8.4. Ejercicios

Resueltos

8.4.1 *Calcule las sumas de las siguientes series:*

$$a)\quad x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\dots \qquad b)\quad \frac{x^3}{1\cdot 3}-\frac{x^5}{3\cdot 5}+\frac{x^7}{5\cdot 7}-\frac{x^9}{7\cdot 9}\dots$$

SOLUCIÓN: La primera operación a realizar es calcular el radio de convergencia de la serie para determinar el dominio de la función que define la correspondiente serie. El radio de convergencia viene dado por la fórmula

$$R=\frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

a) En el caso de la primera serie,

$$a_n=\begin{cases}1/n & \text{si } n \text{ es impar}\\ 0 & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Observése que no existe $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}$, ya que los términos pares tienen límite 0 mientras que los impares tienen límite 1. Afortunadamente la fórmula del radio de convergencia sólo requiere el límite superior, que siempre existe. Recordemos que el límite superior es el supremos de los puntos que sean límite de alguna subsucesión, y eso en este caso significa que $\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}=1$. Por tanto el radio de convergencia es 1 y la serie a) define una función $f:(-1,1)\longrightarrow \mathbb{R}$ que se nos pide determinar. Sabemos que f es continua y derivable en $(-1,1)$ viendo su derivada dada por la derivación término a término, es decir,

$$f'(x)=1+x^2-x^4+x^6+\dots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\dots=1+g(x)$$

siendo

$$g(x):=x^2-x^4+x^6+\dots+(-1)^{n+1}x^{2n}+\dots=\frac{x^2}{1+x^2}$$

pues el cálculo de suma de la serie que define g es inmediato al tratarse de una serie geométrica de razón $-x^2$.

En consecuencia

$$f'(x)=2-\frac{1}{1+x^2}$$

y por tanto, mediante integración, obtenemos que

$$f(x)=2x-\operatorname{arctg} x+K,$$

siendo K una constante, cuyo valor es 0 ya que $f(0) = 0$ (sustituir en la serie correspondiente).

Para acabar analicemos el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo. Para $x = 1$ la convergencia de la serie está garantizada por el criterio de Leibniz. Y lo mismo ocurre para $x = -1$, pero, por otra parte, siendo la función f impar, esto también se obtiene como consecuencia de lo anterior. Así que el dominio de f es el intervalo $[-1, 1]$ siendo f continua en dicho intervalo como consecuencia del criterio de Abel 8.1.9 de convergencia en el borde. Resumiendo la serie de potencias es convergente si $x \in [-1, 1]$ y el valor de la suma es $2x - \operatorname{arctg} x$.

b) El radio de convergencia de la segunda serie es

$$\begin{aligned} R =& \frac{1}{\text{lím sup}_n \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\text{lím}_n \sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)(2n-1)}}} \\ =& \lim_n \sqrt[2n+1]{(2n+1)} \cdot \lim_n \sqrt[2n+1]{(2n-1)} = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Para ver que ambos límites valen 1 observemos que el primero de ellos es una subsucesión de $(\sqrt[n]{n})_n$ y sabemos que $\text{lím}_n \sqrt[n]{n} = 1$; el segundo puede ser visto como una subsucesión de $(\sqrt[m]{m-2})_m$ y $\text{lím}_m \sqrt[m]{m-2} = \text{lím}_m \frac{m+1-2}{m-2} = 1$. La función

$$f(x) := \frac{x^3}{1 \cdot 3} - \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{5 \cdot 7} - \frac{x^9}{7 \cdot 9} \dots$$

está definida en $(-1, 1)$ y es derivable siendo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} \dots \\ &= x\Big(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots\Big) =: xg(x) \end{aligned}$$

La función g definida por

$$g(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

también tiene radio de convergencia 1, como es fácil comprobar, y puede calcularse fácilmente derivando (para obtener una geométrica) e integrando sucesivamente como en el apartado anterior obteniendo que $g(x) = x/(1+x^2)$. Entonces

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \Longrightarrow f(x) = x - \operatorname{arctg} x + C$$

siendo $C = 0$ porque $f(0) = 0$ (haciendo $x = 0$ en la serie que define f).

Siguiendo las pautas del apartado anterior es sencillo ver que $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ para todo $x \in [-1, 1]$. □

> MAXIMA puede ser de utilidad para realizar cálculos como los anteriores. Es sumamente conveniente cargar el paquete `simplify_sum` y hacer uso del comando del mismo nombre implementado en el paquete. También resulta de utilidad la variable booleana `simpsum`.

