4.5. Ejercicios

Resueltos

4.5.1 *Calcule el siguiente límite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

Solución: Es un límite típico para usar desarrollos de Taylor. Se trata de realizar los desarrollos limitados de numerador y denominador hasta el primer coeficiente no nulo. En el numerador bastará con obtener el desarrollo limitado de la tangente hasta la primera potencia no nula superior a 1, que, en este caso, es la tercera

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} 0 + \frac{1}{1!}\operatorname{tg}'(0)x + \frac{1}{2!}\operatorname{tg}''(0)x^2 + \frac{1}{3!}\operatorname{tg}'''(0)x^3 + o(x^3) \\ &= 0 + x + 0x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

Obteniéndose, por tanto, el siguiente desarrollo limitado del numerador

$$x - \operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Para el denominador podría procederse del mismo modo, pero habida cuenta de que puede ser escrito en términos de funciones cuyos desarrollos limitados son conocidos

$$(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x = e^{x\log(1+x)} - 1 - (\operatorname{sen} x)^2$$

podemos sacar ventaja utilizando convenientemente productos, sumas y composición de los siguientes desarrollos

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots + \frac{u^n}{n!} + o(u^n) \tag{4.24}$$

$$\log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} - \frac{v^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{v^n}{n} + o(v^n) \tag{4.25}$$

$$\operatorname{sen} w = w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(w^{2n+1}) \tag{4.26}$$

para obtener que

$$\begin{aligned} u = x\log(1+x) &= x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n} + o(x^{n+1}) \\ e^u = e^{x\log(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right) + \\ &+ \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^5)\right)^2 + o(u^3) = \\ &= 1 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + o(x^4) \end{aligned}$$

$$(\operatorname{sen} x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

con lo que sustituyendo y efectuando ordenadamente los cálculos se obtiene el desarrollo del denominador

$$e^{x\log(1+x)} - 1 - (\operatorname{sen} x)^2 = -\frac{x^3}{2} + \frac{7x^4}{6} + o(x^4) = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

que basta realizar hasta tercer orden porque el numerador es de grado 3. Con ayuda de estos desarrollos el límite es inmediato

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{(1+x)^x - 1 - \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3} + o(x^3)/x^3}{-\frac{1}{2} + o(x^3)/x^3} = \frac{2}{3}$$

Las ideas son sencillas y también los procesos, sólo hay que tratar de hacer únicamente los cálculos necesarios para determinar la menor potencia de x que no se anula y tener cuidado de no olvidar ninguna potencia de x al operar con los desarrollos limitados. □

Con Maxima obtener los desarrollos limitados de cualquier orden es inmediato usando el comando `taylor(`*Función,variable,punto,orden*`)`. Y como los cálculos los hace la máquina, no es costoso poner un orden alto y luego quedarnos con los que nos interesa, que es el primer término no nulo del desarollo.
Podríamos haber empezado, por ejemplo, por desarrollos de orden 5 en el numerador y denominador, para darnos cuenta de inmediato que con los de orden 3 es suficiente.

```
taylor(x-tan(x),x,0,3);
taylor((1+x)^x -1- (sin(x))^2,x,0,3)
```

proporcionan respectivamente $-\frac{1}{3}x^3$ y $-\frac{1}{2}x^3$ lo cual permite calcular el límite de forma sencilla entendiendo bien el resultado.
Podríamos haber utilizado también
`limit( (x-tan(x))/((1+x)^x -1- (sin(x))^2),x,0);` y el resultado hubiera sido el mismo. Pero entonces Maxima habría sido una caja negra para nosotros.

4.5.2 *Sea la función* $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = (1-x)^{(1-x)}x^x$.

(1) Estudie y dibuje la función.

(2) Pruebe que es simétrica respecto al eje $x = \dfrac{1}{2}$.

(3) Pruebe que es convexa.

