en $E^*[\sigma(E^*,E)]$. Tenemos que $g(W_j)$ coincide con Q_j y entonces hay un red

$$\{v_h : h \in H, \geq\}$$

en P_j que $\sigma(E^*,E)$-converge a $g(u)$. Como $f(E)$ es denso en G, entonces g es inyectiva y se tiene que $g^{-1}(P_j)$ está contenida en W_j y por tanto la red

$$\{g^{-1}(v_h) : h \in H, \geq\}$$

tiene un punto adherente v en el subconjunto compacto W_j de $G'[\sigma(G',G)]$. Como g es continua tenemos que $g(v)$ coincide con $g(u)$ y consecuentemente v coincide con u. Entonces $g^{-1}(E')$ es denso en $G'[\sigma(G',G)]$. Tenemos que $\tau = \sigma(G, g^{-1}(E'))$ es una topología Hausdorff en G. Como $f : E \to G[\tau]$ es continua, obtenemos que $f : E \to G$ tiene la gráfica cerrada. $\square$

Teorema 3.7.7. *Sea E un espacio localmente convexo, son equivalentes:*

(i) E es tonelado.

(ii) Para todo espacio de Banach F y toda aplicación lineal cerrada $T : E \to F$, T es continua.

Demostración. Demostraremos primero la implicación $(ii) \Rightarrow (i)$ se razona por reducción al absurdo. Supongamos que E no es tonelado, existirá U un tonel de E que no es entorno de cero. Sea $P_U : E \to \mathbb{K}$ el funcional asociado a U definido como

$$P_U(x) = inf\{\rho > 0 : \rho x \in U\}$$

Sea $F = \{x \in E : P_U(x) = 0\}$ que es un subespacio cerrado de E que además cumple que $F \subset U$ y consideramos la aplicación

$$f_U : E \to E/F$$

Consideramos en E/F la familia $\{\frac{1}{n} f_U(U)\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es un sistema fundamental de entornos cerrados el origen para una topología localmente convexa τ. Tomamos ahora la completación de $(E/F, \tau)$ que denotaremos $G = \widetilde{(E/F, \tau)}$, este espacio es de Banach. Sea $V = \overline{f_U(U)}^G$, la clausura de $f_U(U)$ en G, tenemos que $\{\frac{1}{n} V\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de entornos cerrados del origen en G. Considerando ahora a f_U como una aplicación de E en G tenemos que

$$f_U^{-1}(\frac{1}{n} V) = f_U^{-1}(\frac{1}{n} f_U(U)) = \frac{1}{n} f_U^{-1}(f_U(U)) = \frac{1}{n} U, n = 1, 2, \dots$$

Por la Proposición 3.7.6 tenemos que f_U tiene la gráfica cerrada. Si f_U fuera continua $U = f_U^{-1}(V)$ sería un entorno de origen lo que proporciona una contradicción que termina la prueba.

Recíprocamente, hemos demostrado en el Teorema 3.7.5 la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ cuando E es un espacio metrizable tonelado. Técnicas estándar que se pueden encontrar en [40, 41] permiten reducir el caso de un espacio tonelado E al caso metrizable ya demostrado. □

Una subclase importante de espacios tonelados es la clase de espacios ultrabornológicos que cuya definición se da a continuación.

Definición 3.7.8. *Sea E un espacio localmente convexo.*

(i) *Un conjunto $D \subset E$ es un disco de Banach si es absolutamente convexo, acotado y $E_D := \operatorname{span}(D)$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_D$ dada por su funcional de Minkowsky.*

(ii) *Se dice que E es ultrabornológico si cada subconjunto absolutamente convexo de E que absorbe todos los discos de Banach es un entorno del origen.*

Proposición 3.7.9. *Si E es un espacio localmente convexo ultrabornológico, F un espacio de Banach y $T : E \to F$ una aplicación lineal con gráfica cerrada entonces T es continua. En particular E es tonelado.*

Demostración. Sea D un disco de Banach en E. La inmersión natural $j_D : E_D \to E$ es continua. Consecuentemente $T \circ j_D : E_D \to F$ tiene gráfica cerrada. Como E_D y F son espacios de Banach, el Teorema de la Gráfica cerrada para espacios de Banach nos permite concluir que $T \circ j_D$ es continua. Esto último implica que $T(D)$ es acotado en F y por tanto $T(D) \subset \rho B_F$. Esto implica que $D \subset \rho T^{-1}(B_F)$. En otras palabras, el conjunto absolutamente convexo $T^{-1}(B_F)$ absorbe todos los discos de Banach. Por hipótesis $T^{-1}(B_F)$ es entorno del origen y por tanto T es continua.

El Teorema 3.7.7 nos dice que E es tonelado. □

Vamos a terminar esta sección y el capítulo recogiendo, sin demostración, otro ejemplo de un espacio normado tonelado que no es de Banach: el espacio de las funciones integrables Pettis.

Definición 3.7.10. *Sea X un espacio de Banach, X^* su dual, sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Una función $f : \Omega \to X$ se dice que es integrable Dunford si la composición $t \mapsto x^*(f(t))$ es un función en $L_1(\mu)$ para cada $x^* \in X^*$.*

Dunford probó, usando el teorema de la gráfica cerrada entre espacios de Banach, que si f es integrable Dunford entonces para cada conjunto medible $A \in \Sigma$ existe un elemento en X^{**} llamado la integral de Dunford de f sobre A y denotado por $\int_A f d\mu$ de manera que

$$x^*\left(\int_A f d\mu\right) = \int_A x^*(f(t)) d\mu(t).$$

Una función $f : \Omega \to X$ débilmente μ-medible se dice que es integrable Pettis si es integrable Dunford y la integral $\int_A f d\mu$ está en X para todo $A \in \Sigma$. En este caso $\int_A f d\mu$ se llama integral de Pettis de f sobre A. Denotamos por $\mathscr{P}(\mu,X)$ el espacio de clases de funciones escalarmente equivalentes a funciones integrables Pettis, dotado con su norma dada por

$$\|f\| := \sup\left\{\int_\Omega |x^*(f(t))|d\mu(t) : x^*, \|x^*\| \leq 1\right\}.$$

En general, $\mathscr{P}(\mu,X)$ *no es completo*, como ya se puso de manifiesto en [2] y [34]. Thomas [38], Janicka y Kalton [25] mostraron que no es completo si X es de dimensión infinita y μ no tiene átomos (en particular para $T=[0,1]$ con la medida de Lebesgue). Sin embargo Drewnowski, Florencio y Paúl [12] probaron que $\mathscr{P}(\mu,X)$ es tonelado. Más aún Fernández, Florencio y Paúl [9] probaron el siguiente resultado como consecuencia de un principio general que afirma que un espacio normado dotado de un tipo especial de álgebra de Boole de proyecciones continuas es ultrabornológico.

