7.7. Ejercicios

Resueltos

A lo largo del capítulo han ido apareciendo varios ejemplos en los que se analizaba la convergencia de una serie numérica o de una integral impropia. En este apartado de ejercicios resueltos nos ocuparemos únicamente de la utilización de la constante de Euler en el cálculo de la suma de ciertas series numéricas.

En el ejercicio 15 del capítulo 2 establecimos que si $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ entonces $x_n = H_n - \log n$ es una sucesión monótona decreciente acotada inferiormente por 0 y por tanto convergente cuyo límite recibe el nombre de constante de Euler Γ. Así que $H_n = \log n + \Gamma + \varepsilon_n$ siendo $\lim \varepsilon_n = 0$. Podemos dar ahora otra demostración de este hecho. Para ello basta considerar la función escalonada g que toma el valor $\frac{1}{n}$ en el intervalo $[n, n+1)$. Evidentemente se verifica que $f(x) = \frac{1}{x} \leq g(x)$ en $[0, \infty)$ y, por tanto $\log n < \log(n+1) = \int_1^{n+1} f \leq \int_1^n g = H_n$. Por otra parte la sucesión $H_n - \log n$ es monótona decreciente ya que

$$\begin{aligned}
(H_{n+1} - \log(n+1)) - (H_n - \log n + 1) &= \frac{1}{n+1} + \log(\frac{n}{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} + \log(1 - \frac{1}{n+1}) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(1-\xi)^2}\frac{1}{n^2} \\
&= -\frac{1}{2(1-\xi)^2}\frac{1}{n^2} < 0
\end{aligned}$$

como consecuencia de la fórmula de Taylor, y al estar acotada inferiormente por 0 es convergente..

Llamemos

$$P_{2n} := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}H_n \quad \text{y}$$

$$I_{2n+1} := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n+1} = H_{2n+1} - P_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n.$$

7.7.1 *Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ y calcular el valor de la suma.*

Solución: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ es convergente (criterio de Leibniz) y $S_{2n+1} = I_{2n+1} - P_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - \frac{1}{2}H_n = \log(2n+1) + \Gamma + \varepsilon_{2n+1} - \log n - \Gamma - \varepsilon_n$ de donde la suma de la serie es $\log 2$. □

7.7.2 *Estudiar la convergencia de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$

y calcular su suma en caso de ser convergente.

SOLUCIÓN: La serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n(n+1)(n+2)}$$
es absolutamente convergente pues el término general de la misma es equivalente a $3/n^2$. Para calcular su suma utilizaremos una descomposición en fracciones simples análoga a la utilizada para el cálculo de primitivas (v. la sección 6.2.1) y obtenemos que
$$\frac{3k-1}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{7}{2\,(k+2)} + \frac{4}{k+1} - \frac{1}{2\,k}.$$
Por tanto
$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{k(k+1)(k+2)} &= -\frac{7}{2}(H_{n+2} - 1 - \frac{1}{2}) + 4(H_{n+1} - 1) - \frac{1}{2}H_n \\ &= -\frac{7}{2}(\log(n+2) - 1 - \frac{1}{2} + \Gamma + \varepsilon_{n+2}) \\ &+ 4(\log(n+1) - 1 + \Gamma + \varepsilon_{n+1}) \\ &- \frac{1}{2}(\log n + \Gamma + \varepsilon_n) \end{aligned}$$
y tras realizar las correspondientes simplificaciones se obtiene fácilmente que la suma de la series es $5/4 = \lim_n S_n$. □

Ejercicios propuestos

7.1) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$
\begin{array}{llll}
\int_0^{+\infty} \frac{xda}{e^x-1} & \int_{-1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^5+1}da & \int_0^{+\infty}(2+\operatorname{sen} x)da & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^5 x}{1+\cos x+\cosh x} \\
\int_0^1 \frac{da}{\sqrt[3]{x^2(1-x)^2}} & \int_0^{\pi/2} \frac{da}{(1-\cos x)^\alpha} & \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}da & \int_0^1 x^a \log x da \\
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\cosh x}\, dx & \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^{3/4}}\, dx & \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{x(1-x)}} &
\end{array}
$$

7.2) Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias, calculando aquellas que sean convergentes:

$$
\begin{array}{llll}
\int_2^{+\infty} e^{2x}(x^2+3x)da & \int_1^{+\infty} \frac{xda}{1+x^4} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}da}{\sqrt{x}} & \text{Nota: } \int_0^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
 & \int_{-1}^{+1} \frac{da}{x^2} & \int_0^1 \frac{da}{x^2+2x-2} & \\
\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx & \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\, dx & \int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx &
\end{array}
$$

Compruebe con MAXIMA, cuando sea posible, los resultados obtenidos.

