## 1.4. Ejercicios

### Resueltos

**1.4.1** *El número combinatorio* $\binom{n}{m}$ *se define mediante la fórmula*

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}, \qquad \text{donde } n, m \in \mathbb{N} \text{ y } 0 < m \leq n$$

*siendo* $m! = m(m-1)(m-2)\dots 1$*. Así pues, en la fracción que define* $\binom{n}{m}$ *tanto el numerador como el denominador tienen* $m$ *factores; en el denominador el primer factor es* $m$ *y va decreciendo cada vez una unidad, por lo que el último es 1, mientras que en el numerador empiezan en* $n$ *y van decreciendo cada vez una unidad, con lo que el último es* $n - m + 1$*.*

*(1) Demuestre que*

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \text{ para } 0 < m < n.$$

*Por conveniencia, para que la segunda fórmula sea válida también para* $m = 0$*, se define*

$$\binom{n}{0} = 1.$$

*(2) Demuestre que*

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

*(3) Demuestre la fórmula del binomio de Newton:*

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

*siendo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $a, b \in \mathbb{K}$*.*

*(4) Aplicando la fórmula anterior, deduzca las igualdades:*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n, \qquad \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

SOLUCIÓN:

(1) Es claro que

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} = 1 \quad \text{[el numerador tiene } n \text{ factores].}$$

Su pongamos ahora $0 < m < n$ entonces

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \binom{n}{n-m}\end{aligned}$$

(2) Se obtiene como consecuencia de la siguiente cadena de igualdades.

$$\begin{aligned}&\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(m+1)+1)}{(m+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(m+1)}{(m+1)!} \text{ [reduc. común denom.]} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)(n-m)}{(m+1)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(m+1)!}(n+1) \text{ [sacar factor común]} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{(m+1)!} \text{ [} m+1 \text{ factores]} \\ &= \binom{n+1}{m+1}\end{aligned}$$

(3) La fórmula del binomio de Newton se demuestra por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$. Comencemos por ver el significado del sumatorio.

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \binom{n}{0} a^0 b^n + \binom{n}{1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^n b^0$$

Para $n = 1$ la fórmula significa

$$(a+b)^1 = \sum_{j=0}^{1} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b + a$$

y por tanto es cierta.

Aplicando el procedimiento de inducción supongamos que la fórmula también es cierta para $n$, es decir que se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \quad \text{siendo } n \in \mathbb{N} \text{ y } a, b \in \mathbb{K}.$$

Vamos a demostrar, apoyándonos en la fórmula para $n$ (hipótesis de inducción) y haciendo algunos cálculos que la fórmula también es cierta para $n+1$.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \text{ [hipótesis inducción]}\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}\right)(a+b) \text{ [distributiva]}\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j+1} \text{ [desarrollando]}\\
&= \binom{n}{0} a^1 b^n + \binom{n}{1} a^2 b^{n-1} + \binom{n}{2} a^3 b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 +\\
&+ \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n}{1} a^1 b^n + \binom{n}{2} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n} a^n b^1 =\\
&\qquad \text{[agrupando los de igual potencia]}\\
&= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} +\\
&+ \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a^1 b^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^2 b^{n-1} + \dots\\
&+ \cdots + \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b^1 +\\
&+ \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 \text{ [propiedades de los núm. combinatorios]}\\
&= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^1 b^n + \cdots + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0\\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j}
\end{aligned}$$

Lo que prueba que la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

es cierta también para $n+1$ y, en consecuencia, aplicando el principio de inducción, es cierta para cualquier número natural $n$.

Por otra parte

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b^j a^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

lo cual prueba la segunda versión de la fórmula que aparece en el enunciado.