Teorema 3.7.11. *$\mathscr{P}(\mu,X)$ son ultrabornológicos para cualquier espacio de Banach X.*

Una consecuencia de lo anterior es que el Teorema de la Acotación Uniforme se verifica en $\mathscr{P}(\mu,X)$ y también el teorema de Gráfica cerrada para aplicaciones lineales de $\mathscr{P}(\mu,X)$ en un espacio de Banach F. Notamos que este último resultado ha sido la clave para la extensión de resultados como el recogido en el Teorema 3.7.13 que sigue que se han realizado en la Tesis Doctoral [35] y en [36].

Recordemos que:

Definición 3.7.12. *Una función $f:\Omega\to X$ se dice integrable Bochner si es **fuertemente medible** y existe una sucesión $f_n:\Omega\to X$ de funciones simples tal que*

$$\lim_n \int_\Omega \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En tal caso, para cada $E\in\Sigma$ existe $\lim_n \int_E f_n d\mu$. Este límite es independiente de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y será denotado como $\displaystyle\int_E f d\mu$.

Toda función integrable Pettis es integrable Bochner pero el recíproco no es cierto.

Un operador $u: X \longrightarrow Y$ se dice *absolutamente sumante* si, para cada serie incondicionalmente convergente $\sum_n x_n$ en X, la serie $\sum_n u(x_n)$ es absolutamente convergente. Como los operadores absolutamente sumantes mejoran las propiedades de sumabilidad de las sucesiones, cabe esperar que también mejoren la integrabilidad de las funciones vectoriales. Aparentemente, el primero en considerar este tipo de cuestiones fue Diestel [10], que probó el siguiente resultado. Escribimos $P_m(\mu,X)$ para denotar el espacio de las (clases de equivalencia escalar de) funciones fuertemente medibles e integrables Pettis de Ω en X.

Teorema 3.7.13 (Diestel)**.** *Si un operador $u : X \longrightarrow Y$ es absolutamente sumante, entonces:*

(i) para cada función fuertemente medible e integrable Pettis $f : \Omega \longrightarrow X$, la composición $u \circ f$ es integrable Bochner;

(ii) la aplicación lineal

$$\tilde{u} : (P_m(\mu,X), \|\cdot\|_P) \longrightarrow (L^1(\mu,Y), \|\cdot\|_1), \quad f \mapsto u \circ f,$$

es continua.

Recíprocamente, si $\mu(\Omega) > 0$, μ no tiene átomos y $u : X \longrightarrow Y$ es un operador que satisface (i) y (ii), entonces u es absolutamente sumante.

Capítulo 4

Propiedades extremales en espacios de Banach

«CONTENIDOS»

- Preliminares sobres puntos extremales.
- Espacios de Banach que no contienen a c_0.
- Demostración del teorema de Banach-Mackey para conjuntos de puntos extremales.
- Una mejora del Teorema de rainwater

TODOS los espacios que consideramos en este capítulo son espacios reales. En el Corolario 2.2.8 se ha utilizado el Teorema de la Acotación Uniforme para demostrar la siguiente equivalencia:

Teorema A.- *Un subconjunto A de un espacio normado X está acotado en norma si sólo si $x^*(A)$ está acotado para todo $x^* \in B_{X^*}$.*

Lo que haremos en este capítulo, siguiendo a [16], es estudiar condiciones que aseguran que se puede obtener la equivalencia anterior bajo la hipótesis más débil de que $x^*(A)$ está acotado pero sólo para los puntos extremales x^* de la bola unidad B_{X^*}. Como motivación para lo que sigue vamos a dar una nueva demostración del Teorema A en la que ahora utilizamos el teorema de la Categoría de Baire en la bola dual de un espacio normado.

Demostración Teorema A. Siendo claro que si A está acotado en norma entonces $x^*(A)$ está acotado para cada $x^* \in X^*$, sólo nos ocupamos de ver el recíproco. La bola unidad dual B_{X^*} se puede expresar como

$$B_{X^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x^* \in B_{X^*} : \sup_{x \in A} |x^*(x)| \leq n\}$$

Como $(X^*, \|\cdot\|^*)$ es un espacio métrico completo y B_{X^*} un subconjunto cerrado de este, tendremos que B_{X^*} es un espacio de Baire. Denotemos

$$B_n = \{x^* \in B_{X^*} : \sup_{x \in A} |x^*(x)| \leq n_0\}.$$

Cada B_n es un conjunto cerrado absolutamente convexo y $B_{X^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Así, el Teorema de la Categoría de Baire nos garantiza que existe n_0 tal que $\operatorname{int} B_{n_0}$ es no vacío. Como $\operatorname{int} B_{n_0}$ es abierto y $0 \in \frac{1}{2} \operatorname{int} B_{n_0} - \frac{1}{2} \operatorname{int} B_{n_0} \subset B_{n_0}$, existe $r > 0$ de manera que $B(0,r) \subset B_{n_0}$. En otras palabras, B_{n_0} es normante, o lo que es lo mismo existe $\alpha > 0$ de manera que para todo $x \in X$,

$$\alpha \|x\| \leq \sup_{x^* \in B_{n_0}} |x^*(x)| \leq \|x\|.$$

Para $x \in A$ tendremos

$$\alpha \sup_{x \in A} \|x\| \leq \sup_{x \in A} \sup_{x^* \in B_{n_0}} |x^*(x)| \leq n$$

por lo que

$$\sup_{x \in A} \|x\| \leq \frac{n_0}{\alpha},$$

con lo que queda demostrado que A está acotado en norma. □

Obsérvese que en la demostración anterior hemos visto que la acotación en norma de A se obtiene del hecho que si ponemos $B_{X^*} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ con $\{B_n\}_n$ creciente, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que B_n es normante. Por el teorema de Krein-Milman sabemos que el conjunto de puntos extremales de la bola unidad nos proporciona información sobre toda la bola. Ello nos invita a estudiar qué condiciones deben cumplir dichos puntos para que se verifique el teorema de la acotación uniforme cuando sustituimos la bola dual por el conjunto de puntos extremales de la misma. La idea de este trabajo viene de la noción de conjunto normante antes descrita: si podemos escribir los puntos extremales de la bola unidad como la unión de una sucesión de subconjuntos creciente, ¿será alguno de ellos normante?

Utilizaremos en esta ocasión el ***Teorema de Krein-Milman***, el ***Teorema de inversión de Milman***, el ***Teorema de Rainwater***, el ***Principio de Bauer*** y el ***Principo de seleción de Bessaga-Pelczynski***. Las referencias [16, 4, 5, 11] han sido básicas para el estudio que hemos realizado en este capítulo.

