UNIVERSIDAD DE MURCIA

Depart. de Matemáticas

Análisis Matemático I.

Examen Final (9-7-2002)

Primer Parcial: Responda a las preguntas 1, 3, 4, 5 y 6.

Segundo Parcial: Responda a las preguntas 2, 7, 8, 9, 10 y 11.

Todo: Responda a las preguntas 2, 5, 6, 7, 9, 10 y 11.

En el examen con la opción "Todo" la calificación final se multiplicará por el coeficiente adecuado para obtener una calificación final sobre 10 puntos.

1. [3P]

   a) Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua donde I un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$. Pruebe que:
   - f es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.
   - Si f es estrictamente monótona, también lo es su inversa f^{-1} que, además, es continua.

   b) Sea $\{(I_n)_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que:
   - $I_{n+1} \subset I_n$,
   - La longitud de I_n tiene por límite cero.

   Pruebe que existe un único número real común a todos los intervalos.

2. [3P]

   a) Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable en (a, b) y sean $x_0, x \in (a, b)$. Sea

   $$R_{n-1}(x; x_0) := f(x) - \big[f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}\big].$$

   Demuestre que para cada $k \in \mathbb{N}$ $1 \leq k \leq n$, existe c estrictamente contenido entre x y x_0 de modo que $R_{n-1}(x, x_0) = \dfrac{(x - x_0)^k (x - c)^{n-k}}{(n-1)!k} f^{(n}(c)$ (expresión del resto en la forma de Schömilch).

   b) Sea $\sum a_n$ una serie de términos no negativos y sea $a = \text{lím inf} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $b = \text{lím sup} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

   1) Si $b < 1$ entonces la serie converge.
   2) Si $a > 1$ entonces la serie diverge.

   ¿Qué ocurre si $a = 1$ o $b = 1$? Ilústrelo con ejemplos.

3. [1'5P] Si A y B están acotados superiormente entonces también lo está $A + B$ siendo $\sup\{A + B\} = \sup A + \sup B$.

   Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas entonces

   $$\sup\{f(x) + g(x) : x \in \mathbb{R}\} \leq \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x) : x \in \mathbb{R}\},$$

   y la desigualdad puede ser estricta. Poned un ejemplo.

4. [1'5P]

   a) Se considera la sucesión

   $$x_1 = 1 \qquad x_n = \frac{x_{n-1}(1 + x_{n-1})}{1 + 2x_{n-1}} \quad n = 2, 3, \ldots$$

   Pruebe que la sucesión es convergente y calcule su límite.

   b) Calcule

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n} - 3}{\sqrt{n} + 1} \right)^{\sqrt{n}}$$

5. [2P] Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(1)$. Pruebe que existe $c \in [0, \frac{1}{2}]$ tal que

   $$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$$

6. [2P]

   a) Pruebe que toda función uniformemente continua sobre un intervalo acotado es acotada. ¿Es cierta la conclusión si el intervalo no es acotado? ¿Y si el conjunto es acotado y la función es continua?

   b) Estudie la continuidad uniforme de la función $1/x^2$ en los intervalos $(0, +\infty)$y $[1, +\infty)$.

7. [1'5P] Calcule:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{arc\,tg} x}{(\log(1 + x))^3}$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{a-1}{n}\right)\left(1 + 2\frac{a-1}{n}\right) \cdots \left(1 + n\frac{a-1}{n}\right) \right]^{(a-1)/n}$

   siendo $a > 1$. Explicite el valor en el caso particular $a = e$.

8. [1'5P] Demuestre que la función $f(x) = e^x + x$ es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$.

   a) Demuestre que para cada $x \in \mathbb{R}$ la ecuación $e^y + y = x$ tiene una única solución $y(x)$.

   b) Responda razonadamente a las siguientes cuestiones: ¿Es continua la función $y(x)$? ¿Y derivable?

   c) En caso de que la última cuestión tenga respuesta afirmativa, calcule $y'(1)$.

9. [1P] Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$. Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

10. [1'5P] Estudie la convergencia y convergencia absoluta de:

    a) $\int_0^3 \frac{\sqrt[3]{3-x}}{\sqrt{x}(x-a)}\, dx$, según los valores de a

    b) $\sum \frac{\log n!}{n^4}$

    c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \cos\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{2}\right)$

11. [1'5P] Se considera la serie $\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{3n+1}$.

    a) Estudie la convergencia.

    b) Pruebe que

    $$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{3n+1} = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^3}\, dx$$

    c) Calcule el valor de la suma de la serie.