(4) Si en la fórmula

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

hacemos $a = b = 1$ obtenemos

$$2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$$

y si hacemos $a = 1$ y $b = -1$ obtenemos

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0.$$

¡Se acabó! □

**1.4.2** *Sean $A$ y $B$ subconjuntos acotados de números reales estrictamente positivos tales que* $\inf B > 0$*.*

*(1) Sea $1/B := \{1/b; b \in B\}$. Pruebe que $1/B$ está acotado superiormente y que* $\sup(1/B) = 1/(\inf B)$*.*

*(2) Sea $A/B := \{a/b; a \in A\ b \in B\}$. Pruebe que $A/B$ está acotado superiormente. ¿Cual es el supremo de $A/B$? Justifíquelo.*

Solución: Pongamos $\beta := \inf B > 0$. De acuerdo con la definición de ínfimo eso equivale a

- $b \geq \beta$ para todo $b \in B$ ($\beta$ es cota inferior de $B$)
- si para algún $\beta'$ se cumple que $b \geq \beta'$ para todo $b \in B$, entonces necesariamente es $\beta' \leq \beta$ ($\beta$ es la cota inferior más grande para $B$).

Los supremos vienen caracterizados de forma enteramente análoga cambiando el sentido de las desigualdades.

(1) Pero si $b \geq \beta > 0$ entonces $1/b \leq 1/\beta$ para todo $b \in B$; lo que significa que $1/\beta$ es cota superior del conjunto $1/B$. Vamos a probar que esa cota es la más pequeña entre las cotas superiores de $1/B$, y de ese

modo habremos probado, de acuerdo con la definición de supremo, que $1/\beta$ es el supremo de $1/B$.

Para demostrar esto último procederemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que existiera una cota superior para $1/B$ que llamamos $\alpha$ que cumpla $\alpha < 1/\beta$. Entonces para todo $b$ se tendría

$$1/b \leq \alpha < 1/\beta$$

de donde se obtiene que

$$b \geq 1/\alpha > \beta, \text{ para todo } b \in B$$

y habríamos obtenido así una cota inferior $\beta' = 1/\alpha > \beta$, lo cual contradice la definición de $\beta$ como ínfimo de $B$.

(2) Un instante de reflexión muestra que el cociente $a/b$ crece si aumentamos $a$ o disminuimos $b$ (o ambas cosas). Esto nos lleva a la conjetura de que el supremo del conjunto $A/B$ debe ser $\sup A / \inf B$. Vamos a demostrar que eso es lo que ocurre.

Pongamos $\alpha = \sup A$. Entonces

$$a \leq \alpha \text{ para todo } a \in A; \qquad b \geq \beta \text{ para todo } b \in B$$

por tanto

$$\frac{a}{b} \leq \frac{\alpha}{\beta}, \quad a \in A, b \in B$$

lo que significa que $\alpha/\beta$ es cota superior de $A/B$.

Necesitamos probar ahora que es la mínima. Para probarlo utilizaremos de nuevo reducción al absurdo, suponiendo que hay una cota superior $\gamma < \alpha/\beta$ de $A/B$, siendo necesariamente $\gamma > 0$ (¿por qué?). Entonces se tendría

$$a/b \leq \gamma \quad \text{equivalentemente} \quad a \leq b\gamma \quad a \in A, b \in B.$$

Si tomamos un valor fijo para $b \in B$, pero arbitrario, entonces la ecuación anterior puede interpretarse como que $b\gamma$ es una cota superior de $A$ ya que la acotación es cierta para todos los $a \in A$ y utilizando la definición de supremo eso implica que

$$\alpha \leq b\gamma \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\alpha}{\gamma} \leq b.$$

Donde $b$ ha estado fijo en el razonamiento anterior, pero puede ser cualquiera, lo cual permite interpretar $\alpha/\gamma$ como una cota inferior de $B$, pero acudiendo a la definición de ínfimo ello obliga a que

$$\frac{\alpha}{\gamma} \leq \beta \quad \text{equivalentemente} \quad \frac{\alpha}{\beta} \leq \gamma$$

en contra de lo que habíamos supuesto.

Con esto la conjetura está demostrada y el ejercicio acabado. $\square$

**1.4.3** *Se dice que un subconjunto $T$ de números reales es denso*[2] *en $\mathbb{R}$ cuando, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe un $t \in T$ tal que $x < t < y$.*

*Sea $C \subset \mathbb{R}$ un subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ (es decir, si $x, y \in C$ entonces $x - y \in C$), $C \neq \{0\}$. Pruebe que entonces:*

*(1) o bien existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $C = \alpha\mathbb{Z} := \{\alpha n : n \in \mathbb{Z}\}$,*

*(2) o bien $C$ es denso en $\mathbb{R}$.*

SOLUCIÓN: Sea $C^+ = \{x \in C : x > 0\}$. $C^+$ es no vacío y acotado inferiormente, por tanto podemos considerar $\alpha = \inf C^+$.