4.1. Preliminares sobre puntos extremales

Definición 4.1.1. *Sea E un espacio vectorial y $K \subset E$ un conjunto. Un subconjunto no vacío $S \subset K$ se llama* conjunto extremal *de K cuando se satisfacen la siguiente condición:*

$$\textit{si } x,y \in K,\ 0 < t < 1 \textit{ y } tx + (1-t)y \in S \textit{ entonces } x,y \in S.$$

Un punto $e \in K$ se dice que es un punto extremal *si el conjunto $\{e\}$ es extremal de K. Al conjunto de puntos extremales de K se denotará como $Ext(K)$*

Lema 4.1.2. *Si $S_1 \subset K$ es un conjunto extremal de K y $S_2 \subset S_1$ es un* conjunto extremal *de S_1, entonces S_2 es un conjunto extremal de K.*

Demostración. Sean $x, y \in K$, $0 < t < 1$ y $tx + (1-t)y \in S_2$. Como S_1 es un conjunto extremal de K y $tx + (1-t)y \in S_1$, entonces $x, y \in S_1$. Si utilizamos ahora que S_2 es un conjunto extremal de S_1, por el mismo razonamiento podemos concluir que $x, y \in S_2$. □

Lema 4.1.3. *Sean E un espacio vectorial y $A \subset E$ un conjunto. Sea además $f : E \to \mathbb{R}$ una forma lineal de tal forma que $s = \sup\{f(x) : x \in A\} < \infty$. Si $A_f = \{x \in A : f(x) = s\}$ es no vacío, entonces A_f es un conjunto extremal de A.*

Demostración. Sean $x, y \in A$, $0 < t < 1$ tales que $tx + (1-t)y = z \in A_f$. Supongamos que $x \notin A_f$. Entonces $f(x) < s$ y por tanto

$$f(z) = tf(x) + (1-t)f(y) < ts + (1-t)s = s,$$

es decir, $z \notin A_f$. De forma similar se razona que si $y \notin A_f$, entonces $z \notin A_f$ □

El siguiente lema nos proporciona la existencia de puntos extremales en conjuntos compactos convexos y es la clave para demostrar el teorema de Krein-Milman.

Lema 4.1.4. *Sea E un espacio localmente convexo y sea K un conjunto compacto de E. Entonces K contiene, al menos, un punto extremal.*

Demostración. Sea $\mathscr{P}$ la colección de todos los conjuntos extremales compactos de K. $\mathscr{P}$ es no vacía, puesto que $K \in \mathscr{P}$. Se ordena parcialmente $\mathscr{P}$ mediante la inclusión hacia abajo, es decir, si $K_1, K_2 \in \mathscr{P}$ entonces $K_1 \preceq K_2$ si y sólo si $K_2 \subset K_1$. Sea entonces $\mathscr{B}$ una subcolección de $\mathscr{P}$ totalmente ordenada, y escribamos $S := \bigcap_{b \in \mathscr{B}} B$. Como $\mathscr{B}$ está totalmente ordenada, $\mathscr{B}$ es una familia de subconjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita. Como K tendremos entonces que el conjunto S es no vacío, compacto y se comprueba fácilmente que es un conjunto extremal de K. Ahora, en virtud del ***Lema de Zorn***, existe un elemento maximal A de $\mathscr{P}$. Utilizando el Lema 4.1.3, para cada $f \in E'$, el conjunto compacto A_f es un conjunto extremal de K y, dado que A es maximal, $A_f = A$. Esto significa que cada $f \in E'$ es constante en A. Por último, como E' separa los puntos de E, obtenemos que A contiene un sólo punto, y por lo tanto, dicho punto será un punto extremal de K. □

Lema 4.1.5. *Sean E, F dos espacios localmente convexos y sea $M \subset E$ un conjunto compacto y convexo. Sea $T : E \to F$ un funcional lineal. Si $f \in Ext(T(M))$, entonces existe $e \in Ext(M)$ de manera que $f = T(e)$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $T^{-1}(f) \cap M \subset M$. Dicho conjunto no vacío al ser $f \in T(M)$, y además compacto y convexo. Por el Lema 4.1.4 existe $e \in T^{-1}(f) \cap M$ un punto extremal de $T^{-1}(f) \cap M$. Tenemos que

$$\{e\} \subset T^{-1}(f) \cap M \subset M.$$

Para demostrar que e es un punto extremal de M, probaremos que $T^{-1}(f) \cap M$ es un conjunto extremal de M y aplicando el Lema 4.1.2 obtendremos el resultado buscado: Sean $x, y \in M$, $0 < t < 1$ de manera que $tx + (1-t)y \in T^{-1}(f) \cap M$, aplicando T se tiene

$$f = T(tx + (1-t)y) = tT(x) + (1-t)T(y)$$

pero f es extremal, por lo que $T(x) = f = T(y)$ y por tanto $x, y \in T^{-1}(f) \cap M$. □

Recordemos la siguientes definiciones:

Definición 4.1.6. *Un subconjunto B de B_{X^*} se dice:*

(i) Total, *si para cada $x \in X \backslash \{0\}$ se tiene $sup\{|f(x)| : f \in B\} > 0$.*

(ii) Normante*, si se tiene que*

$$\inf_{x\in S(X)} \sup_{f\in B} |f(x)| > 0$$

donde $S(X)$ son los puntos de la esfera unidad en X.

Como consecuencia del Teorema de Hahn-Banach se tiene que B es total si, y sólo si, el subespacio span B es débil*-denso en X^*. En la proposición que sigue caracterizamos los subconjuntos normantes. Como es habitual en los libros de Análisis Funcional denotaremos por ω^* la topología $\sigma(X^*, X)$ débil* de X^*.

Proposición 4.1.7. *Dado un subconjunto B de B_{X^*}. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B es normante
(ii) Existe $\delta > 0$ tal que $\overline{co(\pm B)}^{\omega^*} \supset \delta B_{X^*}$.

Demostración. La implicación $(ii) \Rightarrow (i)$ es inmediata. Para la implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ razonamos como sigue. Sabemos por definición que

$$\delta := \inf_{x\in S(X)} \sup_{f\in B} |f(x)| > 0.$$

Procedamos por reducción al absurdo: supongamos que existe $x^* \in B_{X^*}$tal que $\delta x^* \notin \overline{co(\pm B)}^{\omega^*}$. Tendremos que $\delta x^* \notin \pm B$ y por lo tanto los conjuntos $\{\delta x^*\}$ y $\pm B$ son disjuntos. Por el teorema de separación de Hahn Banach, existen $x \in X$ con $\|x\| = 1$ y $\alpha > 0$ tales que $|(\delta x^*)(x)| > \alpha > |y^*(x)|$ para todo $y^* \in \pm B$. Tomando supremos a la derecha tendremos que

$$|(\delta x^*)(x)| > \alpha \geq \sup_{y^*\in B} |y^*(x)| \geq \delta,$$

donde la última desigualdad se obtiene de la definición de δ. Dividiendo entre δ tendremos que

$$|x^*(x)| > \alpha/\delta \geq 1.$$

Por otro lado tenemos que $1 = \|x^*\| \cdot \|x\| \geq |x^*(x)| > \alpha/\delta \geq 1$ lo que nos lleva a contradicción y con ello obtenemos que $\delta B_{X^*} \subset \overline{co(\pm B)}^{\omega^*}$. □

En la demostración del teorema central de la sección anterior utilizaremos que en los espacios de dimensión finita los subconjuntos acotados son relativamente compactos. También utilizaremos el resultado que sigue en un caso particular.

