5.5. Ejercicios

Ejercicios resueltos

5.5.1 *Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Pruebe que*

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \int_0^1 f,$$

para cualquier elección de $z_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ para k y n enteros con $1 \leq k \leq n$.

Solución: Al ser f una función continua es integrable (corolario 5.2.3). Aplicando la caracterización de la integrabilidad en términos de la norma de la partición (teorema 5.2.8) *sabemos* que fijado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que para cualquier partición P de norma menor que δ y cualquier suma de Riemann correspondiente a una tal partición se verifica que

$$\Big| \int_0^1 f - S(f, \pi, z_i) \Big| < \varepsilon.$$

La fórmula que *queremos* probar significa, en otros términos, que fijado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ se cumple

$$\Big| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \Big| < \varepsilon$$

pero obviamente

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) = \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Big(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\Big)$$

y esto último sumatorio es una suma de Riemann correspondiente a la partición de $[0,1]$ determinada por los puntos $0 < 1/n < 2/n < \ldots < n/n$, o sea es una suma del tipo $S(f, P, z_i)$ ante considerada, y si su norma fuera menor que δ podríamos escribir

$$\Big| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \Big| < \varepsilon.$$

En nuestro caso los puntos de la partición están equidistribuidos y por tanto su norma es $1/n$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal $1/n_0 < \delta$ y en consecuencia para $n > n_0$ la norma de la correspondiente partición es inferior a δ que es justo lo que necesitamos para poder escribir

$$\Big| \int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(z_k) \Big| < \varepsilon$$

para $n > n_0$. □

5.5.2 *Calcule*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}$$

SOLUCIÓN: Este es un límite típico para calcularlo mediante sumas de Riemann

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2-0^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} =$$

$$\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-(0/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1/n)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(2/n)^2}} + \ldots \frac{1}{\sqrt{1-((n-1)/n)^2}}\Big) = S(f,P,z_i)$$

para la partición de $[0,1]$ dada por

$$P = \{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\}$$

siendo

$$z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{n}, \ldots z_n = \frac{n-1}{n}$$

y

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}}\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t}\,dt = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$$

Y calculamos así el límite con técnicas de integración. □

5.5.3 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea $F : \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

(1) Calcule $\lim_{x\to 0} F(x)$. Definiendo $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x)$ pruebe que la función así definida en $\mathbb{R}$ es continua.

(2) Pruebe que F es derivable $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y calcule su derivada.

Solución: La función F está bien definida para cada $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque al ser f continua $\int_{-x}^{x} f$ está bien definido. Además la función

$$G(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = -\int_{0}^{-x} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

es derivable como consecuencia del teorema fundamental del cálculo y el teorema de la función compuesta siendo

$$G'(x) = -f(x)(-1) + f(x) = 2f(x)$$

Para calcular $\lim_{x\to 0} F(x)$ utilizaremos la regla de L'Hospital y obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to 0} \frac{G(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{G'(x)}{2} = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

puesto que f es continua. Salvo para $x = 0$ la función F es un cociente de dos funciones derivables y por tanto continuas, así que F es continua en $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y como $F(0)$ ha sido definida mediante $F(0) = \lim_{x\to 0} F(x)$, también es continua en el origen.

F es derivable en $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ por ser un cociente de funciones derivables siendo

$$F'(x) = \frac{G'(x)2x - 2G(x)}{4x^4} = \frac{4xf(x) - 2\int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{4x^4} = \frac{2xf(x) - \int_{-x}^{x} f(t)\,dt}{2x^4}$$

La derivabilidad de F en $x = 0$ depende de que exista $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$. □

5.5.4 *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y monótona creciente. Pruebe que la función definida por*

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

verifica

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) \text{ para todo } x, y \in [a, b]$$

¿Es cierto el resultado si f es únicamente continua?

Solución: Por el teorema fundamental del cálculo F es derivable siendo $F'(x) = f(x)$ y por tanto F' es creciente, pero entonces F es convexa, de acuerdo con el corolario 4.4.5. Y la fórmula que queremos demostrar es sólo un caso particular de la convexidad de F.

