Soluciones a los problemas del segundo parcial

José M. Mira

29 de junio de 2007

Introducción

Este documento persigue dar a conocer soluciones a los problemas del examen de Análisis I en la licenciatura de Física 2006-2007.

En lugar de escribir yo las soluciones he optado por entresacar soluciones aportadas por los alumnos en el examen. El resultado es menos formal y académico, pero más real y tiene ventajas:

1. Se constata que los problemas eran accesibles para los alumnos. Ninguno quedó sin respuesta en el colectivo y las soluciones en algunos casos estaban muy bien, en otros bastante bien.

2. Incluir respuestas erróneas también ayuda a aprender; porque muchos de los errores que aquí aparecen no fueron excepcionales.

3. Los alumnos tienen que aprender a leer y escribir matemáticas. En clase hemos hecho ocasionalmente ejercicios de lectura pública comprensiva de los apuntes multicopiados que se les proporcionan. Los ejercicios y trabajos dirigidos que se han propuesto (en torno a quince) para que los alumnos entregen por escrito y que luego se revisan en su presencia persiguen, además de estimular y evaluar el trabajo continuado, mejorar su capacidad de escribir matemáticas. Con las soluciones que aquí aparecen es posible ver como escriben otros compañeros (y uno mismo en su caso), y los eventuales comentarios del profesor, presentes en todos los exámenes para una revisión individualizada y no sólo en los que aquí se muestran.

4. Las identidades están ocultas y el ámbito es restingido. No se pretende, en modo alguno, ensalzar o descalificar a nadie, ni hacer antologías de nada. Simplemente se trata de buscar nuevos métodos para mejorar el aprendizaje.

5. Durante el examen fue posible utilizar Maxima, un instrumento de cálculo numérico, gráfico y simbólico potente, usado transversalmente en clase y en los apuntes de clase. Puede ser un instrumento de apoyo, pero pocas personas lo usaron en el examen. Si los alumnos lo usaran habitualmente, como un instrumento más, se habrían evitado algunos errores. Esto parece indicar que tampoco lo usan en casa y que todavía es percibido más como artefacto que como instrumento. Referencias a Maxima aparecen en los comentarios del corrector.

Pruebe la siguiente desigualdad utilizando la fórmula de Taylor

$$0 \leq \tan x - \sin x \leq 3x^3 \qquad \text{para } x \in [0, \pi/4].$$

Una de las técnicas útiles para probar desiguadades es utilizar la fórmula de Taylor con resto de Lagrange o Cauchy. En este caso se dice explícitamente que esta técnica producirá los resultados buscados. Varios alumnos utilizaron resto en términos de $o(x^n)$ *que no permite alcanzar las conclusiones buscadas*

sabemos que los desarrollos de Taylor son; en $x_0 = 0$:

$$\tan x = \tan(0) + \tan'(0)\cdot x + \frac{\tan''(0)\cdot x^2}{2} + \dots = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

los desarrollos con $o(x^n)$ valen para límites pero no para estimar este tipo de desigualdades en un intervalo "grande" $[0, \pi/4]$.

Basta ver entonces que:

$$0 \leq x + \frac{x^3}{3} - \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \leq 3x^3 \to$$

$$0 \leq \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} \leq 3x^3 \to 0 \leq \frac{x^3}{2} \leq 3x^3 \quad \text{para } x \in [0, \pi/4]$$

$$\cancel{\text{Sea } f(x) = \frac{x^3}{2} - 3x^3 = -\frac{5}{2}x^3}$$

Para cualquier x se cumple que $0 \leq \frac{x^3}{2}$

Veamos ahora si $\frac{x^3}{2} \leq 3x^3$ para cualquier x.

Pero esto es trivial.

Por tanto, la desigualdad es verdadera.