Proposición 4.1.8. *Sea (X,τ) un espacio vectorial topológico y sea A un subconjunto* ***Relativamente compacto*** *de X. Entonces A es* ***totalmente acotado****.*

Demostración. Sea A un subconjunto relativamente compacto de (X,τ), y sea V un entorno simétrico de cero. Sea $y \in \overline{A}$, tendremos entonces que $(y+V)\cap A = \emptyset$ y por lo tanto existe $x \in A$ tal que $y \in x+V$. De aquí deducimos que

$$\overline{A} \subset \bigcup_{x\in A}(x+V).$$

Teniendo en cuenta que $\overline{A}$ es un conjunto compacto tendremos que existe un conjunto finito $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\} \subset A$ de manera que $\overline{A} \subset \cup_{i=1}^{n}(x_i+V)$ y por lo tanto $A \subset \cup_{i=1}^{n}(x_i+V)$ con lo que queda demostrado que A es totalmente acotado. □

4.2. Espacios de Banach sin copias de c_0

Las definiciones y resultados anteriores son el punto de partida podemos probar el siguiente teorema que nos va a permitir mejorar el Teorema A de la introducción cuando sustituimos la bola dual por el conjunto de sus puntos extremales siempre y cuando el espacio de Banach no contiene una copia isomorfa de c_0. Usaremos aquí el *teorema de Kreim-Milman*, el *principio de Bauer*, el *teorema de Rainwater* y el *teorema de inversión de Milman*. En lo que sigue, los espacios vectoriales están definidos en el cuerpo de los números reales. En la demostración del siguiente teorema, dado un subconjunto A de X denotaremos $[A] = \overline{\text{span}\, A}$.

Teorema 4.2.1. *Sea X un espacio de Banach y sea Ext(B_{X^*}) el conjunto de puntos extremales de la bola unidad en X^*. Supongamos que Ext(B_{X^*})=$\cup_{n=1}^{\infty}B_n$ donde $\{B_n\}_n$ es una sucesión creciente de conjuntos* no-normantes. *Entonces el espacio X contiene un subespacio isomorfo a c_0.*

Recíprocamente, si X es separable y contiene un subespacio vectorial isomorfo a c_0, entonces existe en X una norma equivalente tal que el conjunto de puntos extremales de la bola unidad dual, es la unión de una sucesión creciente de conjuntos no-normantes (o también una sucesión creciente de conjuntos no-totales).

Demostración. Dado que cada B_n no es normante, tendremos que

$$\inf_{x\in S(X)} \sup_{f\in B_n} |f(x)| = 0.$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S(X)$ cumpliendo que

$$\sup_{f \in B_n} |f(x_n)| \leq 2^{-n}.$$

Veamos ahora que si $f \in$Ext(B_{X^*}) entonces

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0. \tag{4.1}$$

Como $f \in$Ext(B_{X^*}), existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $f \in B_m \subset B_n$ para todo $n \geq m$. Por construcción de la sucesión $\{x_n\}_n$ se tiene $|f(x_n)| \leq sup_{f \in B_n} |f(x_n)| \leq 2^{-n}$ para $n \geq m$ por lo que

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} |f(x_n)| \leq \lim_{n \to \infty} 2^{-n} = 0$$

y por lo tanto $\lim_n f(x_n) = 0$ con lo que queda probado (4.1).

El ***Teorema de Rainwater*** nos dice ahora que como para cada $f \in$Ext(B_{X^*}) se tiene que $\lim_n f(x_n) = 0$ entonces la sucesión $\{x_n\}_n$ converge débilmente a 0. Además la sucesión es normalizada ya que cada x_n está en la esfera unidad, para poder usar el *principio de selección de Bessaga-Pelczynski* y poder extraer una subsucesión básica, tenemos que demostrar que $\{x_n\}_n$ converge débilmente a 0; pero el Teorema de Rainwater nos asegura ahora que si para cada $f \in$Ext(B_{X^*}) se tiene que $\lim_n f(x_n) = 0$ entonces la sucesión $\{x_n\}_n$ converge débilmente a 0. Por lo tanto estamos en condiciones de aplicar el *principio de selección de Bessaga-Pelczynski* y poder sacar una subsucesión básica. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión $\{x_n\}_n$ es en sí misma básica.

Denotamos por $X_1 = [x_n]_{n=1}^{\infty}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $x_n^* : X_1 \to \mathbb{R}$ el funcional lineal y continuo dado por $x_n^*(\sum_n \lambda_n x_n) = \lambda_n$. Dicho funcional está bien definido ya que todo $x \in X_1$ se puede expresar de forma única como $x = \sum_n \lambda_n x_n$. Tendremos entonces que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n.$$

Denotemos ahora X_1^* el subespacio de X^* generado por $\{x_n^*\}_n$, es decir, $X_1^* = [x_n^*]_{n=1}^{\infty}$. Por definición de x_n^* tenemos que $\{x_n^*\}_n$ es un sistema dual de $\{x_n\}_n$. Definimos los espacios $E_n = [x_k]_{k=1}^{n}$(finito dimensional) y $E^n = [x_k]_{k=n+1}^{\infty}$. Sea ahora $S_n : X_1 \to E_n$ el funcional definido como

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^*(x) x_k$$

y $R_n : X_1 \to E^n$ el funcional definido como

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^*(x) x_k.$$

Tendremos que

$$x = S_n(x) + R_n(x).$$

Además, como los funcionales $x^*(x)$ son continuos, tendremos que cada $S_n(B_{X_1})$ está acotado y como $x = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ podemos aplica el teorema de Banach-Steinhaus y deducir que $C = sup_n \|S_n\| < \infty$.

Sea T la inmersión natural de X_1 en X. Podemos definir

$$T^* : X^* \to X_1^*$$

como

$$T^*(x^*) = x_{|X_1}.$$

Por el teorema de extensión de Hahn-Banach sabemos que T^* es sobreyectiva. Consideramos los conjuntos $A_n := T^*(B_n)$, tendremos que

$$T^*(ExtB_{X^*}) = T^*(\bigcup_n B_n) = \bigcup_n T^*(B_n) = \cup_n A_n.$$

Como T^* es sobreyectiva tendremos que $T^*(B_{X^*}) = B_{X_1^*}$. Sea $f \in Ext(B_{X_1^*})$, por el Lema 4.1.5 existe $g \in Ext(B_{X^*})$ de manera que $f = T^*(g)$, por lo que $g \in B_n$ par algún n. Por lo tanto $f \in T^*(B_n) = A_n \subset \bigcup_n A_n$. De aquí se deduce que

$$Ext(B_{X_1^*}) \subset \bigcup_n A_n.$$

Tomemos ahora un sucesión decreciente de números positivos $\{\varepsilon_n\}_n$ tendiendo a cero y $0 < \varepsilon_n < 1$.

AFIRMACIÓN.- Para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n tiene una $\varepsilon_n/2$-red finita, i.e. existe

$$N_n = \{f_1^n, f_2^n, \dots, f_{m_n}^n\}$$

en A_n de manera que $A_n \subset \cup_{i=1}^{l} B(a_i^n, \varepsilon_n/2)$.

