3.5. Ejercicios

Resueltos

3.5.1 *Estudie la existencia de los siguientes límites y calcule su valor o los valores de los límites laterales correspondientes, cuando existan:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x} \qquad \lim_{x\to 0}(2+\operatorname{sen}(1/x)) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}$$

SOLUCIÓN: Numerador y denominador de $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ son funciones continuas por lo que, salvo que de lugar a indeterminación, el límite coincide con el cociente entre los límites de numerador y denominador. En este caso ambos son cero y se produce la indeterminación. Pero al tratarse de polinomios que se anulan para $x=2$, el teorema de Fubini garantiza que ambos son divisibles por $x-2$, asi que, para cada $x\neq 2$ se tiene la igualdad

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x+3)}{(x+2)}$$

y ahora es claro que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}=\frac{5}{4}.$$

Para el caso $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2+x}$ tenemos otra vez una indeterminación. De nuevo podemos dividir numerador y denominador por x. Pero, ahora $|x|/x$, que es lo que se conoce como «signo de x», es la función σ definida por

$$\sigma(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$$

y entonces se tiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+1}=1$$

mientras que

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x^2+x}=\lim_{x\to 0,x^-}\frac{-1}{x+1}=-1.$$

Así pues, el límite no existe aunque existen los límites laterales.

$\lim_{x\to 0}(2+\operatorname{sen}(1/x))=2+\lim_{x\to 0}(\operatorname{sen}(1/x))$, pero este límite no existe porque tomando las sucesiones convergentes a cero definidas por $x_n=1/(2n\pi)$ y $x_n=1/(2n\pi+\pi/2)$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen}(1/x_n))=0\neq 1=\lim_{n\to\infty}(\operatorname{sen}(1/x'_n)).$$

Por último en el caso de $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}$ el numerador tiene límite cero y el denominador no tiene límite. A pesar de ello existe el límite buscado y vale 0 ya que

$$0 \le \left|\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}\right| \le \frac{|\sqrt{x}|}{1}, \quad \text{al ser } 1 \le 2+\operatorname{sen}(1/x) \le 3$$

y si

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)}\right| = 0$$

también es

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{2+\operatorname{sen}(1/x)} = 0$$

y por tanto el límite es 0. □

3.5.2 Estudie el dominio y la continuidad de las siguientes funciones.

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x} \quad h(x) = \frac{\log(1+x) - \log(1-x)}{x}$$

Solución: Haciendo uso de la continuidad de ciertas funciones que hemos ido estableciendo en los ejemplos y de los resultados sobre operaciones con funciones continuas podemos afirmar:

1) La función f está definida inicialmente para cualquier $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Además como la función $x \mapsto x$ es continua tambien lo son $x \mapsto x^2$ (por producto de continuas) y $x \mapsto 1/x$ si $x \neq 0$ (por cociente de continuas) y al ser continua la aplicación $y \mapsto \operatorname{sen} y$ también lo es (por composición de continuas) la función $x \mapsto \operatorname{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Así que, finalmente, la función f es continua (por producto de dos continuas) en su dominio. ¿Qué ocurre en $x = 0$? En principio f no está definida, pero podríamos plantearnos si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ y de existir prolongar la función f que ya es continua en $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ haciendo $f(0) := \lim_{x\to 0} f(x)$. Pero como el seno es una función acotada, se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}(1/x) = 0$.

2) La función g es un cociente de polinomios y, por tanto, es continua (por cociente de continuas) en todos los puntos en los que el denominador no se anule, que en nuestro caso es $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ siendo este el dominio inicial para g. En cambio en $x = 0$ numerador y denominador se anulan: podemos dividir ambos por x y extender el dominio de g a todo $\mathbb{R}$, definiendo $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$ a tal fin hacemos uso de la ecuación ciclotómica

$$(a^{n+1} - b^{n+1}) = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n)$$

y tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{((1+x)-1)((1+x)^n + (1+x)^{n-1} + \cdots + 1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}((1+x)^n + (1+x)^{n-1} + \cdots + 1) = n+1\end{aligned}$$

debido a que hay $n+1$ sumandos cada uno de los cuales tiene límite 1. □

3.5.3 *¿Qué se puede decir de una función real continua que sólo toma valores racionales?*

Solución: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como f es continua si existieran $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de modo, que $f(x_1) < f(x_2)$, entonces, por la propiedad de los valores intermedios, f debe tomar todos los valores del intervalo $[f(x_1), f(x_2)]$ pero en ese intervalo hay puntos que no son racionales y f sólo toma, por hipótesis, valores racionales, por tanto, es imposible que existan dos puntos en los que el valor de f sea diferente. Dicho de otro modo, f es constante. □