El lector escrupuloso se habrá percatado que en la hipótesis del corolario utilizado se pedía que el dominio de la función fuese un intervalo abierto, mientras que aquí lo hemos aplicado a un intervalo cerrado, así que, en principio, la convexidad de F sólo está garantizada en (a, b). Sin embargo podemos utilizar una astucia para solventar este inconveniente. Prolongamos f a $(a-1, b+1)$ haciendo $f(x) = f(a)$ para $x \in (a-1, a]$ y $f(x) = b$ para $x \in [b, b+1)$, con lo cual F' es creciente en $(a-1, b+1)$ siendo convexa en dicho intervalo y, en particular en $[a, b]$.

El crecimiento de f es esencial. Si, por ejemplo, tomamos $f(x) = \operatorname{sen} x$ definida en $[0, \pi]$ entonces la función F no es convexa. $\square$

5.5.5 *Sea f una función integrable Riemann en $[a, b]$, pruebe que*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

Utilice el resultado anterior para calcular

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

para $n = 1, 2, 3$

Solución: Hagamos en la segunda integral el cambio de variable $t = a+b-x$ que produce $dt = -dx$. Veamos ahora las modificaciones que se producen en los extremos de integración con el cambio de variable: para $x = a$ se tiene $t = a+b-a = b$ y para $x = b$ se tiene $t = a+b-b = a$ así que

$$\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_b^a f(t)(-dt) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$$

Observe que la última igualdad es obvia porque ambas expresiones, con independencia de cómo denotemos la variable, representan el valor de $\int_a^b f$.

En particular podemos aplicar la fórmula anterior y tenemos

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\, dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\, dx$$
$$= \pi \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\, dx - \int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

y por tanto

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^n x}{1+\cos^2 x} dx$$

En el caso de $n = 1$ para calcular esta última integral hacemos el cambio de variable $t = \cos x$ que es derivable y lleva el extremo 0 al 1 y el π al -1 siendo $dt = -\operatorname{sen} x dx$, de modo que

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

El caso $n = 3$ sigue las mismas pautas y dejamos al cuidado del lector los detalles. En el caso $n = 2$ hay que prestar atención para no llegar a conclusiones erróneas. Para calcular

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx$$

observamos que se trata de una función par en seno y coseno, por lo que el cambio aconsejable es, como sabemos por las técnicas de cálculo de primitivas, $t = \operatorname{tg} x$, que nos conduce aparentemente a

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^0 \frac{(\operatorname{sen}^2 x)/(\cos^2 x)}{1/\cos^2 x + 1}\cos^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int_0^0 \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt$$

con lo que, según esto, la integral buscada sería nula. Pero esto es imposible, porque el integrando es continuo y estrictamente positivo.

¿Dónde está el error? Está en que el cambio de variable no corresponde a una función derivable en $[0,\pi]$. Aunque sí lo es en $[0,\pi/2)$ y en $(\pi/2,\pi]$. Hagamos pues las cosas con cuidado

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx + \int_{\pi/2}^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt + \int_{-\infty}^0 \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt\end{aligned}$$

Las integrales que nos han aparecido requieren un comentario, porque hasta ahora hemos utilizado únicamente funciones acotadas definidas en un intervalo cerrado y acotado. La integración sobre intervalos no acotados será objeto de estudio detallado en un capítulo posterior, pero anticipándonos a dicho estudio nos limitaremos a decir ahora que, cuando tienen sentido, se definen de manera natural como límites de intregales definidas sobre intervalos acotados. De suerte que, en concreto,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt &= \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} - \operatorname{arctg} x \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2}-1)\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(hemos omitido los cálculos para obtener la primitiva). La otra integral vale lo mismo, siendo por tanto, el resultado final $(\sqrt{2}-1)\dfrac{\pi}{2}$. □

Ejercicios propuestos

5.1) Utilizando la definición de integral calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$ siendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

5.2) Calcule los límites de las siguientes sumas de Riemann:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{n+j}{n^2+j^2}, \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sen} \frac{j\pi}{2n}, \qquad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} \operatorname{sen} \frac{j\alpha}{2n+1}$$

5.3) Calcule $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\Big((n+1)(n+2)\ldots(n+n)\Big)^{1/n}$.