$f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ $\quad f(0)=0$

$f'(x) = (1+\operatorname{tg}^2 x) - \cos x$ $\quad f'(0)=0$

$f''(x) = 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x) + \operatorname{sen} x$ $\quad f''(0)=0$

$f'''(x) = 2(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 x) + 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\,2\operatorname{tg} x + \cos x$

$f'''(c) \leq 2(1+1)(1+1) + 2(1+1)2 + 1 =$

$= 2^3 + 2^3 + 1 = 17$

Luego:

$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \dfrac{f'''(c)}{3!}x^3$

$0 \leq$ resto $\leq \dfrac{17\,x^3}{3!} = \cancel{\dfrac{17}{3!}} = \dfrac{f'''(c)}{3!}x^3 \leq \dfrac{17}{3!}x^3 < 3x^3$. ¡¡CASI!!

ok

$\tan x - \operatorname{sen} x = \cancel{\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{17\,x^3}{3!}} = \dfrac{(1+17)x^3}{6} = \dfrac{18\,x^3}{6} = 3x^3$

Por lo que $0 \leq \tan x - \operatorname{sen} x \leq 3x^3$

para todo $x \in [0, \pi/4]$

Las ideas están. Falta un poco de "oficio" y cuidado para terminar de escribir bien las cosas. Querido lector, haga el esfuerzo de complementar su trabajo y escribirlo bien. Le será útil

Pruebe que la función definida por

$$g(x)=\frac{\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt}{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}\qquad \text{para } x\neq 0 \text{ y } g(0)=0$$

es creciente.

La forma más natural para probar que una función es creciente es: 1) estudiar si es derivable y si lo es, 2) probar que su derivada es positiva. Es lo que trataron de hacer la mayor parte de las personas. Pero para derivar una fórmula con integrales es necesario usar con cuidado el teorema fundamental del cálculo.

3) $f:[0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$

$$g(x)=\frac{\int_0^x t f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt}$$ para $x\neq 0$ y $g(0)=0$ es creciente

$$g'(x)=\frac{x f(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x t f(t)dt}{\cancel{f(x)}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 > 0} \rightarrow \text{¿ es esto } > 0?$$

Debemos ver que $x f(x)\int_0^x f(t)dt - f(x)\int_0^x t f(t)dt$ es ~~creciente~~ positivo para $x\in(0,\infty)$

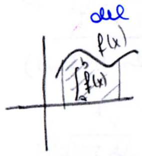
* Como $f(x)>0 \longrightarrow$ basta probar que $x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x t f(t)\,dt =: h(x) \geq 0$

$h(0)=0$, derivémosla de nuevo para ver si es creciente, en tal caso sería positiva:

$$h'(x)=\int_0^x f(t)dt + x f(x) - x f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

~~no podemos garantizar que esta $\int_0^x f(t)dt$ sea mayor que 0, esto sólo ocurriría si f(x) creciente, ya que si~~

pero como $f(x)$ es siempre positiva, la integral también lo ha de ser, ya que se trata, al fin y al cabo del área encerrada por la curva. así pues:



$h'(x)>0 \longrightarrow h(x)$ es creciente y como $h(0)=0$

$\downarrow$

$g'(x)>0 \longleftarrow h(x)>0$

$\downarrow$

$g(x)$ es creciente y $g(0)=0 \longrightarrow$ $f(x)$ es creciente

5. $$g(x)=\frac{\int_0^x t\,f(t)\,dt}{\int_0^x f(t)\,dt} \quad \text{para } x\neq 0 \quad y \quad g(0)=0.$$

resp x: TEOR. FUND. CALCULO

$$g'(x)=\frac{\cancel{x}\,g(\cancel{x})\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t\,f(t)dt\cdot f(\cancel{x})}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}$$

Si $g'(x)\geq 0$ probaríamos que $g(x)$ es creciente.

como $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\geq 0$, tenemos que ver que

$$\cancel{t}\,f(\cancel{t})\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t\cdot f(t)dt\cdot f(\cancel{t})\geq 0.$$

o lo que es lo mismo (Dividiendo entre $f(t)$, podemos porque $f(t)\in(0,\infty$

$$\cancel{h}:=\cancel{t}\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t\cdot f(t)dt\geq 0$$

