Soluciones del examen de 31-01-2005

José M. Mira

25 de febrero de 2005

$$\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

Es una función par en seno y coseno. Para ese tipo de funciones el cambio aconsejable es $t = \tan x$; $dt = dx/(\cos^2 x)$. De hecho, si dividimos numerador y denominador por $\cos^2 x$ y recordamos que $1 + \tan^2 x = 1/(\cos^2 x)$ obtenemos:

$$\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+1} = \int \frac{dt}{1+t^2+1} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \int \frac{dt/2}{1+(\frac{t}{\sqrt{2}})} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C$$

$$\int \frac{xe^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Es claramente una integral por partes. Si hacemos el cambio de variable $t = \arccos x$, o sea $\cos t = x$ tenemos $dt = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ y la integral se transforma en

$$-\int e^t \cos t\,dt$$

, y esta integral, haciendo partes ($u = \cos t$; $dv = e^t dt$), da origen a una integral

$$\int e^t t\,dt$$

y volviendo a hacer de nuevo partes se obtine el resultado fácilmente.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk}$$

Nos damos cuenta de que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{nk} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \cdots + \frac{1}{nn} = \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{n}$$

Escrito de esta forma podemos aplicar el teorema de Stolz y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{n - (n-1)} = 0$$

También podría haberse hecho con la constante de Euler ya que

$$1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n = \Gamma + \log n + \epsilon_n \qquad \text{con } \lim_{n} \epsilon_n = 0$$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma + \log n + \epsilon_n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 + \log n)^{\frac{1}{\sqrt{n+2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} (n^3 + \log n)^{\frac{1}{\sqrt{n+2}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n+2}}\log(n^3+\log n)}$$

Por lo que necesitamos calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^3 + \log n)}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n^3}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\log n}{\sqrt{n}} = 0$$

de modo que el límite buscado es $e^0 = 1$.

Demuestre la siguiente desigualdad para $1 < n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

1)**Inducción**. A el conjunto de naturales donde la fórmula es cierta. $2 \in A$ ya que para $n = 2$ la fórmula consta de dos sumandos que son $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = 1/3 + 1/4 > 1/2$.
Supongamos que $n \in A$ y que $n > 2$, es decir que se cumple,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Hemos de ver que se cumple la fórmula poniendo $n + 1$ en el lugar de n, es decir, hemos de analizar

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)+1}+\frac{1}{(n+1)+2}+\frac{1}{(n+1)+3}+\cdots+\frac{1}{2(n+1)} = \\
&\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+2} = \\
&{\color{red}\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-{\color{red}\frac{1}{n+1}} > \\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \\
&\frac{1}{2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} > \\
&> \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

2) **Más fácil aún**. Es claro que hay n sumandos y que el más pequeño de todos es el último, siendo los demás estríctamente más grandes, por tanto,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Sean A y B subconjuntos acotados de números reales estrictamente positivos tales que $\inf B > 0$.

1. Sea $1/B := \{1/b; b \in B\}$. Pruebe que $1/B$ está acotado superiormente y que $\sup(1/B) = 1/(\inf B)$.
2. Sea $A/B := \{a/b; a \in A \ b \in B\}$. Pruebe que A/B está acotado superiormente. ¿Cual es el supremo de A/B? Justifíquelo.

Pongamos $\beta = \inf B$. Es claro que $\beta \leq b$ para todo $b \in B$, de donde $1/\beta \geq 1/b$ para todo $b \in B$. Esto prueba que $1/B$ está acotado superiormente (por $1/\beta$) y por tanto $1/B$ tiene supremo que llamaremos α. Claramente se cumple $1/b \leq \alpha \leq 1/\beta$ para todo b por ser α la menor cota posible. Pero si fuera $\alpha < 1/\beta$, haciendo inversos se tendría $b \geq 1/\alpha > \beta$ lo cual es absurdo porque β es la cota inferior para B más grande.
La segunda parte es una consecuencia de la primera porque $A/B = A(1/B)$ y, según vimos $\sup CD = \sup C \sup D$ de donde

$$\sup A/B = \sup A \sup(1/B) = \sup A/ \inf B$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que verifica $|f(x) - f(y)| \geq M|x - y|$ para todo $x, y \in$, donde $M > 0$ es una constante. Pruebe que f es estrictamente monótona y que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

De $|f(x) - f(y)| \geq M|x - y|$ se obtiene que $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Una función continua e inyectiva es necesariamente estrictamente monónona, según un teorema. Además $f(\mathbb{R})$ ha de ser un intervalo porque la imagen de un intervalo por una función continua es otro intervalo. Supongamos, por ejemplo, que sea estrictamente creciente.

Entonces tomando $y = 0$ se tiene $|f(x) - f(0)| \geq M|x|$ con lo que

- si $x \to \infty$ ha de ser $|f(x) - f(0)| \to \infty$ y por tanto $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ por ser creciente
- si $x \to -\infty$ ha de ser $|f(x) - f(0)| \to \infty$ y por tanto $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ por ser creciente

es decir, los extremos del intervalo $f(\mathbb{R})$ son $-\infty$ y $+\infty$, o sea $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.