



1. [1,5P] Pruebe que una sucesión de números reales converge si y sólo si es de Cauchy.
2. [1,5P] Pruebe que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua que cumple $f(a)f(b) < 0$, entonces f se anula en algún punto del intervalo (a, b) .

3. [1,5P] Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^6 x} dx \quad \int x \operatorname{sen}^2 x dx.$$

4. [1,5P] Pruebe la siguiente fórmula para todo número natural $n \geq 2$, donde $0 < a < b$.

$$2^{n-1}(a^n + b^n) > (a + b)^n.$$

5. [1P] Sea un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $\alpha = \sup A$.

- b) Para todo entero $n > 0$ se cumple que $\alpha - (1/n)$ no es cota superior de A y $\alpha + (1/n)$ sí lo es.

6. [2P] Pruebe que existen y calcule los siguientes límites.

- a) $\lim_n a_n$, donde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida mediante las siguientes condiciones:

$$a_1 \geq 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{5a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right].$$

7. [1P] Pruebe que si $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y no tiene extremos relativos en (a, b) , entonces f debe de ser una función monótona.