8.4.2 *Escriba el desarrollo de la función $f(x) = \frac{1}{2}\log^2(1+x)$ como serie de potencias de x y determine el intervalo de convergencia del desarrollo.*
Indicación: *calcule el desarrollo de f'.*

SOLUCIÓN: La derivada es $f'(x) = \dfrac{\log(1+x)}{1+x}$ siendo

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

El radio de convergencia de ambas series es 1. Así pues para cada $x \in (-1,1)$ es

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\Big)$$

debido a que ambas series son absolutamente convergentes en $[-x,x]$ y a la proposición 7.5.2.

El coeficiente de grado n de la serie producto es

$$c_n = \sum_{\substack{i+j=n\\1\le i\le n\\0\le j\le n}} (-1)^{i-1}\frac{1}{i}(-1)^j = \sum_{\substack{i+j=n\\1\le i\le n\\0\le j\le n}} (-1)^{n-1}\frac{1}{i} = (-1)^{n-1}\sum_{1\le i\le n}\frac{1}{i} = (-1)^{n-1}H_n$$

Así $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}H_n x^n$ y por tanto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{H_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Para calcular el radio de convergencia de esta serie hacemos

$$\limsup_n \sqrt[n]{\frac{H_{n-1}}{n}} = \lim_n \sqrt[n]{H_{n-1}} = \lim_n \frac{H_n}{H_{n-1}} = 1,$$

con lo que el radio de convergencia es 1. □

8.4.3 *Dada la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

(1) Determine el radio de convergencia de la serie.

(2) Sea $f(x)$ el valor de la suma de la serie en los puntos en que converja. Analice justificadamente el dominio y la continuidad de f. Calcule $f(x)$.

(3) Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$$

(4) Analice razonadamente la convergencia y convergencia absoluta de la serie siguiente

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}-\frac{1}{8\cdot 9\cdot 10}+\dots$$

Utilice el apartado anterior, entre otras cosas, para calcular la suma de esta serie.

Solución: El radio de convergencia de la serie viene dado por

$$\frac{1}{\operatorname{lím\,sup}_n \sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\operatorname{lím}_n \sqrt[2n-1]{1/(2n-1)}}=1$$

puesto que la sucesión anterior es una subsucesión de $\sqrt[n]{n}$ cuyo límite sabemos que es 1. Utilizando teoremas generales sabemos que la serie converge en cada punto de $(-1,1)$ y es una función continua e infinitamente derivable en ese intervalo, cuyas derivadas se calculan derivando formalmente término a término la serie propuesta. También converge en $x=1$ como consecuencia del teorema de Leibniz, porque la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$ es alternada y el valor absoluto del término general es una sucesión monótona decreciente. Para $x=-1$ se trata de

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(-1)^{2n}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n-1}$$

y con la misma argumentación anterior también es convergente. Por tanto el dominio de f es $[-1,1]$ además utilizando el teorema de Abel sobre convergencia en el borde, sabemos que f es continua no sólo en $(-1,1)$ sino en $[-1,1]$.

Para calcular f derivaremos formalmente la serie en un punto arbitrario $x\in(-1,1)$ obteniendo

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(2n-1)\frac{x^{2n-2}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$$

por tratarse la última de una serie geométrica cuya suma sabemos calcular. Así pues f es una primitiva de $1/(1+x^2)$, es decir, $f(x)=\operatorname{arctg}x+C$. Para determinar C hemos de conocer el valor de f en algún punto; pero a partir de la serie que define f es inmediato que $f(0) = 0$, de modo que $C = 0$ y

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \text{ para cada } x \in (-1, 1).$$

Pero como f y arctg son ambas continuas en $[-1, 1]$ y, según acabamos de ver, coinciden en $(-1, 1)$ necesariamente coinciden también en $x = \pm 1$. En particular

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots = f(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Esta fórmula permite calcular aproximaciones decimales de π con la precisión deseada, ya que al tratarse de una serie alternada el criterio de Leibniz 7.6.7 determina que el error cometido al tomar una suma n-esima es inferior al valor absoluto del sumando inmediatamente posterior. Aunque teóricamente la cuestión de obtener valores aproximados para ese número π introducido de forma abstracta en 8.2.1 está zanjada, el cálculo de π con esta serie no es muy eficaz debido a que la convergencia es lenta.

