UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Análisis Matemático I.

(27-1-2004)

1. [1,5P] Demuestre el siguiente teorema:

   Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua donde I un intervalo arbitrario de $\mathbb{R}$. Entonces:

   a) *f es inyectiva si y sólo si es estrictamente monótona.*

   b) *Si f es estrictamente monótona, también lo es su inversa f^{-1} que, además, es continua.*

2. [1,5P] *Pruebe que cualquier sucesión acotada de números reales posee una subsucesión convergente. ¿Pueden las sucesiones no acotadas tener subsucesiones convergentes?*

3. [2P] Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} \qquad \int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} \qquad \int \frac{(1+\operatorname{sen} x)^3}{\cos x} dx$$

4. [1,5P] Demuestre por inducción que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2$$

5. [1,5P] Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, monótona y acotada. Pruebe que es una biyección sobre $\operatorname{Im} f$ uniformemente continua. Pruebe que su inversa también es uniformemente continua.

6. [2P] Calcule los siguientes límites

$$\text{A) } \lim_n (n+2)(\sqrt[n]{e}-1) \quad \text{B) } \lim_n n \log \sqrt{\frac{1+1/n}{1-1/n}} \quad \text{C) } \lim_n \frac{[x]+[2x]+\cdots+[nx]}{n^2}$$

$$\text{D) } \lim_n \left(\frac{\operatorname{sen} 1}{n^2} + \frac{\operatorname{sen} 1/2}{(n+1)^2} + \frac{\operatorname{sen} 1/3}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} 1/n}{(n+n)^2} \right)$$