UNIVERSIDAD DE MURCIA

Depart. de Matemáticas

Análisis Matemático I

Control de 22-12-2005

1. Sea $a > 0$ y sea $x_1 > \sqrt{a}$. Definimos la sucesión recurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante la fórmula

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{1}{x_n}\Big)$$

Analice si la sucesión es convergente y en caso de serlo calcule su límite

Para ver el crecimiento consideramos

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}\Big(x_1 + \frac{a}{x_1}\Big) - x_1 = \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{x_1} - x_1\Big) = \frac{1}{2}\frac{a - x_1^2}{x_1} < 0.$$

Procediendo del mismo modo tendríamos que, para todo $1 \le n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\frac{a - x_n^2}{x_n}.$$

Y como, claramente, es $x_n > 0$, si somos capaces de probar que $x_n^2 > a$ conseguiríamos demostrar que $(x_n)_n$ es decreciente, ya que el cociente anterior sería negativo.

Para demostrar que $x_n^2 > a$ lo haremos por inducción. En primer lugar, por hipótesis, se cumple que $x_1^2 > a$. Supongamos ahora que $x_n > \sqrt{a}$. Queremos demostrar que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) > \sqrt{a}$$

pero esa desigualdad puede reescribirse de forma equivalente como

$$x_n^2 + a > 2x_n\sqrt{a} \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 + a - 2x_n\sqrt{a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_n - \sqrt{a})^2 > 0.$$

Y la última de dichas fórmulas es evidente puesto que $x_n > \sqrt{a}$.

Como la sucesión $(x_n)_n$ es decreciente y, obviamente, está acotada inferiormente por 0, se tiene que es convergente. Pongamos $x := \lim_n x_n$. Tomando límites en la fórmula

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{1}{x_n}\Big)$$

se llega a que

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big).$$

Resolviendo esta ecuación (de segundo grado) en x obtenemos $x = \pm\sqrt{a}$; pero sólo $x = +\sqrt{a}$ puede ser solución puesto que todos los términos de la sucesión son positivos.

Resumiendo: existe el límite de la sucesión $(x_n)_n$ y vale $+\sqrt{a}$.

2. Determine si la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_n := \left(\frac{2}{n+1}\right)^{2/(2+\log n)}$$

converge y, en caso afirmativo, calcule su límite.

Conocemos resultados que aseguran que si tenemos una sucesión que puede obtenerse sumando, multiplicando, etc. otras sucesiones convergentes, esta sucesión también es convergente y su límite se calcula mediante la suma, producto, etc. de los límites de aquellas sucesiones.

Por otra parte sabemos que

$$\lim_n a_n = \lim_n e^{\frac{2}{2+\log n}\log\frac{2}{n+1}} = e^{\lim_n \frac{2}{2+\log n}\log\frac{2}{n+1}} = e^{\lim_n \frac{2\log\frac{2}{n+1}}{2+\log n}}$$

y por tanto el límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe si y sólo si existe $\lim_n \frac{2\log\frac{2}{n+1}}{2+\log n}$. Pero este último límite existe ya que

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{2\log\frac{2}{n+1}}{2+\log n} &= \lim_n \frac{2(\log 2 - \log(n+1))}{2+\log n} \\
&= \lim_n \frac{2(\log 2 - \log(n+1))}{\log n} = \lim_n \frac{2\log 2 - 2\log(n+1)}{\log n} \\
&= \lim_n \frac{2\log 2}{\log n} - \lim_n \frac{2\log(n+1)}{\log n} = 0 - 2 = -2
\end{aligned}$$

En consecuencia la sucesión $(a_n)_n$ converge y $\lim_n a_n = e^{-2}$.