3.5.4 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua que verifica*

$$|f(x) - f(y)| \geq M|x - y|$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$, donde $M > 0$ es una constante. Pruebe que f es estrictamente monótona y deduzca que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Solución: Al ser f continua, es estrictamente monótona si y sólo es inyectiva. Pero si $f(x) = f(y)$ como $|f(x) - f(y)| \geq M|x - y|$ se obtiene que $x = y$, es decir, f es inyectiva. En consecuencia, f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Además $f(\mathbb{R})$ es un intervalo por ser f continua; pero como se tiene que $|f(x) - f(0)| \geq M|x|$ se cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x) - f(0)| = +\infty$ y, en consecuencia $\lim_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$. Lo cual requiere que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. □

3.5.5 *Sea $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) f es uniformemente continua en (a, b).

(2) Existe una función continua $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que restringida al intervalo (a, b) coincide con f.

Solución: Si existe la función F en las condiciones de (2), entonces F es uniformemente continua en $[a, b]$ por el teorema de Heine; es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que cualesquiera que sean $x, y \in [a, b]$ tales que

$|x-y|<\delta$ se verifica que $|F(x)-F(y)|<\varepsilon$. En particular, si $x,y\in(a,b)$ cumplen que $|x-y|<\delta$ se verifica que $|F(x)-F(y)|=|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Y esto es exactamente afirmar que f es uniformemente continua.

Supongamos ahora que f es uniformemente continua y queremos ver que existe la función F en las condiciones exigidas. Si tal F existe, ya conocemos su valor en todos los puntos de $[a,b]$, salvo en a y en b (porque coincide con f, que no está definida en los extremos); pero como es continua en a y en b ha de ser

$$F(a)=\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}f(x),\quad \text{siendo } x\neq a$$
$$F(b)=\lim_{x\to b}F(x)=\lim_{x\to b}f(x),\quad \text{siendo } x\neq b.$$

En consecuencia, lo único que tenemos que probar es que existen los siguientes límites:

$$\lim_{x\to a}f(x),\quad \lim_{x\to b}f(x).$$

Probaremos sólo la existencia de $\lim_{x\to a}f(x)$ porque el otro es análogo. De acuerdo con la condición de Cauchy de existencia de límites de funciones, basta demostrar que para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si

$$x,y\in B(a,\delta)\cap(a,b)\quad \text{se tiene}\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Pero como f es uniformemente continua para el ε dado existe $\delta>0$ tal que

$$\text{si } |x-y|<\delta, x,y\in(a,b),\quad \text{entonces}\quad |f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

y hemos conseguido así encontrar el δ que necesitábamos. □

Ejercicios propuestos

3.1) Calcule $\lambda = \lim_{x\longrightarrow 3} \dfrac{x-2}{2(1+x)}$ y acote superiormente los números $\delta > 0$ para los que $|x-3| < \delta$ implica

$$\left|\lambda - \frac{x-2}{2(1+x)}\right| \leq \frac{1}{100}.$$

3.2) Escriba con todo detalle, en términos de ε-δ y de bolas o entornos, la definición de cada una de las siguientes afirmaciones ($a, L \in \mathbb{R}$):

$$\begin{array}{lll} \lim_{x\to a} f(x) = +\infty & \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty & \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = L & \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = L & \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \end{array}$$

3.3) Determine los dominios de definición y los puntos de discontinuidad de las funciones:

$$\begin{array}{llll} f(x) = [2x] & f(x) = \sqrt{x-[x]} & f(x) = e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} & f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}] \\ f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{|x-1|} & f(x) = x^x & f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \cos(\alpha/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} & \end{array}$$

3.4) Calcule los siguientes límites ordinarios (o laterales):

$$\begin{array}{lll}
\lim_{x\longrightarrow a} \frac{x^n-a^n}{x-a} & \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} & \lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}-x) \\
\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h} & \lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x} & \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right) \\
\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{(x^4-1)(x^5-1)}{(x^3-1)(x^6-1)} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2x-\operatorname{sen} x}{x^2+1} & \lim_{x\longrightarrow a}(a^2-x^2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} \\
\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{6}{4+e^{\frac{1}{x}}} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1} & \lim_{x\longrightarrow\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2+2^{\operatorname{tg} x}} \\
\lim_{x\longrightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1} & \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}-\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{x} & \\
\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{6x^{\frac{4}{3}}+1001x}{\frac{1}{1001}x^2+x} & \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+1} & \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x} \\
\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} & \lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt[x]{x} & \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+1}+\sqrt[3]{8x^3+2})-3x}{2}
\end{array}$$

3.5) Dadas dos funciones reales f y g continuas en x_0. Pruebe que las funciones $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ y $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ también son continuas en x_0.

