2.9. Ejercicios

Resueltos

2.9.1 *Con la axiomática que hemos empleado para $\mathbb{R}$ hemos podido demostrar la propiedad arquimediana y el principio de Cantor de los intervalos encajados utilizando la existencia de supremo en los conjuntos acotados. Pruebe que, recíprocamente, si tenemos un cuerpo totalmente ordenado en el que la propiedad arquimediana y el principio de Cantor de los intervalos encajados son ciertos, entonces cualquier conjunto acotado superiormente A tiene supremo.*

SOLUCIÓN: Sea A un conjunto no vacío acotado superiormente. Queremos ver que tiene supremo. Sea K una cota superior de A. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K-1$ no es cota superior (si lo fuera cambiaríamos K por $K-1$ repitiendo el proceso en caso necesario). Sea $K-1 < a_1 \leq b_1 = K$ con $a_1 \in A$. Tomemos el punto medio m_1 del intervalo $I_1 := [a_1, b_1]$. Si m_1 es cota superior de A definimos $a_2 := a_1$ y $b_2 = m_1$. Si m_1 no es cota superior de A existe $a_2 \in A$ con $m_1 < a_2 < b_1$ y entonces definimos $b_2 := b_1$. En ambos casos el intervalo $I_2 := [a_2, b_2]$ está contenido en I_1 y su longitud es menor o igual que $1/2$ de la longitud de I_1. Procediendo recursivamente construimos una sucesión de intervalos encajados $[a_n, b_n]$ siendo $a_n \in A$ y b_n cota superior de A y longitud de I_n menor o igual que $(1/2)^{n-1}$ veces la longitud de I_1, con lo que, por la propiedad arquimediana dicha longitud tiende a cero. Entonces, por el principio de encaje de Cantor $\bigcap_n I_n$ posee un único elemento, digamos $\bigcap_n I_n =: \{\alpha\}$.

Afirmamos que $\alpha = \sup A$, lo cual requiere probar dos cosas:

(1) α es cota superior de A. En efecto, si para algún $a \in A$ fuese $\alpha < a$ entonces habría de ser $b_n < a$ para algún n ya que en caso contrario se tendría $a \leq b_n$ para todo n, de donde se llegaría a

$$0 < a - \alpha \leq b_n - \alpha$$

lo cual es absurdo puesto que $\alpha = \lim_n b_n$. Pero, por otra parte, al ser b_n cota superior de A se tiene $a \leq b_n$, lo cual es también contradictorio. En consecuencia α es cota superior de A.

(2) α es la menor cota superior de A. En efecto si $\beta < \alpha$ fuese cota superior de A se tendría $a_n \leq \beta < \alpha$ y por tanto tomando límites $\alpha \leq \beta < \alpha$ lo cual es absurdo.

Resumiendo, la propiedad de que los conjuntos acotados superiormente poseen supremo es equivalente a que se verifiquen la propiedad arquimediana y el principio de encaje de Cantor. □

2.9.2 *Una sucesión* $(a_n)_n$ *se dice que es contractiva si existe* $0 < c < 1$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se verifica* $|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$. *Demuestre que las sucesiones contractivas son de Cauchy.*

SOLUCIÓN: Sea $m > n$ entonces haciendo uso de la desigualdad triangular y de la estimación $|a_{n+1} - a_n| \leq c|a_n - a_{n-1}|$ se tiene

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &\leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n+1}|(1 + c + c^2 + \cdots + c^{m-n}) \text{ [progresión geométrica]} \\ &= |a_n - a_{n+1}|\frac{1 - c^{m-n+1}}{1 - c} \leq |a_n - a_{n+1}|\frac{1}{1 - c} \end{aligned}$$

Por otra parte $|a_2 - a_3| \leq c|a_1 - a_2|$, $|a_3 - a_4| \leq c|a_2 - a_3| \leq c^2|a_1 - a_2|$ y en general es sencillo obtener por inducción que

$$|a_n - a_{n+1}| \leq c^{n-1}|a_1 - a_2|$$

de donde se tiene

$$|a_n - a_m| \leq c^{n-1}\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c} \text{ siempre que } m > n.$$

Como $\lim_n c^n = 0$, fijado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_0 \leq n$ se tiene

$$c^n < \varepsilon\frac{1 - c}{|a_1 - a_2|}$$

y por tanto

$$|a_n - a_m| \leq c^{n-1}\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c} < \varepsilon\frac{|a_1 - a_2|}{1 - c}\frac{1 - c}{|a_1 - a_2|} = \varepsilon$$

siempre que $n, m > n_0 + 1$. Así pues $(a_n)_n$ es de Cauchy. □

2.9.3 *Demuestre que para cualquier sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números reales que converja hacia* 0*, siendo* $|x_n| < 1$ *y* $x_n \neq 0$*, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1 + x_n)}{x_n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n} - 1}{x_n} = 1. \tag{2.3}$$

Aplique lo anterior para probar que si $\lim_n(x_n) = 1$ *y* $\lim_n y_n = +\infty$ *entonces*

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = e^{\lim_n y_n(x_n - 1)} \tag{2.4}$$

supuesto que el segundo límite exista.