Puesto que máxima puede hacer sumas finitas podemos obtener valores aproximados para π con bastante comodidad. Concretamente `sum ( (4*(-1)^(n+1))/(2*n-1), n,1,1000),numer;` proporciona el valor 3.14158265358972.
En cambio utilizando la serie (véase el ejercicio 11)

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

que tiene una convergencia más rápida, el resultado para

```
sum ( (16*(-1)^n)/((2*n+1)*5^(2*n+1))
     - (4*(-1)^n)/((2*n+1)*239^(2*n+1)), n,0,4),numer;
```

es 3.141591772182178

La serie propuesta en el último apartado puede escribirse en la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)}$$

y el estudio de la convergencia absoluta de la misma equivale a estudiar la convergencia de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^3} = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

que resulta ser convergente por tratarse de una armónica de orden 3.

Para hacer la suma realizaremos la descomposición en fracciones simples obteniendo (con unas sencillas cuentas) que

$$\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{4k} - \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(2k+2)}.$$

Ahora podemos escribir la serie en la forma

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} &= \\
\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\Big(\frac{1}{4k}-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2(2k+2)}\Big) &= \\
\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k+1} &= \\
\frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{4}-1-\frac{1}{4}(\log 2-1)=\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

obteniendo así la suma buscada. □

8.4.4 *Desarrolle en serie de potencias la función* $f(x)=\log\frac{1+x}{1-x}$ *y pruebe que si* n *es un entero con* $n>0$ *se tiene*

$$\log\frac{n+1}{n}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$

Utilizando dicha serie determine cuantos términos hay que tomar para obtener una aproximación del valor de $\log 2$ *con error inferior a* 10^{-3}.

¿Conoce otra serie para $\log 2$*? ¿Cuantos términos hay que tomar para obtener el mismo tamaño de error?*

Solución: Sabemos que si $|x|<1$

$$\log(1+x)=x-x^2/2+x^3/3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Lo cual nos permite escribir el desarrollo de $\log(1-x)=\log(1+(-x))$ para $|x|<1$ y, por tanto, el desarrollo de

$$\begin{aligned}
\log\frac{1+x}{1-x} &= \log(1+x)-\log(1-x) \\
&= (x-x^2/2+x^3/3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\dots) \\
&- (-x-x^2/2-x^3/3+\cdots+-\frac{x^n}{n}+\dots) \\
&= 2x+2\frac{x^3}{3}+2\frac{x^5}{5}+\cdots+2\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+\cdots=2\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.
\end{aligned}$$

En particular la suma

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2n+1)^{2k+1}}$$

corresponde a hacer $x = \frac{1}{2n+1}$, que ciertamente cumple $|x| < 1$ siempre que $n \geq 1$. Por tanto la suma de esta serie es

$$\log \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \log \frac{n+1}{n}$$

En particular, tomando $n = 1$ se obtiene la fórmula

$$\log 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(3)^{2k+1}} \tag{8.15}$$

que permite calcular $\log 2$ de forma aproximada sumando un cierto número de términos. Otra fórmula para calcular $\log 2$, como ya sabemos, es

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \tag{8.16}$$

Para obtener una aproximación a $\log 2$ podemos sumar los primeros p términos en dichas series. El error que cometemos es, exactamente, $|\log 2 - S_p|$, que coincide con la suma $\sum_{n \geq p+1} a_n$. Si deseamos que el error sea menor que 10^3, podemos:

(1) Utilizar la fórmula (8.16): en cuyo caso al tratarse de una serie alternada sabemos (teorema de Leibniz) que el error cometido al sumar los primeros p términos es menor que el valor absoluto del término $p + 1$ y por consiguiente habremos de realizar ¡¡la suma de los 999 primeros términos!!

(2) Utilizar la fórmula (8.15): en cuyo caso para estimar el error cometido no nos sirve el teorema de Leibniz y tendremos que elegir p para que se tenga

$$2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(3)^{2k+1}} < 10^3$$

Pero la convergencia de la serie es muy rápida ahora

$$2 \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(1/3)^{2k+1}}{(2k+1)} < \frac{2}{(2p+1)} \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \frac{2}{(2p+1)} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+3}.$$

Definimos $R(p) := \frac{2}{(2p+1)} \frac{9}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^{2p+3}$.

Conseguir determinar un número entero positivo p tal que $R(p) < 10^{-3}$ puede hacerse fácilmente con ayuda de Maxima definiendo la función `R(p):=9/(4*(2*p+1)*3^(2*p+3));` y dando a p valores enteros crecientes hasta conseguir el objetivo. Pero ya `R(2)` nos proporciona $1/4860$. Así que $\log 2$ es aproximadamente `sum (2/((2*k+1)*3^(2*k+1)), k, 0, 2),numer;` cuyo valor según Maxima es 0.69300411522634 con error inferior a $1/1000$.