Ahora probemos que si $\alpha > 0$ entonces $C = \alpha\mathbb{Z}$. Para ello, en primer lugar, probemos que $\alpha \in C^+$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Según el ejercicio 9, existe $x_1 \in C^+$ tal que $\alpha \leq x_1 < \alpha + \varepsilon$, pero razonando por reducción al absurdo, si $\alpha \notin C^+$, entonces realmente $\alpha < x_1 < \alpha + \varepsilon$. De la misma forma, tomando $\delta$ tal que $\alpha + \delta < x_1$, existe $x_2 \in C^+$ tal que $\alpha < x_2 < \alpha + \delta < x_1 < \alpha + \varepsilon$. Por tanto,

$$0 < x_1 - x_2 < \varepsilon$$

y $x_2 - x_1 \in C^+$ por ser positivo y ser $C$ un subgrupo. Así hemos probado que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $c \in C^+$ tal que $0 < c < \varepsilon$, es decir, que $\inf C^+ = 0$, que es una contradicción.

Una vez probado que $\alpha \in C$, por ser $C$ subgrupo, tenemos que $\alpha\mathbb{Z} \subset C$. Ahora debemos probar la igualdad. Supongamos que $\alpha\mathbb{Z}$ está estrictamente contenido en $C$, es decir, existe $c \in C \setminus \alpha\mathbb{Z}$. Utilizando la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\alpha < c < (n+1)\alpha$ (para ello debemos recurrir también a la existencia de primer elemento de todo subconjunto de $\mathbb{N}$). Entonces $0 < c - n\alpha < \alpha$ y $c - n\alpha \in C^+$, lo que contradice la definición de $\alpha$.

Si $\alpha = 0$ entonces debemos probar que $C$ es denso en $\mathbb{R}$. Para ello, sean $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Puesto que $\alpha = 0$ existe $c \in C^+$ tal que $0 < c < y - x$. Recurriendo al argumento ya utilizado, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nc < y \leq (n+1)c$. Entonces:

$$nc = (n+1)c - c > y - c > y + x - y = x$$

y así hemos obtenido un elemento $nc \in C$ tal que $x < nc < y$, es decir, $C$ es denso. $\square$

[2] Los corolarios 1.2.13 y 1.2.17 afirman que los números racionales y los números irracionales son densos en $\mathbb{R}$. En el ejercicio 12 de la página 38 se dan otros ejemplos de conjuntos densos en $\mathbb{R}$.

**1.4.4** *Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función no decreciente. Pruebe que existe un número real $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.*
Sug: Razone sobre $\alpha := \sup\{x; f(x) \geq x\}$.

Solución: Se trata de probar que $f(\alpha) = \alpha$.
Si fuera $f(\alpha) - \alpha = \varepsilon > 0$ sería $f(\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) > 0$ y al ser $f$ no decreciente también sería $f(\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) \geq f(\alpha) - (\alpha + \frac{1}{2}\varepsilon) > 0$ lo que contradice que $\alpha$ sea supremo.
De forma análoga se prueba que $f(\alpha) - \alpha = \varepsilon < 0$ es contradictorio. ¡Verifíquelo! □

**1.4.5** *Pruebe que si $a$ y $b$ son números reales, entonces*

$$|ab| \leq a^2 + b^2.$$

Solución: Como $|ab| = |a||b|$ se trata de probar que

$$|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2.$$

Pero es claro que $|a||b| \leq 2|a||b|$, de modo que si conseguimos probar que

$$2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$$

la cuestión está resuelta. La desigualdad anterior puede ser reescrita como

$$0 \leq |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| = (|a| - |b|)^2 \text{ [binomio de Newton]}$$

y en el formato

$$0 \leq (|a| - |b|)^2$$

la desigualdad es trivialmente cierta, lo cual acaba la demostración.