Procedamos ahora a probar la afirmación. Veamos primero que fijando n te tiene que

$$sup\{|f(x_m)| : f \in A_n\} \leq 2^{-m} \; para \; m \geq n. \tag{4.2}$$

Si $f \in A_n = T^*(B_n)$ se tiene que existe $f^* \in B_n$ de manera que $f^*_{|_{X_1^*}} = f$. La sucesión $\{B_n\}_n$ es creciente por lo que si $f \in B_n$ entonces $f \in B_m$ para $m \geq n$. Tendremos entonces que

$$|f(x_m)| = |f^*(x_m)| \leq sup\{|f(x_m)| : f \in B_m\} \leq 2^{-m} \; para \; m \geq n$$

con lo que queda probado (4.2). De aquí se deduce

$$\begin{aligned}
\sup\{|f(x)| : f \in A_n, x \in S(E^m)\} &\leq \sup\{\sum_{j=m+1}^{\infty} |x_j^*(x)| \cdot |f(x_j)| : f \in A_n, x \in S(E^m)\} \\
&\leq \sup\{\sum_{j=m+1}^{\infty} |x_j^*(x)| \cdot 2^{-j} : x \in S(E^m)\} \\
&= \sup\{\sum_{j=m+1}^{\infty} \|x_j^*(x)x_j\| \cdot 2^{-j} : x \in S(E^m)\} \\
&\leq \sup\{\sum_{j=m+1}^{\infty} (\|S_j(x)\| + \|S_{j-1}(x)\|) \cdot 2^{-j} : x \in S(E^m)\} \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} (\|S_j\| + \|S_{j-1}\|) \cdot 2^{-j} \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} (C + C) \cdot 2^{-j} = C \sum_{j=m+1}^{\infty} 2^{-j+1} = \frac{C}{2^{m-1}}
\end{aligned}$$

que tiende a cero si m tiende a infinito, de donde se deduce que para $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in E^m} \sup_{f \in A_n} \{|f(x)|\} \leq \frac{\varepsilon_n}{8(1+C)}. \tag{4.3}$$

Vamos a ver ahora que para cada A_n existe una familia finita de funcionales

$$N_n = \{f_q^n\}_{q=1}^{m_n} \subset A_n$$

de manera que la familia $\{f_q^n \,|_{E_n}\}_{q=1}^{m_n}$ es una $\varepsilon/4C$-red para $A_n|_{E_n}$.

Como E_n es finito dimensional también lo es E_n^*. Como $B_n \subset B_{X^*}$ es un conjunto acotado y $A_n = T^*(B_n)$ tendremos que $A_n \,|_{E_n}$ es relativamente compacto así que por la Proposición 4.1.8 también totalmente acotado. Así que para $\varepsilon_n/4C$ existen

$$\widetilde{f_1^n}, \widetilde{f_2^n}, \ldots, \widetilde{f_{m_n}^n} \in A_n \,|_{E_n}$$

tales que

$$A_n \,|_{E_n} \subset \cup_{i=1}^{m_n} B(\widetilde{f_i^n}, \varepsilon_n/4C).$$

Para cada $\widetilde{f_i^n}$ existe $f_i^n \in A_n$ tal que $f_i^n |_{E_n} = \widetilde{f_i^n}$. Sea $N_n = \{f_1^n \ldots, f_{m_n}^n\} \subset A_n$, vamos a ver que efectivamente $\{f_q^n |_{E_n}\}_{q=1}^{m_n}$ es una $\varepsilon_n/2$-red para A_n:

Sea $f \in A_n$ y denotemos $\widetilde{f} = f |_{E_n} \in A_n |_{E_n}$. Existe $\widetilde{f_i^n}$ de manera que $\|\widetilde{f} - \widetilde{f_i^n}\| \leq \frac{\varepsilon_n}{4C}$, es decir

$$\sup_{x \in S(E_n)} \{|(\widetilde{f} - \widetilde{f_i^n})(x)|\} \leq \frac{\varepsilon_n}{4C}$$

y por tanto

$$\sup_{x \in S(E_n)} \{|(f - f_i^n)(x)|\} \leq \frac{\varepsilon_n}{4C} \tag{4.4}$$

con lo que queda demostrado que $\{f_q^n |_{E_n}\}_{q=1}^{m_n}$ es una $\varepsilon_n/2$-red para A_n. Para terminar la prueba de la afirmación veamos ahora que N_n es una $\varepsilon_n/2$-red de A_n. Por lo que acabamos de ver, dado $f \in A_n$ podemos tomar $f_i^n \in N_n$ cumpliendo (4.4). Nos basta con demostrar que $\|f - f_i^n\| \leq \varepsilon_n/2$. Por un lado tendremos que

$$\begin{aligned}
\|f - f_i^n\| &= \sup_{x \in S(X_1)} \{|(f - f_i^n)(x)|\} \\
&= \sup_{x \in S(X_1)} \{|(f - f_i^n)(S_n(x) + R_n(x)|\} \\
&\leq \sup_{x \in S(X_1)} \{|(f - f_i^n)(S_n(x))|\} + \sup_{x \in S(X_1)} \{|f(R_n(x))|\} + \sup_{x \in S(X_1)} \{|f_i^n(R_n(x))|\}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Acotemos ahora cada sumando del miembro de la derecha de la desigualdad anterior. Si $x \in S(X_1)$ tendremos que $S_n(x) = y_n(x)\|S_n(x)\|$ con $y_n(x) \in S(E_n)$. Teniendo en cuenta ahora que $\|S_n\| \leq C$ tendremos que

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in S(X_1)} |(f - f_i^n)(S_n(x))| &= \sup_{x \in S(X_1)} |(f - f_i^n)(y_n(x))| \|S_n(x)\| \\
&\leq C \sup_{x \in S(X_1)} |(f - f_i^n)(y_n(x))| \\
&\leq C \sup_{x \in S(E_n)} |(f - f_i^n)(x)| \overset{(4.4)}{\leq} C \cdot \frac{\varepsilon_n}{4C} = \frac{\varepsilon_n}{4}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Acotemos ahora el segundo sumando. Si $x \in S(X_1)$ tendremos que $R_n(x) = y_n(x)\|R_n(x)\|$ para algún $y_n(x) \in S_{E_n}$. Por otro lado tendremos que

$$\|R_n(x)\| = \|x - S_n(x)\| \leq \|x\| + \|S_n(x)\| \leq 1 + C$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S(X_1)}|f(R_n(x))| &= \sup_{x\in S(X_1)}|f(y_n(x))|\|R_n(x)\| \\ &\le (1+C)\sup_{x\in S(X_1)}|f(y_n(x))| \le (1+C)\sup_{x\in S(E_n)}|f(x)| \\ &\le (1+C)\sup_{x\in S(E_n)}\sup_{f\in A_n}|f(x)| \overset{(4.3)}{\le} (1+C)\frac{\varepsilon_n}{8(1+C)} = \frac{\varepsilon_n}{8}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Acotemos finalmente el tercer sumando. De forma similar a como hemos razonado con el sumando tendremos

$$\begin{aligned}\sup_{x\in S(X_1)}|f_i^n(R_m)(x)| &\le (1+C)\sup_{x\in S(X_1)}|f_i^n(y_n(x))| \\ &\le (1+C)\sup_{x\in S(E_n)}\sup_{f\in A_n}|f(x)| \\ &\overset{(4.3)}{\le} (1+C)\frac{\varepsilon_n}{8(1+C)} = \frac{\varepsilon_n}{8}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Finalmente combinando (4.5) con (4.6),(4.7) y (4.8) tendremos que

$$\|f-f_i^n\| \le \frac{\varepsilon_n}{2}$$

con lo que la afirmación queda probada.