(4) Demuestre que $(1-x)^{(1-x)}x^x \leq (1-x)^2 + x^2$.

Solución: Como $x, 1-x > 0$ la función está bien definida y corresponde a

$$f(x) = e^{(1-x)\log(1-x)}e^{x\log x} = e^{(1-x)\log(1-x)+x\log x}$$

La función puede ser prolongada por continuidad en 0 y 1 con valor 1 en ambos casos ya que $\lim_{x\to 1}(1-x)\log(1-x) = \lim_{x\to 0} x\log x = 0$[9] y en consecuencia

$$\lim_{x\to 0}[(1-x)\log(1-x) + x\log x] = 0 = \lim_{x\to 1}[(1-x)\log(1-x) + x\log x]$$

El dominio de f es pues $[0,1]$ después de realizar esta prolongación por continuidad. El teorema de la función compuesta nos garantiza que f es derivable en $(0,1)$.

Para analizar el crecimiento de f basta con que lo hagamos en el exponente

$$g(x) := (1-x)\log(1-x) + x\log x$$

ya que la función exponencial es creciente y positiva. Pero

$$g'(x) = -\log(1-x) + \frac{1-x}{1-x}(-1) + \log x + 1 = \log\frac{x}{1-x}$$

y por tanto

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x = 1-x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

siendo $g'(x) > 0$ para $x > 1/2$ y $g'(x) < 0$ para $x < 1/2$. En consecuencia g, y por ende f, tiene un mínimo en $x = 1/2$ siendo f una función estrictamente creciente a la derecha de $1/2$ y estrictamente decreciente a la izquierda de $1/2$. Además g' es estrictamente creciente, porque el logaritmo lo es y, trivialmente, también lo es $x/(1-x)$. En consecuencia (y sin necesidad de calcularla) sabemos que $g'' \geq 0$. Pero entonces $f(x) = e^{g(x)}$ tiene por derivada segunda $(e^{g(x)}g'(x))' = e^{g(x)}[(g'(x))^2 + g''(x)] \geq 0$ y por tanto f es convexa. Con esa información ya resulta muy sencillo construir la gráfica.

Además la «simetría de la fórmula» de f sugiere una «simetría geométrica» en la gráfica, como así ocurre y aparece explícitamente señalado en uno de

[9] Observe que $x \to 0$, $\log x \to -\infty$ ¿quien gana? Justifíquelo usando la regla de L'Hospital.

los ítems. La demostración analítica de la simetría se hace comprobando con un cálculo sencillo que

$$f(\frac{1}{2} - y) = f(\frac{1}{2} + y) \quad \text{para } y \in [0, \frac{1}{2}]$$

o sea, que sustituyendo en la fórmula x por $1/2 - y$ o bien por $1/2 + y$ se obtiene el mismo valor.

La desigualdad

$$(1-x)^{(1-x)} x^x \le (1-x)^2 + x^2$$

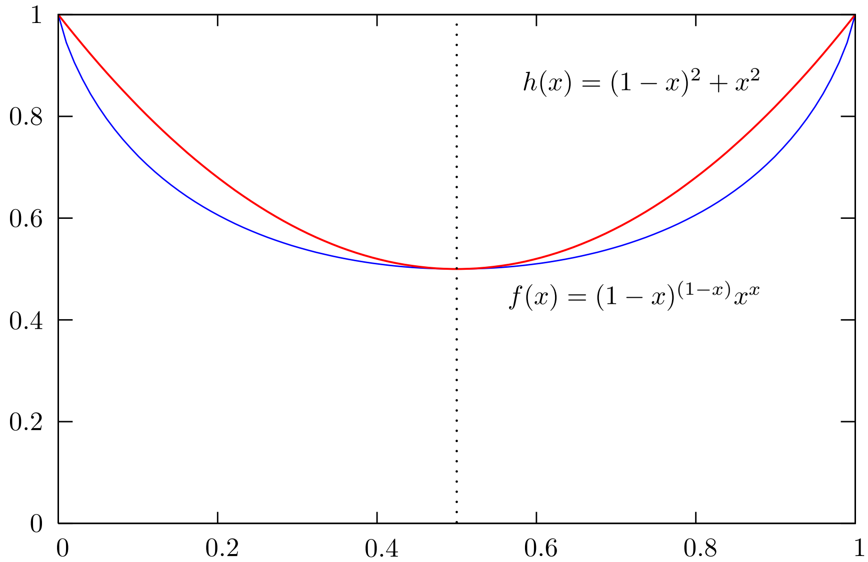
es consecuencia de que la función exponencial es convexa y por tanto