$h(t):=$ hay que poner quien es la variable... en la derecha aparece

$$h'=t\cdot f(t)+\int_0^x f(t)dt-t\,ft=\int_0^x f(t)dt$$

por ser $f(t)\in(0,\infty)$ $\int_0^x f(t)dt$ es ≥ 0

lo cual implica que $t\,f(t)\cdot\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t\cdot f(t)dt\cdot f(t)\geq 0$ pues su derivada es positiva y su valor cuando sustituimos por 0 es 0.

de tal modo que $g'(x)\geq 0$ como se quería ver y así $g(x)$ es creciente.

Analice la convergencia y en caso de ser convergente calcule el valor de integral

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx.$$

En esta solución hay un error de cuentas que produce un resultado descartable a priori. La metodología es adecuada.

$$F(x) = \int_0^x x^2 e^{-x}\,dx = \int_0^x \frac{x^2}{e^x} = x^2(-e^{-x}) + \int 2x\,e^{-x}\,dx$$

RESULTA CONFUSO

$$= -x^2e^{-x} \mp 2xe^{-x} \mp 2e^{-x}$$

PONERLO AQUI

$u = x^2 \to du = 2x$

$dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}$

$$\int x e^{-x}\,dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

$u = x \longrightarrow du = dx$

$dv = \frac{dx}{e^x} \longrightarrow v = -e^{-x}$

Ahora $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$ será convergente si, por definición:

$\lim_{x\to\infty} F(x)$ existe y es finito:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \left[-x^2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{-x}\right]_0^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right) - 2 = -2 //$$ luego

la integral impropia converge y $\boxed{\text{vale } -2.}$

ese resultado es imposible, pues la función es positiva

MAXIMA puede calcular el resultado. Podías haberlo comprobado

Aunque no discute la convergencia de la integral impropia como tal, en este caso sale adelante porque se puede calcular una primitiva. Pero no siempre se puede calcular una primitiva y conviene habituarse a razonar la convergencia, sin necesidad de usar la primitiva, para cuando no podamos calcularla.

Calcule la siguiente primitiva

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

Para calcular la primitiva de una función trigonométrica racional impar en seno como la que nos ocupa, el cambio de variable $t = \cos x$ *es generalmente el más adecuado porque da origen a funciones racionales en* t *más sencillas que las producidas por el cambio gennérico* $t = \tan x/2$*, que es la otra alternativa estándar. Ejemplos de utilización de dichos cambios aparecen en los siguientes exámenes.*

6.- $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{(1+t^2)^3}{8t^3}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{(1+t^2)^2}{t^3}\,dt =$

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2\,dt}{(1+t^2)}}$$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3}\,dt = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{8}t^2 + C =$

$\displaystyle = -\frac{1}{8}\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + C$

Uno de los cambios aconsejables

6/

$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = \int \frac{(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{\operatorname{sen}^3 x}\,dx$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = * \left[\begin{array}{ll} v = \operatorname{sen}^{-3} x & dv = \frac{-3\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx \\ du = dx & u = x \end{array}\right] = \frac{x}{\operatorname{sen}^3 x} + 3\int x\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

estereotipada: impar en sen x ⇒ CAMBIOS t = cos x (o tg x/2 = t)

antes no había x y te metes en no estereotipada!!! ... más complicada

$\displaystyle\int x\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = * \left[\begin{array}{l} \operatorname{sen} x = A \\ \cos x\,dx = dA \\ x = \arcsin A \end{array}\right] = \int \frac{\operatorname{Arcsen} A}{A^4}\,dA = * \left[\begin{array}{ll} v = \operatorname{Arcsen} A & dv = \frac{dA}{\sqrt{1-A^2}} \\ du = \frac{dA}{A^4} & u = \frac{-1}{3A^3} \end{array}\right]$

El cálculo de primitivas es algo muy pautado. La creatividad puede ser útil en alguna ocasión... pero antes de aventurarse campo a través es mejor dejarse aconsejar por un buen mapa

