Departamento de matemáticas
Universidad de Murcia

Test autorespuesta (I)
Números reales y sucesiones

Bernardo Cascales Salinas
José Manuel Mira Ros
Salvador Sánchez-Pedreño

Inicio del Test

1. Supongamos que hemos probado que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ con $n_0 \geq n$ tal que $|x_{n_0} - l| > \varepsilon$. ¿Qué hemos probado?

1. Que $\lim_n x_n = l$

☐ Verdadero ☐ Falso

2. Que $\lim_n x_n$ no existe.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. Que $\lim_n x_n \neq l$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. Que $\inf_{n\in\mathbb{N}}\big(\sup_{m\geq n} |x_m - l|\big) \geq \varepsilon$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente y $x \in \mathbb{R}$ una cota inferior de A tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A$ verificando $x \leq a_n < x + 1/n$ entonces:

1. $x = \sup A$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $\lim_n a_n = \inf A$.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. $x = \inf A$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $x < \inf A$.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales, con $\lim_n a_n = l > 0$, entonces:

1. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, $a_n > \frac{l}{4}$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n > l$.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$, $a_n > l$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $\inf_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{m\geq n} a_m\right) \geq \frac{l}{4}$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. Sean $(a_n)_n$ una sucesión de números reales tal que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

1. $(a_n)_n$ es de Cauchy.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $(a_n)_n$ es convergente.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. $(a_n)_n$ no es necesariamente de Cauchy aunque $\lim_n |a_{n+1} - a_n| = 0$

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $(a_n)_n$ no es necesariamente de Cauchy aunque $\lim_n a_n = 0$.

☐ Verdadero ☐ Falso

5. Sea $(a_n)_n$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, tal que $(a_{2n})_n$ es decreciente. Entonces:

1. $(a_n)_n$ no es necesariamente convergente.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $(a_n)_n$ es convergente.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. $(a_{2n})_n$ es convergente.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $(a_{2n})_n$ no es necesariamente convergente.

☐ Verdadero ☐ Falso

6. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones de números reales tales que $\lim_n(a_n + b_n)$ no existe y $\lim_n a_n = l \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $\lim_n b_n = l$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $\lim_n b_n$ no existe.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. No puede ocurrir que $\lim_n a_n = l$ y que no exista $\lim_n(a_n + b_n)$.

☐ Verdadero ☐ Falso

7. Sea $a_n = \frac{c^n}{n!}$, con $c > 1$, entonces:

1. $\lim_n a_n = +\infty$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $\lim_n a_n = l$ con $l \neq 0$.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. $\lim_n a_n = 0$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $\lim_n a_n$ no existe.

☐ Verdadero ☐ Falso

8. Sea $a_n = n \log \left(1 + \frac{e^a}{n}\right)$.

1. $\lim_n a_n = a$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $\lim_n a_n = e^a$.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. $\lim_n a_n = \log a$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $\lim_n a_n$ no existe.

☐ Verdadero ☐ Falso

9. Sea $a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+n} - \sqrt{n^3-2n}\,\right)$.

1. $\lim_n a_n = \infty$.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $\lim_n a_n = n$.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. $\lim_n a_n = 3$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $\lim_n a_n = 2$.

☐ Verdadero ☐ Falso

10. Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ sucesiones de números reales tales que $\lim_n a_n = +\infty$ y $\lim_n a_n b_n = L \in \mathbb{R}$. Entonces:

1. $(b_n)_n$ no tiene por qué ser convergente.

☐ Verdadero ☐ Falso

2. $\lim_n b_n = -\infty$.

☐ Verdadero ☐ Falso

3. $\lim_n b_n = 0$.

☐ Verdadero ☐ Falso

4. $(b_n)_n$ es acotada.

☐ Verdadero ☐ Falso

Final del Test Puntos: Correctas

Soluciones a los Tests

Solución al Test: La afirmación del enunciado es exactamente la negación de la igualdad $\lim_n x_n = l$, cuya definición es:

$$\forall \varepsilon \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \in \mathbb{N} \, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

Recuerde la forma en que se niegan los cuantificadores:

- La negación de «para todo x se verifica $P(x)\dots$» es «existe algún x que no verifica $P(x)$»
- La negación de «existe x que verifica $P(x)\dots$» es «para todo x no se verifica $P(x)$»

Final del Test

Solución al Test: Si para cada n existe $n_0 \geq n$ tal que $|x_{n_0} - l| > \varepsilon$, entonces podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\sup_{m \geq n} |x_m - l| > \varepsilon$. Pero, puesto, que la desigualdad anterior es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, el ínfimo de dichos valores es mayor o igual que ε, es decir:

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \Big(\sup_{m \geq n} |x_m - l| \Big) \geq \varepsilon$$

Final del Test