$$e^{(1-t)w+tz} \le (1-t)e^w + te^z$$

cualesquiera que sean $w, z \in \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$ lo cual conduce a

$$(1-x)^{(1-x)} x^x = e^{(1-x)\log(1-x)+x\log x} \le (1-x)e^{\log(1-x)} + xe^{\log x} = (1-x)^2 + x^2$$

obteniendo de ese modo la fórmula buscada.



$\square$

4.5.3 *Determine intervalos en los que exista una única solución para las ecuaciones siguientes*

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12 = 0; \quad x - x^2 - \log(1+x) = 0.$$

Solución: La función $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$ un polinomio de grado 4 por lo que, cómo máximo, tiene 4 ceros que son las raíces de la primera ecuación. Como f es infinitamente derivable, entre cada dos ceros de f ha de existir un máximo o mínimo relativo, que serán, a la sazón, puntos en los que se anula f'. La derivada

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x+1)(x-2)$$

se anula en $x = -1, 0, 2$ siendo $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$, $f'(x) > 0$ en $(-1, 0)$, $f'(x) > 0$ en $(0, 2)$ y $f'(x) > 0$ en $(2, +\infty)$. Así pues f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ hasta $f(-1) = 7$ por lo que en ese intervalo no existe ningún cero de f. En el intervalo $[-1, 0]$ tampoco puede existir debido al crecimiento. En el intervalo $[0, 2]$ f va decreciendo desde $f(0) = 12$ hasta $f(2) = -20$ debiendo por tanto existir un cero en dicho intervalo como consecuencia del teorema de Bolzano, y só existe uno puesto que la función es estrictamente decreciente en dicho intervalo. Como f es estrictamente creciente en $[2, +\infty)$ (por ser $f' > 0$) y $\lim_{x \to +\infty} = +\infty$ existe uno y sólo un cero en dicho intervalo, de hecho el cero está en el intervalo $[2, 3]$ puesto que $f(3) = 39$. Resumiendo, el polinomio propuesto tiene sólo dos raíces reales, una en el intervalo $[0, 2]$ y otra en el $[2, 3]$.

Una vez «separadas» las raíces, el cálculo aproximado de las mismas podría realizarse con el mismo procedimiento que el utilizado en la demostración abstacta del teorema de Bolzano. Pero esa tarea, ya rutinaria, puede ser realizada por una máquina y, de hecho, MAXIMA dispone de un comando para obtener soluciones aproximadas en tales situaciones[10]

`find_root(`*Función=0, Variable, Punto 1, Punto 2*`);`

`find_root(3*x^4 -4* x^3 - 12*x^2 + 12=0,x,0,2);` devuelve 0,95786495175773.

`find_root(3*x^4 -4* x^3 - 12*x^2 + 12=0,x,2,3);` devuelve 2,633286420252845.

Para el caso de polinomios, para obtener raíces aproximadas, se pueden utilizar también

- `realroots(`*Polinomio=0, Precisión*`);` donde *Precisión* es de la forma 0.00001 que calcula las raíces reales fijando la precisión de la aproximación
- `allroots(`*Polinomio=0*`);` que proporciona las raíces reales y complejas.

