

6.7. Ejercicios

Resueltos

A lo largo del capítulo hay multitud de ejemplos. No añadiremos ningún otro.

Ejercicios propuestos

6.1) Calcule las siguientes primitivas elementales, en los intervalos donde las correspondientes funciones estén bien definidas:

$$\begin{array}{lll} \int x \sqrt[5]{x^3} \sqrt[7]{x^2} dx & \int \frac{3 \cdot 5^x + 6 \cdot 7^x}{2^{x+1}} dx & \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx \\ \int \cos^2 x dx & \int e^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{sen} 2x dx & \int \frac{2 \cdot x^3}{4 + 4 \cdot x^8} dx \\ \int \frac{1}{x \log_2 x} dx & \int \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4 + 2}} dx & \int \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{1 + x^2} dx \\ \int \operatorname{sen} 3x \cos 3x dx & \int \frac{(\log x)^3}{x} dx & \int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1 - x^2}} dx \\ \int \operatorname{tg}^2 x dx & \int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx & \int \frac{x^3}{x^8 + 5} dx \end{array}$$

6.2) Calcule las siguientes primitivas:

$$\begin{array}{lll} \int (x^2 + 3x)2^x dx & \int e^{2x} \operatorname{sen} x dx & \int \log x dx \\ \int x^n \log x dx & \int \frac{x}{\cos^2 x} dx & \int \frac{\log^3 x}{x^2} dx \\ \int (\operatorname{arctg} x)^2 x dx & \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx & \int \frac{x e^{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ \int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})(\log x)^2 dx & \int \left(\frac{\log x}{x} \right)^2 dx & \end{array}$$

6.3) Obténganse las siguientes fórmulas de recurrencia, siendo n un número entero positivo.

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} dx + \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}}$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}^{n+1} x}{\cos^{m+1} x} \, dx = \frac{1}{m} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\cos^m x} - \frac{n}{m} \int \frac{\operatorname{sen}^{n-1} x}{\cos^{m-1} x} \, dx$$

6.4) Obtenga la siguiente fórmula de recurrencia

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \, dx$$

6.5) Calcule las primitivas de las siguientes funciones racionales:

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2} \, dx \quad \int \frac{x^7 + x^3}{x^4 - 1} \, dx \quad \int \frac{3x^2 + 2x + 4}{(x+1)(x^2+1)} \, dx$$

$$\int \frac{2x^4 - x^3 + 2}{x^2(x^2+1)^2} \, dx \quad \int \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^4 + x^2 + 1} \, dx \quad \int \frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)^3} \, dx$$

$$\int \frac{1}{x(x^3+1)} \, dx \quad \int \frac{x-1}{x^2(x^2+1)^2} \, dx \quad \int \frac{1}{(x^2+1)^3} \, dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2} \, dx \quad \int \frac{1}{(x^2+2)^2} \, dx \quad \int \frac{1}{(x-1)^2(x^2+3)} \, dx$$

$$\int \frac{4x^2}{(x^2+3)^2} \, dx \quad \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} \, dx \quad \int \frac{2x^2+1}{(x-1)^6} \, dx$$

6.6) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x-1}} \quad \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$\int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x} \, dx \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} \, dx \quad \int \sqrt{1+x+x^2} \, dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} \quad \int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \, dx \quad \int \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+4}} \, dx$$

$$\int \frac{dx}{(1+2x)^3 \sqrt{1+x+x^2}} \quad \int x^3 \sqrt[3]{1+\sqrt{x^3}} \, dx \quad \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{(1-2x^2)^5}}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} \, dx \quad \int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \, dx \quad \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}$$

6.7) Calcule las siguientes primitivas

$$\begin{aligned} & \int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, dx & \int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x \, dx & \int \frac{dx}{\cos x} \\ & \int \cot^4 x \, dx & \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \, dx & \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} \\ & \int \frac{dx}{2 \operatorname{sen} x - \cos x + 5} & \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} & \int \frac{dx}{\cos^3 x} \\ & \int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x} \, dx \end{aligned}$$

6.8) Calcule las siguientes primitivas:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{a^2 e^x + b^2 e^x} \, dx & \int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x + 1} \, dx & \int \frac{1 + \operatorname{senh} x}{1 + \cosh x} \, dx \\ & \int \operatorname{senh}^2 x \, dx \end{aligned}$$

6.9) Calcule

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 16x + 12}}, \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^4}} \, dx$$

6.10)

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x \, dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

6.11)

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} \, dx$$

6.12)

$$\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x})}$$



Siempre que sea posible, utilice MAXIMA para comparar los resultados obtenidos manualmente con los proporcionados por el ordenador.