Solución: Comencemos por el primero de los límites de (2.3) y supongamos que $0 < x_n < 1$ para todo n. Se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} &= \lim_{n\to\infty} \log\,(1+x_n)^{1/x_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \qquad [\text{haciendo } 1/x_n = y_n] \\
&= \log \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} \qquad [\text{usando la prop. 2.5.7 }] \\
&= \log e = 1 \quad [\text{usando la prop. 2.7.1}]
\end{aligned}$$

Cuando $0 > x_n > -1$ la prueba es idéntica (en esta situación $\lim_n y_n = -\infty$). Para el caso general en el $-1 < x_n < 1$ los términos de la sucesión se reparten en dos sucesiones disjuntas, una, $(x'_n)_n$, que contenga los términos positivos y la otra, $(x''_n)_n$, los negativos. Entonces puesto que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x'_n)}{x'_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x''_n)}{x''_n} = 1$$

se llega a la conclusión de que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+x_n)}{x_n} = 1.$$

El segundo límite de la fórmula (2.3) puede reducirse al primero mediante el cambio de variable $y_n = e^{x_n} - 1$ ya que entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{x_n}-1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{\log(1+y_n)} = 1$$

puesto que $\lim_n y_n = 0$.

Pasemos a la aplicación. Como

$$(x_n)^{y_n} = e^{y_n \log x_n} = e^{y_n \log(1+(x_n-1))}$$

usando la proposición 2.5.4 se tiene

$$\lim_n (x_n)^{y_n} = e^{\lim_n y_n \log(1+(x_n-1))}$$

supuesto que este segundo límite exista. Pero sabemos que

$$\lim_n y_n \log(1+(x_n-1)) = \lim_n y_n(x_n-1)\frac{\log(1+(x_n-1))}{(x_n-1)} = \lim_n y_n(x_n-1)$$

ya que $\lim_n (x_n - 1) = 0$. Se tiene así probada la fórmula (2.3). $\square$

2.9.4 *Estudie el límite de la sucesión* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cuyos términos son:*

$$H_1 = 1, H_2 = 1 + 1/2, H_3 = 1 + 1/2 + 1/3, \dots H_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$$

SOLUCIÓN: Esta sucesión es conocida como la *serie armónica* (en inglés «Harmonic»).

Es claro que se trata de una sucesión monótona creciente. En consecuencia o está acotada superiormente, en cuyo caso tiene por límite un número real (proposición 2.2.2), o no lo está, en cuyo caso su límite es $+\infty$. ¿Cómo determinar cuál de los dos casos se da? El primer caso se da si y sólo si la sucesión es de Cauchy (teorema 2.4.3). Por tanto el límite será $+\infty$ si y sólo si la sucesión no es de Cauchy, que es lo que ocurre como vamos a ver.

Recordemos que una sucesión es de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que siempre que $n, m \geq n_0$ se cumple $|H_n - H_m| < \varepsilon$. Por tanto, negar que la sucesión es de Cauchy significa demostrar que hay al menos un $\varepsilon_0 > 0$ de manera que para cada n_0 que tomemos siempre existen números $n, m \geq n_0$ de modo que

$$|H_n - H_m| \geq \varepsilon_0.$$

Veamos que tomando $\varepsilon_0 = 1/2$ se cumple la última desigualdad para ciertos $n, m \geq n_0$ cualquiera que sea el n_0 elegido. Tomemos $n = n_0$ y hagamos $m = n_0 + k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$ que luego determinaremos. Entonces

$$|H_n - H_m| = \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \frac{1}{n_0+3} + \cdots + \frac{1}{n_0+k} \geq \frac{k}{n_0+k}$$

y si la sucesión fuera de Cauchy habría de ser

$$\frac{k}{n_0+k} \leq |H_n - H_m| < 1/2$$

para todo k, pero eso es imposible puesto que $\lim_k \dfrac{k}{n_0+k} = 1$.