Para separar los ceros de la función $g(x) = x - x^2 - \log(1+x)$ utilizaremos ideas similares. En primer lugar, el dominio de la función es $(-1, +\infty)$ y se trata de una función infinitamente derivable, porque el logaritmo y los polinomios lo son. Además $\lim_{x \to -1^+} g(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ (ya que es x^2 quien determina el tamaño de g en $+\infty$) por lo tanto g tiene al menos un cero; de hecho $g(0) = 0$. Sólo nos falta determinar si g tiene más ceros. Como

$$g'(x) = 1 - 2x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x(1+2x)}{1+x}$$

tenemos que g' se anula en $x = -1/2$ y $x = 0$ siendo $g'(x) < 0$ cuando $x \in (-1, -1/2)$, $g'(x) > 0$ para $x \in (-1/2, 0)$ y $g'(x) < 0$ para $x \in (0, +\infty)$. En $x = -1/2$ existe un mínimo, siendo

$$g(-1/2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \log\frac{1}{2} = \log 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\log\frac{2^4}{e^3} < 0$$

Hemos afirmado que $\log(2^4/e^3) < 0$, es decir, que $2^4/e^3 < 1$. Esta desigualdad no es evidente y el lector cuidadoso quizá haya comprobado, con Maxima o con cualquier otra calculadora, que efectivamente así es. Sin embargo, un instante de reflexión muestra que esa no es una respuesta satisfactoria desde un punto de vista riguroso, puesto que tales herramientas electrónicas conocen el valor aproximado de e, mientras que nosotros, realmente sólo sabemos que e es el límite de la sucesión monótona creciente $(1 + 1/n)^n$. En consecuecia

$$2^4 = 16 < (1 + 1/10)^{30} = \frac{17449402268886407318558803753801}{1000000000000000000000000000000} \approx 17.449 < e^3$$

En consecuencia, existe un único cero en el intervalo $(-1, -0,5)$ cuyo valor aproximado podemos calcular mediante
`find_root (g(x),x,-0.99,-0.5);` obteniendo -0.68380262375202. En el intervalo $(-1/2, 0)$ no existe ningún cero pues g es estrictamente creciente y $g(0) = 0$, tampoco existe ningún cero de g en el intervalo $(0, +\infty)$ pues g es estrictamente decreciente en ese intervalo. Con esto finaliza el análisis sobre la distribución de ceros de la función g. □

4.5.4 *Pruebe que* $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ *si* $x \in (0, \pi/2)$.

Solución: La desigualdad propuesta es equivalente a probar que la función $f : (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) := \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x - x^2$ cumple que $f(x) > 0$. La función f puede prolongarse por continuidad en $x = 0$ haciendo $f(0) = 0$. Si f fuera estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$ tendríamos resuelto el problema. Y también lo tendríamos resuelto si al sustituir $f(x)$ por su desarrollo de Taylor fueramos capaces de asegurar que $f(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$. Veamos si alguna de estas estrategias, o ambas, producen el resultado deseado.

$$f'(x) = \cos x \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - 2x$$

Es claro que $f'(0) = 0$ pero no está claro el signo de $f'(x)$ en $(0, \pi/2)$. Podemos tratar de aplicar a f' la misma idea y calcular f''

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^3 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\cos^3 x} - 2 \\ &= \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 \\ &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 \\ &= \cos x + \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 2 = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos x + 1 + 2\operatorname{tg}^2 x - 2 = \cos x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1 \\ &= 2\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = 2(\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}) \\ &\geq 2(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}) = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}(\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} - 1) = 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Con lo cual $f''(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$, por lo tanto f' es estrictamente creciente y siendo $f'(0) = 0$ se tiene que $f'(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$, es decir f es estrictamente creciente en $(0, \pi/2)$. Hemos obtenido lo que buscábamos.