$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x}$

$\cos x = t$

$-\operatorname{sen} x \cdot dx = dt$

$dx = \frac{dt}{-\operatorname{sen} x}$

El otro cambio aconsejado

$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^3 x} = -\int \frac{1}{(1-t^2)\cdot(1-t^2)} \cdot dt =$

$-\int \frac{1}{(1-t^2)^2} \cdot dt$

$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1-t)} + \frac{D}{(1-t)^2}$ ✓

Resolviendo los sistemas de ecuaciones en otra hoja obtenemos:

$A = B = C = D = 1/4$?? no es correcto. Hay que poner las cuentas, aunque sea en sucio, que se han utilizado para calcularlos. MAXIMA puede hacerlo con partfrac$(1/(1-t^2)^2, t)$;

$-\int \frac{1}{(1-t^2)^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1+2t} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-t} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1-2t} =$

$-\frac{1}{4}\log(1+t) + \frac{1}{4}\log(1-t) - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1+2t} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1-2t}$

Hagamos ahora: esto es más sencillo $\int \frac{1}{(1+t)^2} = \int (1+t)^{-2} dt = \frac{(1+t)^{-2+1}}{-2+1} + C.$

$-\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1+2t} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{(t+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}+1} = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$ y no sale lo que dices

La integral $-\frac{1}{4}\int \frac{1}{t^2+1-2t}$ se resuelve igual y nos da: $-\frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$

Estudie el dominio de la función definida mediante la fórmula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}$$

y calcule su suma. Calcule también la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

La primera cuestión a abordar en una serie de potencias es calcular su radio de convergencia, que permite determinar el intervalo de mayor tamaño en el que la serie converge; a continuación analizar la convergencia en los extremos del intervalo para decidir si en éstos la serie es o no convergente. Una vez clarificadas esas cuestiones tenemos definida de forma precisa (pero abstracta) f en un cierto intervalo. Calcular la suma de la serie significa expresar f en términos de funciones elementales, mejor conocidas por nosotros. En el curso hemos presentado a las series geométrica y exponencial como modelos muy muy especiales de series sumables. Y hemos desarrollado estrategias (descomposiciones, derivadas, integrales...) para «desmontar» otras series más complejas en piezas simples cuyos elementos sean esas series especiales que sabemos sumar. Una vez conseguido ese objetivo recorremos el camino inverso para obtener la suma de la serie inialmente propuesta. No cualquier «despiece» es legítimo y ser ordenados en el etiquetado de las piezas hace más sencillo la recomposición del mecano y evita errores.

b) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}$

Veamos su radio de convergencia para calcular el dominio:

$$R=\frac{1}{\lim_n \sqrt[2n]{(2n-1)(2n+1)}}=\frac{1}{\lim_n\sqrt[2n]{(2n)(2n)}}=\frac{1}{\lim_n\sqrt[2n]{4n^2}}=\boxed{\frac{1}{1}}$$

$\boxed{R=1}$ Pero no sabemos que pasa en los bordes. Veamos que ocurre si $x=1$ o -1:

$$a_n=\frac{1^{2n}}{(2n-1)(2n+1)} \text{ o } \frac{(-1)^{2n}}{(2n-1)(2n+1)} \Rightarrow$$

Exponente siempre par, es el caso anterior.

Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n^2}=0$ En principio podemos hablar de su convergencia.

Por mayoración es claro que $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}<\frac{1}{n^2}$ y sabemos que $\frac{1}{n^2}$ entonces nuestra serie también.

Luego converge en los bordes y el Radio y dominio sería $x\in[-1,1]$. ✓

- Para calcular la suma necesitamos convertir la serie en una geométrica, que es lo único que sabemos sumar. Si hacemos lo siguiente:

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\cdot x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{x}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}}_{=g(x)}$$

Las posibilidades de liarte si sigues así son enormes.

y si derivo el sumatorio:

¡PON NOMBRE A LAS COSAS! ¡ES GRATIS!