Observe que en realidad hemos demostrado algo más fuerte que lo propuesto: se ha demostrado que

$$|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

□

**1.4.6** *Resuelva la inecuación siguiente, donde $x \in \mathbb{R}$:*

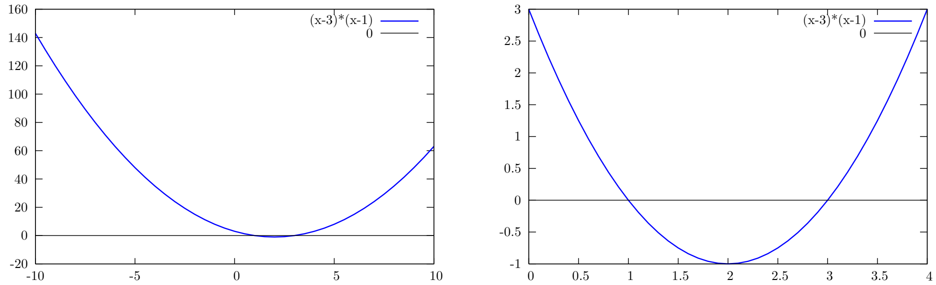
$$(x-1)(x-3) > 0$$

Solución: Obtener la solución de una inecuación consiste en identificar el conjunto de números (en este caso números reales) que verifican la inecuación dada; en concreto se trata, pues, de identificar de forma explícita (más descriptiva) el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x-3) > 0\}.$$

Para abordar este problema podemos considerar que el primer miembro de la inecuación corresponde a la gráfica de una función y queremos saber para qué valores de $x$ la correspondiente gráfica se sitúa por encima del eje $OX$ de ecuación $y = 0$.

Podemos utilizar MAXIMA para realizar las gráficas y de ese modo ayudarnos a resolver la cuestión. Para que MAXIMA dibuje la gráfica de una función es necesario especificar el rango de valores en el que se mueve la variable. Lo razonable es empezar con un rango «amplio» e ir modificándolo, si fuera necesario, hasta concentrarse en la parte significativa.




Aquí hemos utilizado dos gráficas que nos permiten aventurar una respuesta.

```
plot2d( [(x-1)*(x-3),0],[x,-10,10] );
plot2d( [(x-1)*(x-3),0],[x,0,4] );
```

Un razonamiento analítico puede ser como sigue. Para que el producto

$$(x-1)(x-3)$$

sea mayor que cero ambos factores han de ser positivos o bien ambos negativos, es decir, debe ocurrir una de las dos situaciones siguientes:

A) $x - 1 > 0$ y $x - 3 > 0$, ó

B) $x - 1 < 0$ y $x - 3 < 0$.

Las condiciones anteriores pueden formularse, de forma equivalente, como:

A) $x - 3 > 0$ (puesto que si $x > 3$ entonces, a fortiori, $x > 1$), ó

B) $x - 1 < 0$ (puesto que si $x < 1$ entonces, a fortiori, $x < 3$).

El resultado es concordante con el gráfico y obtenemos, finalmente, que la solución de la inecuación propuesta es el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ x < 1 \text{ ó } x > 3\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$$

$\square$

## Ejercicios propuestos

1.1) Discuta la veracidad de las siguientes afirmaciones acerca de números reales

*a)* $x < y, z < w \Rightarrow xz < yw$

*b)* $x < y + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \leq y$

*c)* $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

*d)* $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

*e)* $\varepsilon > 0, x \geq 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{x}{m} < \varepsilon \; \forall m \geq n$

*f)* $x > 0, \varepsilon > 0 \;\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon \leq x < (n+1)\varepsilon$

*g)* $x > 0, \varepsilon > 0 \;\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n\varepsilon < x \leq (n+1)\varepsilon$

*h)* $x > 1, y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : x^n \leq y < x^{n+1}$

1.2) Utilizando el método de inducción pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Pruebe que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) $\sum_{j=0}^{n} j^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$.

d) Dados $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que $a_{i+1} = ra_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (progresión geométrica), se verifica:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{a_0 - ra_n}{1 - r}$$

Deduzca de lo anterior la identidad algebraica (ecuación ciclotómica):

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

e) Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_{i+1} - a_i = d$, para $i = 1, \ldots, n-1$ (progresión aritmética), se verifica:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

1.3) Pruebe que se cumple la siguiente desigualdad de Bernoulli para todo entero positivo $n$

$$(1+x)^n > 1 + nx \quad \text{siendo } x \neq 0 \text{ y } -1 < x.$$

1.4) Pruebe por inducción la siguiente desigualdad.