Utilizando el desarrollo de Taylor de f en $x = 0$ tenemos

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{f'''(c)}{3!}x^3$$

para $x \in (0, \pi/2)$. Pero

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (\cos x + 2\operatorname{tg}^2 x - 1)' = -\operatorname{sen} x + 2\operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= (\operatorname{sen} x)(-1 + \frac{2}{\cos^3 x}) = \frac{\operatorname{sen} x(2 - \cos^3 x)}{\cos^3 x} \end{aligned}$$

y por tanto $f'''(c) > 0$ para cualquier $c \in (0, \pi/2)$. Con este procedimiento obtenemos también lo que buscábamos. □

4.5.5 *Sean $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[0,1]$ y derivables en $(0,1)$, tales que*

$$f(0) = 0, \qquad g(0) = 2, \qquad |f'(x)| \leq 1, \qquad |g'(x)| \leq 1,$$

para todo $x \in (0,1)$. Demuestre que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in [0,1)$ y $f(1) \leq g(1)$.

Solución: Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial existen $\alpha, \beta \in (0,1)$ tales que

$$f(x) = f(0) + f'(\alpha)x = f'(\alpha)x, \qquad g(x) = g(0) + g'(\beta)x = 2 + g'(\beta)x.$$

Por tanto,

$$g(x) - f(x) = 2 + (g'(\beta) - f'(\alpha))x.$$

Pero $|g'(\beta) - f'(\alpha)| \leq |g'(\beta)| + |f'(\alpha)| \leq 1 + 1 = 2$ o dicho de otra forma $-2 \leq g'(\beta) - f'(\alpha) \leq 2$. En consecuencia

$$g(x) - f(x) = 2 + (g'(\beta) - f'(\alpha))x \geq 2 - 2x \geq 0$$

y se obtiene así que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Además

$$g(x) - f(x) \geq 2 - 2x > 0$$

para $x \in [0,1)$. □

4.5.6 *(1) Pruebe que la función $f(x) = x \log x$ es estrictamente convexa en $(0, \infty)$ –en particular esto significa que el producto de dos funciones cóncavas puede ser una función estrictamente convexa–*

(2) Si x, y, a, b son reales positivos pruebe que

$$x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{b} \geq (x + y) \log \frac{x + y}{a + b}$$

siendo la desigualdad estricta salvo si $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

(3) Determine el valor mínimo de

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n}$$

bajo la condición $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S$, siendo $S > 0$ constante.

Solución:

Para analizar la convexidad estudiaremos el signo de la segunda derivada de f.

$$f'(x) = \log x + x\frac{1}{x} = \log x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$

por lo que f es estrictamente convexa.

Observemos que $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} = 1$ y en consecuencia utilizando la convexidad de f se tiene

$$\begin{aligned} x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{a} &= a\frac{x}{a} \log \frac{x}{a} + b\frac{y}{b} \log \frac{y}{a} \\ &= (a + b)(\frac{a}{a + b}\frac{x}{a} \log \frac{x}{a} + \frac{b}{a + b}\frac{y}{b} \log \frac{y}{a}) \\ [f \text{ es convexa}] &\geq (a + b)f(\frac{a}{a + b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a + b}\frac{y}{b}) \\ &= (a + b)f(\frac{x + y}{a + b}) = (x + y) \log \frac{x + y}{a + b} \end{aligned}$$

La desigualdad del segundo apartado está probada.

Continuando con la demostración de dicho ítem, supongamos $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$. Entonces también se cumple $\frac{x}{a} = \frac{x+y}{a+b}$, como es fácil probar, y por tanto

$$x \log \frac{x}{a} + y \log \frac{y}{a} = (x + y) \log \frac{x}{a} = (x + y) \log \frac{x + y}{a + b}$$

Por otra parte siendo f estrictamente convexa la igualdad

$$f(\frac{a}{a + b}z + \frac{b}{a + b}w) = \frac{a}{a + b}f(z) + \frac{b}{a + b}f(w)$$

sólo puede darse cuando $z = w$, lo cual completa la demostración del segundo apartado.