Pero ahora quiero en el exponente un $(2n-1)$, extraigo una x como antes, pero no las simplifico.

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{(2n+1)}\,x^{2n}}{(2n-1)\cancel{(2n+1)}}=g'(x)$$

Sabe donde está el norte y que tiene que desmontar la serie en elementos conocidos. Tiene las ideas... y eso se sabe porque a pesar de que matemáticamente está mal escrito, consigue no perderse (algo mucho más difícil para el lector). Continua en la página siguiente, donde algún error de cuentas le impide llegar al resultado correcto.

$$\frac{1}{x}\cdot x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} =: h(x)$$

Derivo:

$$\frac{1}{x}\cdot x \sum \frac{\cancel{(2n-1)}\, x^{2n-2}}{\cancel{(2n-1)}} = h'(x) \Longrightarrow h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2}$$

Calculo términos para ver la razon:

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots \qquad \text{razon} = x^2$$

luego la suma vale $\frac{1}{1-x^2}$. Ahora debo integrar esta expresion dos veces (¡una o ~~nueces~~!) para ver el valor real de nuestro sumatorio inicial.

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)(1+x)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-x)}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)}d$$

$$= -\frac{\log(1-x)}{2} + \frac{\log(1+x)}{2}$$

Este resultado va multiplicado por x, porque lo eliminamos antes.

$$-\frac{x\log(1-x)}{2} + \frac{x\log(1+x)}{2}$$

Integramos de nuevo:

$$+\int \frac{x\log(1+x)}{2}\,dx - \int \frac{x\log(1-x)}{2}\,dx$$

$$\left.\begin{array}{ll} u = \log(1-x) & du = -\frac{1}{1-x} \\ dv = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right\} \quad \frac{1}{4}\int \frac{x^2}{1+x}\,dx \quad \left\{\begin{array}{l} 1+x=t \\ dt = dx \\ x^2 = (t-1)^2 \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{4}\left(\int \frac{t^{\cancel{2}}}{\cancel{t}}dt + \int \frac{2\cancel{t}}{\cancel{t}}dt + \int \frac{1}{t}\,dt\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2} - t + \ln t\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+x)^2}{2} + (1+x) + \ln(1+x)\right)$$

La solución está escrita de forma mucho más ordenada en este caso y se puede leer sin dificultad.
Una buena escritura es un complemento perfecto para las buenas ideas

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}$$

Calculemos primero el radio de convergencia

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right|}}=1$$

luego sabemos que si $x\in(-1,1)$ la serie converge absolutamente y por tanto converge pero nada sabemos aún sobre ~~Veam~~ los puntos $x=-1$ y $x=1$

Para $x=1$

$f(x=1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ que sabemos converge por ser del mismo caracter que $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ya que $\lim_{n\to\infty}\frac{1/4n^2-1}{1/n^2}=\frac{1}{4}$

Para $x=-1$

$f(x=-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ y por tanto igual que antes la serie converge en $x=-1$.

Así el dominio de la función es $[-1,1]$ ✓

$$f:[-1,1]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n-1)(2n+1)}$$

Ahora ~~por~~ calcularemos su suma

Defino $g(x)=xf(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$$

Defino $h(x)=\frac{1}{x}g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ y ocurre que $h'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$

Sigue dos páginas más

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

estamos trabajando en $(-1,1)$

por tanto $h(x) = \int \frac{1}{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} = \int \frac{1/2}{1-x} + \int \frac{1/2}{1+x}$

$$= \frac{1}{2}\left(-\log|1-x| + \log|1+x|\right) + \cancel{k}^{\,0} = \frac{1}{2}\left(-\log|1-x| + \log|1+x|\right)$$

donde para calcular k utilizo que $h(x=0)=0$.

