UNIVERSIDAD DE MURCIA

Depart. de Matemáticas

Análisis Matemático I.

(31-1-2002)

1. [3P]

   a) Pruebe el siguiente teorema de Bolzano-Weierstrass: *Cualquier sucesión acotada en* $\mathbb{R}$ *posee una subsucesión convergente.*

   b) Pruebe el siguiente teorema de Bolzano-Weierstrass: *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado de* $\mathbb{R}$ *con valores reales. Entonces,*

   1) f *está acotada y*

   2) existen $c, d \in [a, b]$ *tales que* $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$*, es decir,* f *alcanza sus valores máximo y mínimo en dicho intervalo.*

2. [1P]

   a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ se verifica:

   $$2\sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

   b) Demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}$ si $|b| < \dfrac{|a|}{2}$, entonces

   $$\frac{1}{|a - b|} < \frac{2}{|a|}$$

3. [1P]

   a) Calcule el siguiente límite:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

   b) Calcule a, b para que se cumplan las dos igualdades:

   $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n + 2b}{n + 1}\right)^{n+3}$$

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n + 4}{n + 1}\right)^{an+2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n + 2b}{n + 3}\right)^n$$

4. [1P] Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales que convergen a x e y, respectivamente. Demuestre que $\max\{x_n, y_{\}}$ converge a $\max\{x, y\}$ (Sugerencia: distinga los casos $x = y$ y $x \neq y$).

5. [1'5P] Sea f una función real continua, definida en un intervalo I, y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ puntos cualesquiera del intervalo. Probar que existe un punto $c \in I$ tal que

   $$f(c) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

6. [1'5P] Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ (siendo a, b números reales) una función continua. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) f es uniformemente continua en (a, b).

   b) Existe una función continua $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que F restringida al intervalo (a, b) coincide con f.