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad 0 < \varepsilon < 1;$$

1.5) Pruebe por inducción que no hay ningún número natural entre 1 y 2.

1.6) Pruebe por inducción las siguientes igualdades

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,[\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\cdots+\operatorname{sen}nx]=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\,[1+2(\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx)]=\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x$$

1.7) Sea $P(n)$ una propiedad en la que interviene un número natural genérico $n$, y sea $k\in\mathbb{N}$ un número fijo. Si se cumple que:

a) $P(k)$ es cierta, y
b) $P(n+1)$ es cierta supuesto que $P(n)$ es cierta y que $k\le n$.

Entonces $P(n)$ es cierta cualquiera que sea el número natural $n\in\mathbb{N}$, $k\le n$.

1.8) Sean $b_i, 1\le i\le n, n>1$, números reales positivos cuyo producto es 1.

a) Demuestre que si no todos los $b_i$ son iguales y se suponen ordenados de forma creciente, $b_1\le b_2\le\ldots\le b_n$, entonces $b_n>1>b_1$.
b) Utilizando inducción en $n$, pruebe que

$$b_1b_2\ldots b_n \;=\; 1 \;\le\; \frac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n}$$

y que sólo se tiene la igualdad cuando todos los $b_i$ son iguales.
c) Deduzca que si $a_i>0, 1\le i\le n$, son números reales entonces

$$(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} \;\le\; \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Sugerencia. Para el apartado b) escríbalo en la forma $n\le b_1+b_2+\ldots+b_n$. Luego utilice inducción, agrupando los términos primero y último.

1.9) Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Demuestre que $\alpha=\sup A$ si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $\alpha$ es una cota superior de $A$;
b) Para cada $\varepsilon>0$ existe $a\in A$ tal que $\alpha-\varepsilon<a\le\alpha$.

Si $A$ es acotado inferiormente y $\beta\in\mathbb{R}$, demuestre que $\beta=\inf A$ si y sólo si se verifican:

a) $\beta$ es una cota inferior de $A$;
b) Para cada $\varepsilon>0$ existe $a\in A$ tal que $\beta\le a<\beta+\varepsilon$.

1.10) Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Se definen

$$A + B = \{x = a + b : a \in A, b \in B\}, \qquad -A = \{x = -a : a \in A\}.$$

Pruebe que:

a) Si $A$ y $B$ están acotados superiormente entonces también lo están $A \cup B$ y $A + B$ siendo

$$\sup(A \cup B) = \sup\{\sup A, \sup B\} \text{ y } \sup\{A + B\} = \sup A + \sup B.$$

b) Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas entonces

$$\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

y la desigualdad puede ser estricta. Ponga un ejemplo.

c) Enuncie y demuestre resultados análogos para el ínfimo

d) Sea $AB = \{x = ab : a \in A, b \in B\}$ y $A, B$ subconjuntos de $\mathbb{R}$ cuyos elementos son números positivos. Pruebe que

$$\sup AB = \sup A \sup B.$$

e) Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos de $\mathbb{R}$, tales que $A \subset B$. Probad que

$$\sup A \leq \sup B \text{ y } \inf A \geq \inf B$$

1.11) Si $a$ es racional y $b$ es irracional ¿es $a + b$ necesariamente irracional? Si $a$ es irracional y $b$ es irracional ¿es $ab$ necesariamente irracional?

Pruebe que $\sqrt{3}$, y $\sqrt{6}$ irracionales.

Sean $n, m, p \in \mathbb{N}$ tales que $n = mp$. Pruebe si $n$ y $m$ son cuadrados (e.d. $n = a^2$ y $m = b^2$ con $a, b \in \mathbb{N}$), entonces $p$ también es un cuadrado.

Pruebe que $d \in \mathbb{N}$, $\sqrt{d}$ es racional si, y sólo si, $d = k^2$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Pruebe que $\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ es irracional.