Denotemos

$$V^* := \overline{co\bigcup_n \pm(1+\varepsilon_n)N_n}^{\omega^*}.$$

Definamos una nueva norma en X_1, que denotaremos por $|||\cdot|||$ como

$$|||x||| := \sup\{|f(x)| : f\in V^*\}.$$

Veamos que $|||\cdot|||$ es equivalente a $\|\cdot\|$:

Sea $x\in X_1$ tal que $|||x|||\le 1$ y tomemos $f\in ExtB^*_{X_1}$. Tendremos entonces que existe $n\in\mathbb{N}$ y $f_i^n\in N_n$ tales que $\|f-f_i^n\|\le\varepsilon_n/2$. Observemos que $|(1+\varepsilon_n)f_i^n(x)|\le 1$ ya que $|||x|||\le 1$. Por lo tanto

$$|f(x)| \le |f_i^n(x)| + \frac{\varepsilon_n}{2}\|x\| \le \frac{1}{1+\varepsilon_n} + \frac{\varepsilon_n}{2}\|x\|.$$

Tomando supremos en $ExtB_{X^*}$ la desigualdad anterior nos da

$$\|x\| \leq \frac{1}{1+\varepsilon_n} + \frac{\varepsilon_n}{2}\|x\|.$$

De lo anterior se sigue que

$$\|x\| \leq \frac{2}{2+\varepsilon_n - \varepsilon_n^2} \leq 1$$

donde la última desigualdad se da porque $0 \leq \varepsilon_n \leq 1$. Con esto queda demostrado que $\|x\| \leq |||x|||$ para todo $x \in X_1$. Por otro lado

$$\begin{aligned}|||x||| &= \sup\{|f(x)| : f \in V^*\} = \sup\{|f(x)| : f \in \bigcup_n \pm(1+\varepsilon_n)N_n\} \\ &\leq \sup\{|f(x)| : f \in \bigcup_n \pm(1+\varepsilon_1)N_n\} \leq \sup\{|f(x)| : f \in (1+\varepsilon_1)B_{X_1^*}\} = (1+\varepsilon_1)\|x\|.\end{aligned}$$

Así que

$$\|x\| \leq |||x||| \leq (1+\varepsilon_1)\|x\|$$

por lo que ambas normas son equivalentes.

Con el ***Teorema de inversión de Milman*** obtenemos que

$$ExtV^* \subset \overline{\cup_n \pm (1+\varepsilon_n)N_n}^{\omega^*}.$$

Vamos a demostrar que de hecho

$$ExtV^* \subset \cup_n \pm (1+\varepsilon_m)N_n :$$

Sea $h \in \overline{\cup_n \pm (1+\varepsilon_m)N_n}^{w^*} \setminus \cup_n \pm(1+\varepsilon_m)N_n$. Existe una sucesión $\{f_n\}_n \subset \cup_n \pm (1+\varepsilon_m)N_n$ de manera que converge h. Observemos que la sucesión no puede tener infinitos términos en ningún $\pm(1+\varepsilon_m)N_n$ ya que en caso contrario, su w^*-límite estaría en dicho conjunto lo que es imposible. Por lo tanto existe una sucesión $\{n_k\}$ creciente de enteros y una subsucesión $\{g_k\}_k$ de $\{f_k\}_k$ tal que $g_k \in \pm(1+\varepsilon_{n_k})N_{n_k}$. Por lo tanto

$$\|h\| = \lim_n \|f_n\| = \lim_k \|g_k\| \leq \lim_k (1+\varepsilon_{n_k}) = 1,$$

es decir, $h \in B_{X_1^*}$.

Supongamos ahora además que $h \in ExtV^*$, como $h \in B_{X_1^*} \subset V^*$ por el Lema 4.1.5 aplicado a la identidad en X_1 y $M = B_{X_1^*}$ obtenemos que h es un punto extremal de $B_{X_1^*}$.

Ahora bien, $ExtB_{X_1^*} \subset \cup_n A_n$ así que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h \in A_n$, y por tanto existirá un funcional $f_q^n \in A_n$ tal que $\|h - f_q^n\| \leq \frac{\varepsilon_n}{2}$. Por el teorema de extensión de Hahn-Banach, existe un funcional $F \in S(X_1, \|\cdot\|)^{**}$ de manera que $F(h) = 1$ y de aquí se sigue que

$$\begin{aligned} F((1+\varepsilon_n)f_q^n) &= (1+\varepsilon_n)F(f_q^n) = (1+\varepsilon_n)(F(h) - F(h - f_q^n)) \\ &\geq (1+\varepsilon_n)(1 - \|F\| \cdot \|h - f_q^n\|) \geq (1+\varepsilon_n)(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}) > 1. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $|||(1+\varepsilon_n)f_q^n||| \geq \|(1+\varepsilon_n)f_q^n\| > 1$ pero $(1+\varepsilon_n)f_q^n \in V^* \subset B_{(X_1,|||\cdot|||)^*}$ por lo que se llega a una contradicción.

Por lo tanto se deduce que $ExtV^* \subset \cup_n \pm (1+\varepsilon_m)N_n$ así que sólo tiene una cantidad numerable de puntos. Por otro lado, se tiene que $B_{(X,|||\cdot|||)^*} = \overline{V^*}^{w^*}$ por lo que $B_{(X,|||\cdot|||)^*}$ sólo tiene una cantidad numerable de puntos extremales. Por el Teorema de Fonf, [11, Theorem 12, p. 164] se concluye que $X \supset c_0$.

Recíprocamente, si X es separable contiene un subespacio Y isomorfo a c_0, entonces c_0 es complementado en X gracias al Teorema de Sobczyk, [11, Theorem 4, p. 71] entonces $X = Y + Z$. Definimos una norma en X de la manera siguiente:

$$|||x||| = \max\{\|y\|_1, \|z\|\}$$

donde $x = y + z$ con $y \in Y, z \in Z$ y donde $\|\cdot\|_1$ denota la norma en Y. Se comprueba que $ExtB_{(X,|||\cdot|||)^*} = ExtB_{Z^*} \cup \{\pm e_n\}_n$ donde $\{e_n\}$ es la base natural de $\ell_1 = c_0^*$, y por tanto $B_{(X,|||\cdot|||)^*} = \cup_n (ExtB_{Z^*} \cup \{e_i\}_{i=1}^n)$ que son conjuntos no totales $\square$

4.3. El teorema de Banach-Mackey para puntos extremales

Acabamos esta memoria utilizando el Teorema 4.2.1 para demostrar la siguiente mejora del Teorema A.