Conseguido nuestro objetivo, queremos advertir al lector que este resultado no debe hacerle llegar a la conclusión de que una suma con «infinitos sumandos» da siempre como resultado ∞. Por ejemplo, la sucesión

$$s_n = 1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \cdots + 1/2^n$$

tiene por límite 1 (es la suma de una progresión geométrica infinita). □

MAXIMA le han dicho cual es el límite de esta sucesión $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pero a pesar de que en las fórmulas para MAXIMA no podemos escribir los puntos suspensivos $\ldots$ que contiene la fórmula de H_n, y por ello no podemos usar el comando `limit`, sí podemos hacer uso de un comando que hace sumas. Por ejemplo,

```
sum(1/n, n, 1, 100);
sum(1/n, n, 1, 100),numer;
```

permiten calcular el valor de H_{100} de forma exacta como fracción, o en forma decimal aproximada, respectivamente. El límite de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene mediante

```
sum(1/n, n, 1, inf),simpsum;
```

Aquí `inf` denota a ∞, como puede suponerse, y `simpsum` es un parámetro técnico que viene a significar algo así como «simplifica la suma». Pero ¡cuidado! no debe pensarse que MAXIMA sabe hacer *cualquier* suma infinita... ¡los humanos no somos capaces de hacerlo!

2.9.5 *Calcule el siguiente límite, donde suponemos que a, b y c son constantes positivas.*

$$\lim_n \left(\frac{n}{3}\log((n+a)(n+b)(n+c)) - \log n^n\right).$$

SOLUCIÓN: Puesto que

$$\left(\frac{n}{3}\log((n+a)(n+b)(n+c)) - \log n^n\right) = \frac{n}{3}\log\frac{(n+a)(n+b)(n+c)}{n^3} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(n\log\left(1+\frac{a}{n}\right) + n\log\left(1+\frac{b}{n}\right) + n\log\left(1+\frac{c}{n}\right)\right)$$

hemos de calcular $\lim_n n\log(1+a/n)$ (también para b y c). Pero usando el ejercicio 3 de esta misma sección se tiene

$$\lim_n n\log(1+a/n) = \lim_n n\frac{a}{n}\frac{\log(1+a/n)}{a/n} = a$$

En consecuencia el límite buscado es $(a+b+c)/3$. □

l límite anterior sirve para mostrar que MAXIMA puede calcular algunos límites de sucesiones que dependan de parámetros (a, b, c en nuestro caso). Así ante el comando

```
limit( (1/3)*n*log( (n+a)*(n+b)*(n+c) ) - log (n^n),n,inf );
```

MAXIMA pregunta sucesivamente en tres ocasiones si `a`, `b` y `c` son positivos o negativos; respondiendo en cada ocasión con

```
positive;
```

proporciona finalmente que el valor del límite es $(a+b+c)/3$.

2.9.6 *Sea $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria. Pruebe que existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ($b_n \neq 0$) tales que $\lim_n a_n = 0 = \lim_n b_n$ y $c_n = a_n/b_n$.*

SOLUCIÓN: Basta tomar $a_n = \dfrac{c_n}{c_n^2 + n^2}$ y $b_n = \dfrac{1}{c_n^2 + n^2}$ y observar que

$$|a_n| = \frac{|c_n|}{c_n^2 + n^2} \leq \frac{1}{2n}, \quad b_n \leq \frac{1}{n^2}$$

para obtener el resultado. □

Ejercicios propuestos

2.1) Demuestre, aplicando las definiciones correspondientes, que la sucesión de termino general $x_n = \dfrac{5n-3}{2n-1}$ converge hacia $5/2$.

2.2) Utilizando el concepto de límite resuelva las siguientes cuestiones

a) Una sucesión es convergente y sus términos son alternativamente, positivos y negativos. ¿Cual es su limite? Razone la respuesta.

b) Pruebe que si
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lambda,$$
la sucesión $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$ también tiene limite λ.

2.3) Pruebe que $\lim x_n = a$ equivale a $\lim z_n = 0$, siendo $z_n = |x_n - a|$.

2.4) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de números reales o complejos tales que existe el límite de las subsucesiones $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$,

a) ¿Existe $\lim x_n$?

b) Si además $\lim x_{3n}$, ¿existe $\lim x_n$?

2.5) Si $a > 0$ tomamos $x_1 > \sqrt{a}$ y definimos la sucesión recurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la fórmula
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

a) Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y que $\lim_n x_n = \sqrt{a}$.

b) Sea $\varepsilon_n := x_n - \sqrt{a}$. Demuestre que
$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{a}}$$
y en consecuencia que
$$\varepsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\delta}\right)^{2^n}, \quad n = 1, 2, 3\dots$$
en donde $\beta := 2\sqrt{a}$.

c) La sucesión $(x_n)_n$ proporciona un buen procedimiento para calcular aproximaciones decimales de una raíz cuadrada. Por ejemplo, tome $a = 3$ y $x_1 = 2$ y calcule el una estimación para ε_5, es decir, el error máximo que se comete al tomar el término x_5 como aproximación de $\sqrt{3}$ ¿cuantas cifras exactas proporciona x_7?

2.6) Sea $(x_n)_n$ la sucesión que tiene por términos

$$1, \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}}, \dots$$

a) Encuentre una fórmula recurrente para los términos x_n, de la forma $x_{n+1} = f(x_n)$.

b) Calcule el límite de la sucesión.