1.12) Pruebe que

a) $T_1 = \{r\sqrt{3} : r \in \mathbb{Q}\}$ es denso en $\mathbb{R}$;

b) $T_2 = \{m + n\sqrt{3} : m, n \text{ números enteros }\}$ es denso en $\mathbb{R}$;

c) si $T_3 = \{m + n\sqrt{2} : m, n \text{ números enteros }\}$, entonces para cualquier $a \in \mathbb{R}$ se cumple $a = \sup\{t : t \in T_3, t < a\}$.

Indicación: Para los apartados 2 y 3 véase el ejercicio 1.4.3.

1.13) Pruebe que $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|y-x|}{2}$ y que $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|y-x|}{2}$. De una fórmula del mismo tipo para $\max\{x,y,z\}$.

1.14) Demuestre que para cada dos números reales $a > 1 \quad b > 0$ existe un único número entero $n$ tal que $a^n \leq b < a^{n+1}$.

1.15) Pruebe que la función $[x]$ parte entera de $x$ verifica

$$\left[\frac{a}{bc}\right] = \left[\frac{[a/b]}{c}\right] \qquad abc \neq 0 \quad a,b \in \mathbb{R} \; c \in \mathbb{N}$$

1.16) Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

$i)$ $5 - x^2 < 8$; $ii)$ $(x-1)(x-3) > 0$; $iii)$ $2^x < 8$
$iv)$ $x + 3^x < 4$; $v)$ $\frac{2x-1}{3x+2} \leq 1$; $vi)$ $|ax+b| < c$, $a \neq 0, c > 0$.
$vii)$ $\frac{a|x|+1}{x} < 1$; $viii)$ $x+ \mid x \mid < 1$; $ix)$ $x- \mid x \mid > 2$

1.17) Sean $x$ e $y$ dos números reales, $x < y$. Pruebe que para cada $\lambda$, $0 < \lambda < 1$, se cumple

$$x < \lambda x + (1-\lambda)y < y.$$

Recíprocamente, pruebe que si $r$ es un número real, $x < r < y$, entonces existe un $\lambda$, $0 < \lambda < 1$, tal que $r = \lambda x + (1-\lambda)y$.

1.18) Determine $a, b \in \mathbb{R}$ verificando:

$$\frac{7+i}{3+4i} = \frac{a+bi}{4-i}.$$

1.19) Demuestre que $|z+i| = |z-i| \iff z \in \mathbb{R}$.

1.20) Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\begin{array}{ll}
3z^2 + 2z + 4 = 0 & z^2 + (2-2\,i)z + 1 + 2\,i = 0 \\
5z^2 + 2z + 10 = 0 & z^2 + (-3+2i)z + 5 - i = 0 \\
z^4 - 16 = 0 & z^4 + 16 = 0 \\
y^5 = 4 + 4i & (1+i)z^3 - zi = 0
\end{array}$$

Compruebe que Maxima también sabe resolver esas ecuaciones.

1.21) Exprese los siguientes números complejos en forma binomial.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $i^5 + i^{19}$ | $1 + i + i^2 + i^3$ | $\dfrac{1}{i}$ | $\dfrac{(3-i)^3}{(-1-i)^5}$ | $(1+i)^2$ |
| $\sqrt[3]{-8}$ | $\dfrac{1}{1+i}$ | $(2+3i)(3-4i)$ | $i^5 + i^{16}$ | $(1+i)^3$ |
| $\dfrac{2+3i}{2-4i}$ | $i^{175}$ | $(1+i)^{10}$ | | |

Compruebe con Maxima los resultados que obtenga por sí mismo.

1.22) Pruebe que para todo número complejo $z = x + y\,i$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x| + |y|) \leq |z| \leq |x| + |y|.$$

1.23) Si $z, w \in \mathbb{C}$, pruebe que $2(|z+w|^2 + |z-w|^2) = |2z|^2 + |2w|^2$. Interprete geométricamente esta identidad.

Sabiendo que $|z| = 1$, calcule $|1+z|^2 + |1-z|^2$.

1.24) Pruebe que todo número complejo $z$ tal que $|z| = 1$ con $z \neq -1$ se puede representar de la forma $z = \dfrac{1 - a\,i}{1 + a\,i}$, con $a \in \mathbb{R}$.