Corolario 4.3.1. *Sea X un espacio de Banach que no contiene un subespacio isomorfo a c_0 y $A \subset X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $x^*(A)$ está acotado para todo $x^* \in ExtB_{X^*}$.

(ii) A es acotado en norma.

Demostración. Sólo tenemos que demostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$, lo que hacemos por reducción al absurdo. Razonamos ahora como hicimos en la prueba del Teorema A en la página 73. Para cada número natural m formamos el conjunto

$$B_m = \{x^* \in ExtB_{X^*} : \sup_{x \in A} |x^*(x)| \leq m\}.$$

La sucesión $\{B_n\}_n$ es creciente y gracias a (i) se tiene que

$$ExtB_{X^*} = \bigcup_n B_n.$$

Como $X \not\supseteq c_0$, por Teorema 4.2.1 tenemos que existe un q de manera que B_q es normante, por la Proposición 4.1.7 existe $\delta > 0$ de manera que $\overline{co \pm B_q}^{\omega^*} \supset \delta B_{X^*}$. Para cada $x \in X$ se tiene

$$\sup\{|x^*(x)| : x^* \in \overline{co \pm B_q}^{\omega^*}\} = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B_q\}.$$

Así para todo $x^* \in B_{X^*}$ tenemos que

$$|x^*(x)| \leq \frac{1}{\delta} \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B_q\}.$$

Al tomar supremos en $x \in A$ se obtiene

$$\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in A} \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| \leq \frac{1}{\delta} \sup_{x \in A} \sup_{x^* \in B_q} |x^*(x)| \leq \frac{q}{\delta}.$$

y así queda terminada la demostración. $\square$

La siguiente proposición pone de manifiesto que dentro de la clase de espacios de Banach separables la equivalencia $(i) \Leftrightarrow (ii)$ caracteriza a aquellos que no contienen a c_0.

Proposición 4.3.2. *Si X es un espacio de Banach separable y $X \supset c_0$, existe una sucesión $\{x_n\}_n$ no acotada, pero que para todo $x^* \in ExtB_{X^*}$ la sucesión $\{x^*(x_n)\}_n$ si lo está.*

Demostración. Si X es separable y $X \supset c_0$, el Teorema de Sobczyk, [11, Theorem 4, p. 71] nos asegura que $X = Y + c_0$, introducimos la norma

$$|||x||| := \max\{\|y\|, \|z\|\} \text{ con } x = y + z,\ y \in Y, z \in c_0$$

Con esta norma $ExtB_{X^*} = ExtB_{Y^*} \cup \{e_n\}_n$ donde $\{e_n\}_n$ es la base natural para $\ell_1 = c_0^*$. Denotando por $\{u_n\}_n$ la base natural de c_0, podemos construir la sucesión $\{x_n\}_n$ como $x_n := nu_n$ cumpliendo $\text{lím}_n \|x_n\| = \infty$ y sin embargo para todo $x^* \in ExtB_{X^*}$ se tiene que $\sup_n\{x^*(x_n)\} < \infty$. $\square$

Terminamos con la siguiente mejora del teorema de Rainwater para espacios de Banach sin copias de c_0.

Teorema 4.3.3. *Sea X un espacio de Banach que no contiene a c_0. Si $(x_n)_n$ es una sucesión en X, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $x^*(x_n) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *para cada* $x^* \in B_{X^*}$.

(ii) $x^*(x_n) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$ *para cada* $x^* \in Ext(B_{X^*})$.

Demostración. Sólo tenemos que demostrar que $(ii) \Rightarrow (i)$ lo que se sigue del clásico Teorema de Rainwater teniendo en cuenta que $(x_n)_n$ es acotada en norma gracias a que la hipótesis $X \not\supset c_0$ hace que podamos utilizar el Corolario 4.3.1. $\square$

El artículo de Fonf [16] y el capítulo IX del libro de Diestel [11] son dos buenas fuentes donde se recogen distintas aplicaciones del Teorema 4.2.1.

Bibliografía

[1] S. Banach, *Théorie des óperations linéaires*, Chelsea Publishing Co., New York, 1955. MR 17,175h

[2] G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), no. 2, 357–378. MR 1 501 815

[3] P. Pérez Carreras and J. Bonet, *Barrelled locally convex spaces*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 131, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 113. MR 88j:46003

[4] B. Cascales and J. M. Mira, *Análisis funcional*, Colección Texto-Guía, Diego Marín Librero-editor, 2002. MR 25#2507

[5] B. Cascales and S. Troyanski, *Fundamentos de análisis funcional*, Curso de Doctorado, Universidad de Murcia, 2004.

[6] R. Cauty, *Solution du probleme de point fixed de schauder*, Fundamenta Mathematica **170** (2001), 16.

[7] B. S. Cirel′son, *It is impossible to imbed* 1_p *of* c_0 *into an arbitrary Banach space*, Funkcional. Anal. i Priložen. **8** (1974), no. 2, 57–60. MR MR0350378 (50 #2871)

[8] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1985. MR 86h:46001

[9] S. Díaz, A. Fernández, M. Florencio, and P. J. Paúl, *A wide class of ultrabornological spaces of measurable functions*, J. Math. Anal. Appl. **190** (1995), no. 3, 697–713. MR 1318592 (96a:46073)

[10] J. Diestel, *An elementary characterization of absolutely summing operators*, Math. Ann. **196** (1972), 101–105. MR 0306956 (46 #6077)

[11] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 92, Springer-Verlag, New York, 1984. MR MR737004 (85i:46020)

[12] L. Drewnowski, M. Florencio, and P. J. Paúl, *The space of Pettis integrable functions is barrelled*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), no. 3, 687–694. MR 1107271 (92f:46045)

[13] R.E. Edward, *Functional analysis, theory and applications*, Dover book in Mathematics, Dover publications, INC-New York, 1995. MR 94-20873

[14] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Math. **130** (1973), 309–317. MR MR0402468 (53 #6288)

[15] R. Engelking, *General topology*, PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977, Translated from the Polish by the author, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60]. MR 58 #18316b

[16] V. P. Fonf, *Weakly extremal properties of Banach spaces*, Mat. Zametki **45** (1989), no. 6, 83–92, 112. MR MR1019040 (90k:46032)

[17] W. T. Gowers, *A Banach space not containing* c_0, l_1 *or a reflexive subspace*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), no. 1, 407–420. MR MR1250820 (94j:46024)

[18] W. T. Gowers, *A solution to Banach's hyperplane problem*, Bull. London Math. Soc. **26** (1994), no. 6, 523–530. MR 96a:46025

[19] W. T. Gowers, *A new dichotomy for Banach spaces*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 6, 1083–1093. MR MR1421876 (97m:46017)

[20] W. T. Gowers and B. Maurey, *The unconditional basic sequence problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), no. 4, 851–874. MR 94k:46021

[21] F. Hirsch and G. Lacombe, *Elements of functional analysis*, Graduate Text in Mathematics, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1999. MR 98 #5247

[22] Samuel S. Holland, Jr., *A Hilbert space proof of the Banach-Steinhaus theorem*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 40–41. MR MR0239403 (39 #760)