Veamos ahora el tercer apartado.

$$\begin{aligned}
x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} &= e^{x_1 \log x_1} e^{x_2 \log x_2} \dots e^{x_n \log x_n} \\
&= e^{f(x_1)+\dots+f(x_n)} \\
&= e^{n(\frac{1}{n} f(x_1)+\dots+\frac{1}{n} f(x_n))} \\
[f \text{ convexa y exponencial crece}] &\geq e^{nf(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\dots+\frac{1}{n}x_n)} = e^{nf(S/n)} \\
&= e^{n(S/n)\log(S/n)} = e^{S\log(S/n)} \\
&= (e^{\log(S/n)})^S = (\frac{S}{n})^S
\end{aligned}$$

Y cuando $x_1 = x_2 = \dots = x_n = S/n$ se cumple

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \dots x_n^{x_n} = (\frac{S}{n})^S$$

siendo, por tanto ese el valor mínimo de la expresión. $\square$

Ejercicios propuestos

4.1) Estudie la derivabilidad en $x = 0$ de las siguientes funciones

$$f(x) = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \log |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

4.2) Calcule las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + \arccos \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $x > 1$.

b) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $x \in (0, \pi)$.

c) $f(x) = x^{x^x}$, $x > 0$.

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

e) $f(x) = x$ si $x \leq 0$, $f(x) = \frac{4x^2}{\pi^2}$ si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 1$ si $\frac{\pi}{2} \leq x$.

f) $f(x) = -x + a$ si $x \leq 0$, $f(x) = x^2 + bx$ si $0 < x < 1$, $f(x) = c$ si $1 \leq x$.

4.3) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$ para cada par de números reales x, y. Pruebe que f es una función constante.

4.4) Sea f una función derivable en $x \in (a, b)$. Pruebe que existe el límite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

De un ejemplo de una función f para la que existe el límite anterior, sin ser derivable en x.

4.5) Pruebe que el determinante de una matriz cuyos elementos son funciones derivables también es una función derivable.

Considerando el determinante de orden n

$$F_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix}$$

Establecer la fórmula $F_n'(x) = nF_{n-1}(x)$ y deducir que $F_n(x) = x^n + nx^{n-1}$.

4.6) Pruebe que si $0 < x_1 < x_2 < \pi/2$ se tiene

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$$

4.7) En cada uno de los casos siguientes, encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y los máximos y mínimos relativos y absolutos de f (si existen) en el conjunto en el que f esta definida:

a) $f(x) = x^3 + ax + b$; $x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$; $|x| > 3$.

c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-1)^4$; $x \in [0,1]$.

d) $f(0) = 1$, $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$; $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

4.8) Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una elipse de semiejes a y b.

4.9) Halle la relación entre la arista de un cubo y el radio de una esfera para que siendo constante la suma de sus áreas, sea mínimo el valor de la suma de sus volúmenes.

4.10) Calcule el tiempo necesario para cruzar en línea recta y con la mínima velocidad, una calle de anchura k, por el centro de la cual circulan a la misma velocidad y en el mismo sentido, automóviles de ancho a separados uno de otro por una distancia d.

4.11) Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y x_0 un punto de I. Sabiendo que f es derivable en todos los puntos de I distintos de x_0 y que existe el límite de $f'(x)$ cuando x tiende a x_0, pruebe que f también es derivable en x_0.

4.12) Sea $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable en $(0,1)$, con derivada acotada. Pruebe que f es uniformemente continua en $(0,1]$.