5.4) Haciendo uso de una integral definida adecuada calcule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

5.5) Calcule

$$\lim_{n} \frac{n}{n^2+1} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cos \frac{2\pi}{n} + \cdots + \operatorname{sen} \pi \cos \pi\right)$$

5.6) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{n \to \infty} 4n \left(\frac{1}{1^2 + 4n^2} + \frac{1}{3^2 + 4n^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2 + 4n^2}\right)$$

5.7) Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $\int_a^b |f(x)| dx = 0$. Pruebe que $f(x) = 0$ en todos los puntos $x \in [a, b]$.

5.8) Calcule $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^n x\,dx$ y $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x\,dx$.

5.9) Sea f una función continua en $[a, b]$, y sea $M = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$. Pruebe que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = M.$$

Indicación: Suponga primero que $M = 1$.

5.10) Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que para todo $x \in (a,b)$ se verifica $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

5.11) Halle las derivadas de la función $F(x)$ en cada uno de los casos siguientes:

$$F(x) = \int_0^{x^3} \operatorname{sen}^3 t\,dt \quad F(x) = \int_{\operatorname{sen} x^2}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt \quad F^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt\ .$$

5.12) Sea $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, con $\int_0^{x^2} (1+t)f(t)\,dt = 6x^4$. Determine f.

5.13) Sea f una función dos veces derivable en $[a,b]$ siendo f'' continua en $[a,b]$. Pruebe que se verifica la siguiente fórmula:

$$\int_a^b x f''(x)\,dx = (bf'(b) - f(b)) - (af'(a) - f(a))$$

y aplíquelo para calcular

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx.$$

Indicación: Puede hacerse integración por partes o bien observar que la función $F(x) := xf'(x) - f(x)$ es una primitiva de $x \mapsto xf''(x)$.

5.14) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\displaystyle\int_{-x^2}^{x^2} \log(2 + \operatorname{sen} t)\,dt}{x^2(x - \operatorname{sen} x)}$$

5.15) Sea $f : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ continua. Pruebe que la función definida por

$$g(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x xf(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx} \qquad \text{para } x \neq 0 \text{ y } g(0) = 0$$

es creciente.

5.16) Sea $f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y, para cada $x \in [0,+\infty)$, sea

$$F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt$$

a) Calcule $F'(x)$ para cada $x \in [0, +\infty)$ y demuestre que

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)\,du$$

b) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{1+\frac{1}{n}} \frac{(1+\frac{1}{n}-y)}{(1+y)^3}\,dy$

5.17) Calcule las siguientes integrales:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx \qquad \int_1^2 \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$$
$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cos x\,dx \qquad \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x \log(\operatorname{sen} x)\,dx \qquad \int_0^{a^2} \frac{x}{a^4+x^4}\,dx$$

5.18) Calcule el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y = x^3 - 12x$ y $y = x^2$.

5.19) Calcule el área de la intersección de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

5.20) Calcule el volumen del sólido engendrado al girar alrededor del eje OX el recinto limitado por las curvas $y = 0, y = x^2 + 1$, y la tangente a esta última en el punto de abscisa $x = 1$.

5.21) Calcule el volumen del sólido engendrado al hacer girar un disco de radio r alrededor de una recta situada a una distancia a del centro del disco, donde $a > r$.

5.22) Sea f una función real de variable real continua y periódica, con periodo T. Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $\int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt$. Calcule $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

5.23) Sea $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$.

a) ¿Cuál es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que f admite una primitiva?

b) Determine una primitiva en dicho conjunto.

5.24) Mediante un cambio de variable establezca la igualdad

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

Como aplicación, pruebe que $\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^4(2x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(2x)dx = \frac{3\pi^2}{16}$.

5.25) Se considera la función $f_n(x) = \dfrac{x^n(qx-p)^n}{n!}$ donde $n, q, p \in \mathbb{N}$

a) Pruebe que f_n y todas sus derivadas toman valores enteros para $x = 0$ y $x = p/q$

b) Si $I_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(x) \operatorname{sen} x\, dx$, Pruebe que $\lim_n I_n = 0$

c) Mediante integración por partes en la expresión de I_n (sin escribir explícitamente f_n'), Demuestre que si $\pi = p/q$ entonces I_n sería un entero no nulo. Concluir que $\boxed{\pi \text{ es irracional}}$.