Realizadas de forma manual, la dificultad de las cuentas en uno y otro caso es muy significativa. □

Ejercicios propuestos

8.1) Determine el radio de convergencia de las series de potencias cuyo término general se señala a continuación.

$$\frac{n^a}{n!}x^n \qquad \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n \qquad \frac{k^n n!}{n^n}x^n \qquad \binom{a+n}{n}x^n$$
$$\log_a nx^n \quad h^{n^2}x^n \ 0<h<1 \quad \left(\frac{1.2.3....n}{3.5.7...(2n+1)}\right)^2 x^n \quad \frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n$$

MAXIMA puede serle de utilidad para abordar algunos de los ejercicios propuestos en esta sección. Trate de utilizarlo cuando sea posible..

8.2) Desarrolle en serie de potencias la función $\log(x+\sqrt{1+x^2})$, $\operatorname{arc\,tg} x$ y calcule el radio de convergencia de la serie obtenida.

Desarrolle en serie de potencias de $x-1$ la función $\frac{2x+3}{x+1}$

8.3) Estudie el dominio de convergencia y la suma de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}.$$

8.4) Estudie la convergencia y calcule las sumas de las series siguientes.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+2n+3}{n!}x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(3n^2-n+1)x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

8.5) Determine el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$$

Sea $f(x)$ el valor de la suma de dicha serie. Demuestre que $f'(x)(1+x) = af(x)$ y determine $f(x)$.

8.6) Calcule las sumas de las siguientes series:

$$\text{a)}\quad \frac{1}{2}+\frac{x}{5}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{11}\dots \qquad \text{b)}\quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^2}{3\cdot 4\cdot 5}+\dots$$

Indicación: Para el primero haga el cambio variable $x=t^3$

8.7) Sea la serie

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}.$$

a) Determine el radio de convergencia de la serie

b) Sea $f(x)$ el valor de la suma de la serie en los puntos en que converja. Estudie el dominio de f y la continuidad. Calcule $f(x)$.

c) Deduzca la suma de la serie

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}.$$

8.8) Es conocido que las calculadoras nos proporcionan el valor de ciertas funciones a través del cálculo interno de unos pocos términos de las series de potencias que las representan. Así, por ejemplo, podrían ofrecernos los valores de las funciones $\operatorname{arc\,tg} x$ o $\log(1+x)$ a través de sus representaciones:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

Sin embargo el radio de convergencia de dichas series es 1 y, por tanto, las representaciones dadas sólo tienen sentido en el intervalo $(-1,1)$ (incluyendo, quizás, alguno de los extremos). ¿Puede idear algún procedimiento por el cual sea posible evaluar aproximadamente dichas funciones en puntos que no estén en dicho intervalo?

8.9) Se considera la serie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1}$.

a) Estudie la convergencia.

b) Pruebe que

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{3n+1} = \int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx.$$

c) Calcule el valor de la suma de la serie.

8.10) Sea la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$.

a) Discuta justificadamente la convergencia y convergencia absoluta de dicha serie.

b) Pruebe la siguiente igualdad

$$1+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1} = \int_0^1\frac{1}{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$$

c) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4n+1}$.

8.11) El objetivo de este ejercicio es obtener la siguiente fórmula

$$\pi = 16\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - 4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}} \qquad (*)$$

para el cálculo aproximado del número π, que como sabemos es irracional[1].

a) Si $x = \operatorname{arctg}(1/5)$ compruebe que

$$\operatorname{tg} 2x = 5/12, \ \operatorname{tg} 4x = 120/119, \ \operatorname{tg}(4x - \frac{\pi}{4}) = 1/239$$

b) Si $y = 4x - \dfrac{\pi}{4}$ muestre que $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$

c) Concluya que

$$\pi = 4(4x - y) = 16\operatorname{arctg}(1/5) - 4\operatorname{arctg}(1/239)$$

es decir, que la fórmula (*) es cierta.

d) Sean

$$S_k = 16\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} \qquad S'_k = 4\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}$$

Utilice el teorema de Leibniz de acotación de error en una serie alternada para probar que

$$-\frac{3}{10^{12}} < \pi - (S_3 - S'_1) < \frac{1}{10^6}$$

y obtenga que $3,141592 < \pi < 3,141593$.

[1] Véase el ejercicio 6.5.5