UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Matemático I.

(8-7-2003)

Quienes hayan aprobado en los exámenes parciales una parte de la asignatura podrán optar entre:

- responder a los apartados que corresponden a la parte que deben recuperar, de acuerdo con el listado que oportunamente se expuso;
- realizar el mismo examen que quienes recuperan la asignatura completa.

En cualquier caso, para la resolución de las cuestiones planteadas puede hacerse uso de todas las herramientas desarrolladas a lo largo del curso.

Según la parte de la asignatura a recuperar se deberá responder a los siguientes apartados:

Parcial 1:	1, 2, 5, 6, 7, 8
Parcial 2:	3, 4, 9, 10, 11, 12, 13
Completa:	1, 4, 5, 7, 9, 10, 11

1. [1,5P] *Conceptos de sucesión convergente y de Cauchy. Enuncie y demuestre los resultados que relacionan ambos conceptos.*

2. [1,5P] *Concepto de continuidad uniforme. Enuncie y demuestre el teorema de Heine sobre la continuidad uniforme de una función en un intervalo cerrado y acotado.*

3. [1,5P] *Concepto de función integrable Riemann. Enuncie una condición suficiente de integrabilidad Riemann y aplíquela para demostrar que las funciones continuas y las funciones monótonas son integrables Riemann.*

4. [1,5P] *Enuncie y demuestre el teorema fundamental del cálculo.*

5. [1P] Demuestre la siguiente desigualdad para enteros positivos

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 > \frac{n^4}{4}.$$

6. [2P] Calcule

$$\int \operatorname{sen}^6 x\, dx, \qquad \int_1^3 \frac{\sqrt[4]{t}}{1+2\sqrt{t}}$$

7. [2P] Calcule los siguientes límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} + a^{2/n} + \cdots + a^{n/n}}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

8. [1,5P] Pruebe que si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua entonces la sucesión $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Es cierto el resultado si f es sólo continua? Justifique su afirmación.

9. [1P] Sea $f : (a, b) \longrightarrow [0, \infty)$ tres veces derivable en (a, b). Supongamos que existen dos puntos $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Pruebe que existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'''(c) = 0$.

10. [2P] Calcule los siguientes límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \operatorname{sen} x) - \log(1 + x)}{x - \tan x}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1 + 4\dfrac{k}{n}}{\dfrac{k^2}{n} + 2n - 2k}.$$

11. [1,5P] Estudie la convergencia y convergencia incondicional de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n + 1)(n - 1)}.$$

Asociándole una serie de potencias adecuada, calcule la suma de la serie anterior.

12. [1,5P] Estudie la convergencia, convergencia incondicional y, si es convergente, calcule la suma de la serie

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots$$

13. [1,5P] Sea f una función integrable Riemann en $[a, b]$, pruebe que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a + b - x)dx$$

Utilice el resultado anterior para calcular $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}\, dx$.