7.3) Determine el área de la región situada entre las curvas

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)(x+3)(x+4)} \text{ y } g(x) = \frac{2}{x+1}$$

para $x \geq 2$.

Compruebe con Máxima el resultado obtenido.

7.4) Estudie el carácter de convergencia de las series

$$
\begin{array}{ccc}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n\sqrt{n+2}} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos n}{n} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n!)^2} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{10^n} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{3.6.9\ldots(3n)} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log(1+\frac{1}{n})} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log n)^n} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log n)^{1'01}} \\
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(2)\ldots\log(n+1)}{n!} & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3\log(n+1)} \\
\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\log n} & \sum_{n\geq 2} \log(1+\frac{1}{n}) & \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^n} \\
\sum_{n\geq 1} \left(\log \frac{n+1}{n}\right)^\alpha, \quad \alpha\in\mathbb{R} & \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n!)} & \sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n}-1)^n \\
\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\log n)^p}, \quad p\in\mathbb{R} & \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\log n}} & \sum_{n\geq 1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\
\sum_{n\geq 1}(1-\cos(1/n)) & \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} & \sum_{n\geq 1}(1-H_n^{-1})^{nH_n}{}^*
\end{array}
$$

7.5) Analice la convergencia de la serie $\sum_n \frac{\log n!}{n}$.

7.6) Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie convergente de términos positivos. Si $(x_n)_n$ es una sucesión numérica tal que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

pruebe que $(x_n)_n$ es una sucesión convergente.

7.7) Pruebe la convergencia y calcule las sumas de las series telescópicas siguientes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \ .$$

7.8) Si la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Pruebe que también convergen las series $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n^{2/3}}$.

7.9) **Criterio logarítmico.** Sea la serie $\sum a_n$ con $a_n > 0$. Supongamos que existe $\lim \frac{\log(1/a_n)}{\log n} = L$. Pruebe que:

a) Si $L > 1$ la serie converge.
b) Si $L < 1$ la serie converge.

7.10) Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} da = \frac{\pi}{2}$, demuestre, mediante un cambio de variable, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{x} da = \frac{\pi}{4}$.
Usando integración por partes, pruebe también que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} da = \frac{\pi}{2}.$$

Compruebe que Máxima también sabe hacer estas cuentas.

7.11) Determine la convergencia y convergencia absoluta de las siguientes integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^{3/2}}\, dt \qquad \int_0^1 \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t}\, dt$$

7.12) Calcule el valor de la integral siguiente:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x}\, dx.$$

Verifique con Máxima el resultado.

* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

7.13) Sea k un número real. Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^1 \frac{t^k - 1}{\log t}\, dt$$

según los valores de k.

7.14) Estudie la convergencia o divergencia de las series siguientes. En caso de que sean convergentes estudie si la convergencia es o no incondicional.

$$\begin{array}{ccc} & \sum_1^\infty (-1)^n \Big(1 - n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\Big) & \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\log(1+\frac{1}{n})} \\ \sum_1^\infty (-1)^n \Big(1 - \cos \frac{1}{n}\Big) & \sum_1^\infty (-1)^n \Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\log n)\Big) & \sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2} \\ \sum_1^\infty (-1)^n \Big(e - (1 + \frac{1}{n})^n\Big) & \sum_1^\infty (-1)^{n-1} n^{-\alpha} & \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n^2}{1+n^2} \end{array}$$

7.15) La serie que sigue es una reordenada de la serie armónica alternada en la que aparecen alternativamente tres términos positivos seguidos de dos negativos:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$$

Demuestre que la serie converge y que su suma es $\log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$.