[23] R. C. James, *Weakly compact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **113** (1964), 129–140. MR 29 #2628

[24] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London, 1974. MR 57 #3828

[25] L. Janicka and N. J. Kalton, *Vector measures of infinite variation*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **25** (1977), no. 3, 239–241. MR 0444889 (56 #3235)

[26] H. Jarchow, *Locally convex spaces*, Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner, stuttgart, 1981. MR 3-519-02224-9

[27] L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Functional analysis*, second ed., Pergamon Press, Oxford, 1982, Translated from the Russian by Howard L. Silcock. MR MR664597 (83h:46002)

[28] J. L. Kelley, *General topology*, Springer-Verlag, New York, 1975, Reprint of the 1955 edition [Van Nostrand, Toronto, Ont.], Graduate Texts in Mathematics, No. 27. MR 51 #6681

[29] G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 40 #1750

[30] J.-L. Krivine and B. Maurey, *Espaces de Banach stables*, Israel J. Math. **39** (1981), no. 4, 273–295. MR MR636897 (83a:46030)

[31] B. V. Limaye, *Functional analysis*, Wiley Eastern Ltd., New Delhi, 1981. MR 83b:46001

[32] R. D. Mauldin (ed.), *The Scottish Book*, Birkhäuser Boston, Mass., 1981, Mathematics from the Scottish Café, Including selected papers presented at the Scottish Book Conference held at North Texas State University, Denton, Tex., May 1979. MR MR666400 (84m:00015)

[33] Univesity of Sant Andrews, *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk*, 2005.

[34] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), no. 2, 277–304. MR 1 501 970

[35] J. Rodríguez, *Integración en espacios de banach*, Ph.D. thesis, Universidad de Murcia, 2006.

[36] J. Rodríguez, *Absolutely summing operators and integration of vector-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **316** (2006), no. 2, 579–600. MR 2207332 (2006k:46064)

[37] T. Schlumprecht, *An arbitrarily distortable Banach space*, Israel J. Math. **76** (1991), no. 1-2, 81–95. MR MR1177333 (93h:46023)

[38] G. E. F. Thomas, *Totally summable functions with values in locally convex spaces*, Measure theory (Proc. Conf., Oberwolfach, 1975), Springer, Berlin, 1976, pp. 117–131. Lecture Notes in Math., Vol. 541. MR 0450505 (56 #8799)

[39] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), no. 3, 247–262. MR 82i:57016

[40] M. Valdivia, *Topics in locally convex spaces*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 67, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 85. MR 84i:46007

[41] ______, *Quasi-LB-spaces*, J. London Math. Soc. (2) **35** (1987), no. 1, 149–168. MR 88b:46012

Glosario

C

coincidencia de clausuras para topologías compatibles Sean E un espacio vectorial y τ y ν dos topologías localmente convexas separadas en E tales que $(E[\tau])' = (E[\nu])'$. Entonces los conjuntos convexos $\tau-$cerrados y $\nu-$cerrados son los mismos., pág. 42.

E

espacio de Fréchet Un espacio vectorial topológico localmente convexo que sea metrizable y completo, pág. 35.

Espacio de Hilbert Un espacio dotado de un producto escalar no degenerado, que como espacio vectorial normado con la norma asociada a dicho producto, es completo., pág. 16.

espacios localmente convexos Un espacio localmente convexo es un espacio vectorial topológico cuya topología tiene una base de entornos del origen formada por conjuntos convexos., pág. 33.

F

fórmula de Cauchy Sea f una función holomorfa en un conjunto A abierto del plano complejo y sea γ un camino cerrado de clase C^1 a trozos cuya imagen Γ está contenida en A y que es A-homólogo a 0. Si $z_0 \in A$, $z_0 \notin \Gamma$, se tiene que $f(z_0)n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$., pág. 57.

fuertemente medible El límite en casi todo punto de una sucesión de funciones simples., pág. 71.

L

Lema de Zorn Sea A un conjunto con orden parcial tal que cada subconjunto B de A totalmente ordenado tiene un elemento maximal. Entonces A tiene, al menos, un elemento maximal, pág. 76.

P

Principio de Bauer Sea (E,τ) un espacio localmente convexo y $K \subset E$ un conjunto convexo compacto no vacío. Supongamos que $f : K \to \mathbb{R}$ es una función convexa y superiormente semicontinua. Entonces, existe un punto extremal de K (no necesariamente único) en el que f alcanza el supremo., pág. 75.

Principo de seleción de Bessaga-Pelczynski Sea $\{x_n\}$ una sucesión normalizada, nula en la topología débil, del espacio de Banach X. Entonces $\{x_n\}$ admite una sucesión básica., pág. v.

R

Relativamente compacto Un conjunto A de un espacio topológico (X,τ) es relativamente compacto si $\overline{A}$ es compacto., pág. 78.

T

teorema de caracterización de espacios localmente convexos Sea $E[\mathscr{T}]$ un espacio vectorial topológico. La topología $\mathscr{T}$ está asociada a una familia de seminormas si y sólo si, $E[\mathscr{T}]$ es un espacio localmente convexo., pág. 35.

Teorema de inversión de Milman Sea K un subconjunto compacto de E. Si K es la envoltura convexa cerrada de un conjunto X, entonces los puntos extremales de K pertenecen a $\overline{X}$, pág. v.

Teorema de Krein-Milman Sean $E[\tau]$ un espacio localmente compacto y $K \subset E$ un conjunto compacto y convexo. Entonces K es la envoltura convexa y cerrada del conjunto de sus puntos extremales., pág. V.

Teorema de Rainwater Si una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ cumple que $f(x_n)$ converge a 0 para cada $f \in ExtB_X^*$ entonces $\{x_n\}$ converge débilmente a 0, pág. V.

Teorema de representación de Riesz Si $L : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal, entonces existe un único vector h_0 en $\mathcal{H}$ tal que $L(h) =< h, h_0 >$ para todo $h \in \mathcal{H}$. Además $||L|| = ||h_0||$, pág. 16.

teorema de Tychonoff El producto de espacios compactos es compacto, pág. 49.

teorema del bipolar Sean $< F, G >$ un par dual y $A \subset E$ un subconjunto. Entonces $A^{\circ\circ}$ el la envoltura absolutamente convexa $\sigma(F, G)-$cerrada de A ., pág. 42.

totalmente acotado Un conjunto A de un espacio topológico (X, τ) es totalmente acotado (o precompacto) si para todo entorno V de 0, existe un colección finita $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en X de manera que $X \subset \cup_{k=1}^n x_k + V$., pág. 78.

U

ultrafiltros Sea X un conjunto y sea $\mathscr{F} \in \wp(X)$. Diremos que $\mathscr{F}$ es un filtro si:
(i) $\emptyset \notin \mathscr{F}$
(ii) Si $A \in \wp(X)$ y contiene a algún elemento de $\mathscr{F}$ entonces $A \in \mathscr{F}$
(iii) Si $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$
La familia de filtros de un conjunto X está parcialmente ordenada por inclusión, luego se tiene un elemento maximal, que llamaremos ultrafiltro, pág. 13.

Índice alfabético

U