4.13) Pruebe que $0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \frac{x^2}{2}$ si $x \in (0, \pi/2)$

4.14) Establecer las siguientes desigualdades:

$\tanh x \leq x \leq \operatorname{senh} x$, $\forall x \in [0, +\infty)$; siendo $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

$e^x > \frac{1}{1+x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$;

$x - \frac{1}{2}x^2 < \log(1+x) < \operatorname{tg} x$, $\forall x \in (0,1)$;

$\frac{1}{1+x}x < \log(1+x) < x$, $\forall x > -1$;

$1 - \frac{a}{b} < \log b - \log a < \frac{b}{a} - 1$, para $0 < a < b$;

$\frac{1}{\cos^2 x} < \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x}{y - x} < \frac{1}{\cos^2 y}$, para $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$.

4.15) Demuestre que para todo $x \geq 0$ se tiene $|\sqrt[3]{1+x} - (1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9})| \leq \frac{5x^3}{81}$

4.16) Pruebe que para una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable hasta el orden n que se anula en $n + 1$ puntos distintos de $[a, b]$, existe un punto en (a, b) donde $f^{(n)}$ es nula.

4.17) Sea $f : (a, b) \longrightarrow [0, \infty)$ tres veces derivable en (a, b). Supongamos que existen dos puntos $x_1 < x_2 \in (a, b)$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pruebe que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'''(c) = 0$.

4.18) Calcule los siguientes límites

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1+\operatorname{sen} x - e^x}{(\operatorname{arctg} x)^2} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{\log x}} \qquad \lim_{x\longrightarrow +\infty} x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\log x}{x - \sqrt{x}} \qquad \lim_{x\longrightarrow +\infty} x^{\frac{5}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$$

4.19) Determine los siguientes desarrollos limitados en un entorno del origen

De orden 4 para $f(x) = \log^2(1 + x)$; De orden 3 para $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$;
De orden 6 para $f(x) = \log(\cos x)$; De orden 4 para $f(x) = (1 + x)^x$.

Hágalo también usando Maxima.

4.20)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x) - \log(1+x)}{x - \operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\sec x - \operatorname{sen}^2 x}{x(x - \operatorname{tg} x)\cos x}$$

Hágalo también usando Maxima.

4.21) Haciendo uso de la fórmula de Taylor para la función $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$ situando el término complementario en el lugar de las derivadas terceras, calcule aproximadamente $(1,03)^{\frac{1}{3}}$. Estime el error cometido en la aproximación.

4.22) Calcule $\cos 64°$ con error menor de una milésima.

4.23) Represente gráficamente la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ para $x > 0$

a) ¿Cuál de los dos números e^π, π^e es mayor?

b) ¿Cuantas soluciones tiene la ecuación $n^m = m^n$ en $\mathbb{N}$?

Hágalo también usando Maxima.

4.24) Estudie y dibuje las gráficas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \tfrac{x+e^x}{x-e^x}, \quad f(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}}, \quad f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

Hágalo también usando Maxima.

4.25) Las funciones seno, coseno y tangente hiperbólicos se definen mediante las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

a) Estudie los dominios de definición, continuidad, derivabilidad, convexidad y represente gráficamente estas funciones.

b) Estudie la existencia de inversa para cada una de ellas y sus dominios de definición. Dichas inversas son llamadas argumento seno hiperbólico,... Exprese dichas inversas en términos de la función log

c) Estudie los dominios de definición, continuidad, derivabilidad, convexidad y represente gráficamente estas funciones inversas.

d) Demuestre las siguientes fórmulas:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x \qquad \cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$$

y deduzca las fórmulas de $\operatorname{senh}^2 x, \cosh^2 x$ en función de $\cosh 2x$

e) Calcule los primeros términos del desarrollo limitado de estas funciones.

4.26) Pruebe que para $x \in [0, \pi/2]$ se verifica $\operatorname{sen} x \geq \frac{2x}{\pi}$.

4.27) Sea $f : (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\log(\log x)$. Pruebe que f es convexa y que si $a, b \in (1, \infty)$ se cumple $\log(\frac{a+b}{2}) \geq \sqrt{\log a \log b}$.

4.28) Demuestre que la media aritmética de n números reales positivos es mayor o igual que la media geométrica.