Ahora

$$g'(x) = x\,h(x) = \frac{1}{2}\left(-x\log|1-x| + x\log|1+x|\right) = \frac{x}{2}\left(\log|1+x| - \log|1-x|\right)$$

y por tanto

$$g(x) = \int g'(x) = -\frac{1}{2}\int x\log|1-x|\,dx + \frac{1}{2}\int x\log|1+x|$$

$=$

$$\int x\log(1+x)\,dx = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \int \frac{x^2}{2(1+x)} = \frac{x^2}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\left(-x + \frac{x^2}{2} + \log|1+x|\right)$$

$u = \log(1+x) \longrightarrow du = \frac{dx}{1+x}$

$dv = x\,dx \longrightarrow v = \frac{x^2}{2}$

$$\int \frac{x^2}{(1+x)} = \int -(1-x) + \frac{1}{1+x}\,dx = -x + \frac{x^2}{2} + \log|1+x| + k$$

$$\int x\log|1-x|\,dx = \int u\log|1+u|\,du = \frac{u^2}{2}\log|1+u| - \frac{1}{2}\left|-u + \frac{u^2}{2} + \log|1+u|\right| + k$$

$$= \frac{x^2}{2}\log|1-x| - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \log|1-x| + \right) + k$$

y por tanto

$$g(x) = -\frac{1}{2}\int x\log|1-x|\,dx + \frac{1}{2}\int x\log|1+x| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\left(\log|1+x| - \log|1-x|\right)\right) - \frac{1}{4}\left(\cancel{-}x + \frac{x^2}{2} + \log|1+x| - x - \frac{x^2}{2}\right.$$

$$\left. - \log|1-x|\right) + k = \frac{x^2}{4}\log\left|\left(1 - x^2\right)\right| - \frac{1}{4}\left(-2x + \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right) + k$$

Como $g(x=0)=0 \longrightarrow k=0$ y por tanto

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{4}\log\left|\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right| - \frac{1}{4x}\left(-2x + \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)}$$

Sabemos que la fórmula de $f(x)$ escrita arriba corresponde con la serie para todo $x \in (-1,1)$ pero como la serie converge en -1, y en 1 el Teorema de Abel garantiza que la función definida por la serie es contínua en $[-1,1]$ y así la expresión arriba escrita es válida para todo $x \in [-1,1]$

Por tanto, para el último punto basta sustituir $x=1$ en la expresión obteniendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)(2n-1)} = f(1) =$$

$\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ no esta definido ni en $x=1$ ni en $x=1$ por tanto la aseveración hecha es incorrecta pero no encuentro donde me he equivocado. en ningún sitio. Sólo que para hacer $f(1)$ necesitas calcular un límite.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\right)$$

si las tratamos como series finitas

no se pueden separar pues es $\frac{1}{2}(\infty - \infty)$.

Estas dos series se tratan de las series armónicas hasta el término $2n+1$ y $2n-1$. de los términos impares.

no exactamente, faltan términos pares.

MAL.

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} - \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\mu + \log 2n+1 + \varepsilon_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n\right.$$

HABRIA QUE OPERAR CON SUMAS FINITAS LUEGO TOMAR LIMITES

$$\left.\mu - \log 2n-1 - \varepsilon_{2n-1} + \frac{1}{2}H_n\right) = \frac{1}{2}\left(\log\frac{2n+1}{2n-1} + \varepsilon_{2n+1} - \varepsilon_{2n-1}\right) =$$

si hacemos el límite cuando $n \to +\infty$

$$\lim_n \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) + \varepsilon_{2n+1} - \varepsilon_{2n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_n \log\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}\log\lim_n\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 1 = \underline{\underline{0}}$$

Ese resultado es imposible ¡¡ALARMA!!

Si todos los términos son positivos la suma no puede dar cero.

Aquí se plantea la resolución del segundo apartado de forma independiente de la obtenida en el primero. Se pueden utilizar los Hn para hacer la suma... Pero hay que hacerlo bien.
El lector debería tratar de utilizar las ideas que aquí aparecen, con más cuidado y sosiego, para llegar a buen puerto. Es un entrenamiento excelente.