3.6) Sean I un intervalo de la recta real, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in I$. Suponiendo que para cada $n \in \mathbb{R}$ existe un $\delta_n > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \tfrac{n+1}{1+2^n} \quad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta_n, \quad x \in I,$$

¿se puede afirmar que f es continua en x_0?

3.7) Encontrar una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que solamente sea discontinua en los puntos del conjunto $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{R}\}$.

3.8) Demuestre que las siguientes ecuaciones tienen solución:

$$x - \operatorname{sen} x - 5 = 0 \qquad x^7 + \frac{213}{2 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 12.$$

Apóyese en el grafismo y en el comando `find_root` de MAXIMA para calcular las soluciones aproximadas de estas ecuaciones.

3.9) Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $g(b) < f(b)$. Pruebe que la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene solución en $[a, b]$.

3.10) Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua. Pruebe que la ecuación $f(x) = x$ tiene solución en $[0, 1]$.

3.11) Un escalador parte, a la salida del sol, para conquistar la cima de una montaña. Tras varios intentos en que asciende y desciende consigue conquistar finalmente la cima a la puesta del sol. Pasa la noche en la cumbre y, a la salida del sol, empieza el descenso por el mismo camino, llegando a la base también a la puesta del sol. Pruebe que a una misma hora de los dos días se encontró en la misma altitud.

3.12) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y p, q reales no negativos tales que $p + q = 1$. Pruebe que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = pf(a) + qf(b)$.

3.13) Pruebe que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1$, entonces f tiene un máximo o un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

3.14) Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [a, b]$. Demuestre que existe un número real $k > 0$ tal que $|f(x) - x| > k$ para todo $x \in [a, b]$.

3.15) Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que existen los límites $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x)$ y son finitos. Demuestre que f es uniformemente continua en (a, b).

3.16) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y periódica de periodo $T > 0$ (es decir, $f(t+T) = f(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$). Pruebe que $f(\mathbb{R})$ es un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y que f es uniformemente continua.

3.17) Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en I.

a) Pruebe que si f es uniformemente continua, entonces $\{f(x_n)\}$ es de Cauchy.

b) Suponga que f es continua, pero no uniformemente: muestre con un ejemplo que la afirmación anterior es falsa.

c) Suponga otra vez que f es continua, pero no uniformemente. ¿Puede dar una condición sobre I que asegure que la afirmación del primer apartado es cierta?

3.18) Sea $f : D \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua en z_0. Pruebe que las funciones $\mathbb{R}e f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ y $|f(z)|$ son continuas en z_0.

3.19) Discuta, en cada caso, la continuidad uniforme en I de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{\frac{1}{x^2-x}}, I = (0,1); & f(x) = \cos(x^2), I = \mathbb{R}; \\ f(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{|x|}), I = \mathbb{R}; & f(x) = \log(x + x \operatorname{sen} \frac{1}{x}), I = [1, +\infty); \\ f(x) = x \operatorname{sen} x, I = \mathbb{R}; & f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}, I = [0, +\infty); \end{array}$$

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona continua y acotada.

3.20) Si $[y]$ denota la parte entera del número real y, estudie los siguientes límites

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{[x]}{x} \text{ y } \lim_{x\longrightarrow 0} x[\frac{1}{x}]$$

3.21) Sea $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en cada intervalo acotado de $[0, +\infty]$.

a) Si existe el límite $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(f(x+1) - f(x)) = \lambda$, pruebe que también existe el límite $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda$.

b) Ponga un ejemplo que muestre la falsedad de la implicación recíproca.

3.22) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no identicamente nula que satisface la ecuación

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

para cada par de números reales x e y.

a) ¿Cuánto vale $f(0)$?

b) Si $a := f(1)$, pruebe que $a > 0$

c) Determine el valor de $f(n)$ en términos de a cuando $n \in \mathbb{N}$. Y también cuando $n \in \mathbb{Z}$.

d) Determine el valor de $f(1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$ en términos de a.

e) Determine el valor de $f(p/q)$ para $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$ en términos de a

f) ¿Cuánto vale $f(x)$?

3.23) Sea $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ una función continua tal que existe una constante $0 < k < 1$ de modo que $|f(x) - f(y)| < k|x - y|$. Consideramos la sucesión $(x_n)_n$ definida a partir de un punto arbitrario $x_1 \in [a,b]$ por la fórmula $x_{n+1} = f(x_n)$. Pruebe que la sucesión $(x_n)_n$ tiene límite. Si denotamos con z dicho límite, pruebe que se verifica $f(z) = z$ y que además sólo existe una solución de la ecuación $f(x) = x$.

3.24) Sea $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente tal que $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ sea decreciente. Pruebe que f es continua.