Indicación: estudie por separado la subsucesión de los índices pares e impares.

2.7) Si $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$, para $n \geq 1$ y $0 < x_1 < 1$. Pruebe que x_n es una sucesión decreciente con limite 0. Pruebe también que $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ converge hacia $1/2$.

2.8) Calcule los siguientes límites:

Maxima puede ayudarle a obtener los resultados.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+6+\cdots+3n}{n^2}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+7^{n+1}}{4^n+7^n}$

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-1} - (2n-1))$

d) $\lim_{n\to\infty} n\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\log n}$

e) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n^{\frac{3}{2}}+1} - \sqrt{n^2-n^{\frac{3}{2}}-1})$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{n}+2n+1)}{n^2+3}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(4n-2)(3n+1)(2n-5)^2}{n^2(2n+3)(3n-1)}$

h) $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt[3]{4}-4\sqrt[5]{n^2}}{\sqrt[3]{n}-3(4-\sqrt[5]{n})}$

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$

j) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{a})^n$

k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3n]{n^3-1}$

l) $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n-3}}{\sqrt{n}+1})^{\sqrt{n}}$

m) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\frac{1+n\log n}{n\log n})^n$

n) $\lim_{n\to\infty}(n^2+n)^{\frac{1}{n+2}}$

ñ) $\lim_{n\to\infty}(2+n^2)^{\frac{1}{\log n}}$

o) $\lim_{n\to\infty}(\frac{\log(n+a)}{\log n})^{n\log n}$

2.9) Estudie si son de Cauchy las siguientes sucesiones

a) $a_n = \frac{3n^3+2n+1}{n^3+2}$;

b) $b_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$;

c) $c_n = \frac{\operatorname{sen} 1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2}{2^2} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} n}{2^n}$.

2.10) Analice la convergencia de la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por la fórmula

$$s_n = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdots + 1/n^2$$

Sugerencia: Compare con el ejercicio 4 de la página 83 y tenga en cuenta la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n^2} \quad \text{para } 1 < n \in \mathbb{N}$$

2.11) Calcule el límite de la siguiente sucesión:

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}$$

2.12) *Este ejercicio presenta un resultado importante que constituye un criterio útil a la hora de calcular límites*
Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales con límite $a \in \mathbb{R}$. Pruebe que

$$\lim_n \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

Indicación: Comience suponiendo que $a = 0$.

2.13) *Este ejercicio presenta un resultado importante que constituye...*
Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, con $a_n > 0$ y $łim_n a_n = a$.

a) Demuestre que $\lim_n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$.

b) Demuestre que si existe

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$$

entonces $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = b$.

Indicación: Para el primer apartado si $a = 0$ razone directamente y si $a > 0$ calcule logaritmos y utilice el ejercicio anterior.
Para el segundo apartado, sea $b_1 = a_1$ y $b_n = a_{n+1}/a_n$ para $n \geq 2$. Estudie la sucesión $\sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n}$.

2.14) Sea $(a_n)_n$ una sucesión acotada superior e inferiormente. Supongamos que existe $a := \lim a_n - a_{n-1}$. ¿Cuanto vale a? Justifique la respuesta.

Suponga ahora que $a = 0$. ¿Es la sucesión $(a_n)_n$ necesariamente convergente? Justifique la respuesta.

2.15) Sobre la constante de Euler

a) Deduzca las siguientes desigualdades $\dfrac{1}{n+1} < \log(1 + \dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$

b) Pruebe que la sucesión

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

es convergente. A su límite se le denomina la constante de Euler y es usualmente denotada como γ (más sobre el tema en wikipedia). Utilice Maxima para obtener las primeras cifras decimales de γ.

c) Calcule $\lim\limits_{n} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

2.16) Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente (resp. inferiormente) y sea $\alpha = \sup A$ (resp. $\alpha = \inf A$). Pruebe que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\alpha = \lim_n a_n$.

2.17) En caso de que sean convergentes, calcule el límite de las siguientes sucesiones:

a) $\lim_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{\ln n}$

c) $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2} - \sqrt{n^3+1}}$

g) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 - 7n + 3}$

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^2}[\sqrt{n^3 + 1} - \sqrt{n^3 - 1}]$

j) $\lim_{n\to\infty} n(0.9)^n$

k) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}\ ; a > 0$

l) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n}$

m) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}$

n) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2+n}$

ñ) $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{1+e^n}$

o) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

p) $\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{n+1})^{2/(2+\ln n)}$

q) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{-n}+(-2)^n}{2^n}\right) + i\left(\frac{2^n+(-2)^n}{3^n}\right)$

r) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{2n^2}\right) + i\left(\frac{10^6n^3+3n^2}{10^{-12}n^4-10n^3}\right)$

Maxima puede serle de utilidad para verificar sus cálculos.