TEMA 2
EL ESTIMADOR MCO

S. Álvarez, A. Beyaert, M. Camacho, M. González, A. Quesada
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Lo que estudiaremos en este tema:

UNIVERSIDAD DE MURCIA

1. **El modelo de regresión múltiple**

2. **Funcionamiento e interpretación del estimador MCO**
   - 2.1 Introducción
   - 2.2 Estimación MCO. Modelo de regresión simple
   - 2.3 Estimación MCO. Modelo de regresión múltiple
   - 2.4 Estimación MCO. Interpretación
   - 2.5 Propiedades algebraicas del estimador MCO
   - 2.6 Bondad del ajuste: R-cuadrado
   - 2.7 Bondad del ajuste: R-cuadrado ajustado

3. **Unidades de medida y forma funcional**
   - 3.1 Unidades de medida
   - 3.2 Formas funcionales

Bibliografía básica: Wooldridge, 2008, cap. 2, 3 y 6

1. El modelo de regresión múltiple

UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

- y: variable dependiente, variable explicada o regresando
- $x_1,\ldots,x_k$: variables independientes, variables explicativas o regresores
- $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_k$: son los $K=(k+1)$ coeficientes del modelo
- ε: término de error, perturbación o shock

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

- Los coeficientes son **efectos ceteris paribus**, si se cumple el supuesto de **media condicionada nula:**

$$E(\varepsilon / x_1, x_2, \ldots, x_k) = E(\varepsilon) = 0$$

Dos implicaciones:

  - $E(\varepsilon / x_1, x_2, \ldots, x_k) = E(\varepsilon)$

    Es un supuesto clave. Implica que el valor esperado de ε sea independiente de los valores de $x_1, \ldots, x_k$
  - $E(\varepsilon) = 0$

    No es restrictivo, cumpliéndose lo anterior, siempre que el modelo incluya término constante

1. El modelo de regresión múltiple

UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$$

- Es un **modelo lineal en parámetros**
- La interpretación de β_1 es:

$$\beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} \quad \text{si } \Delta x_2 = \Delta x_3 = \ldots = \Delta x_k = \Delta \varepsilon = 0$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Un caso particular: el **modelo de regresión simple**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

- El modelo de regresión múltiple es más útil que el simple porque:

  – permite controlar explícitamente los diversos factores que afectan a la variable dependiente

  – permite generalizar relaciones funcionales entre variables: por ejemplo, una función cuadrática

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + ... + \beta_k x_k + \varepsilon$$

- Objetivo: estimar $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ de **la función de regresión poblacional**

$$E\left(y/x_1, \ldots, x_k\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k$$

- Necesitamos una **muestra** de la población

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i; \quad i = 1, \ldots, N$$

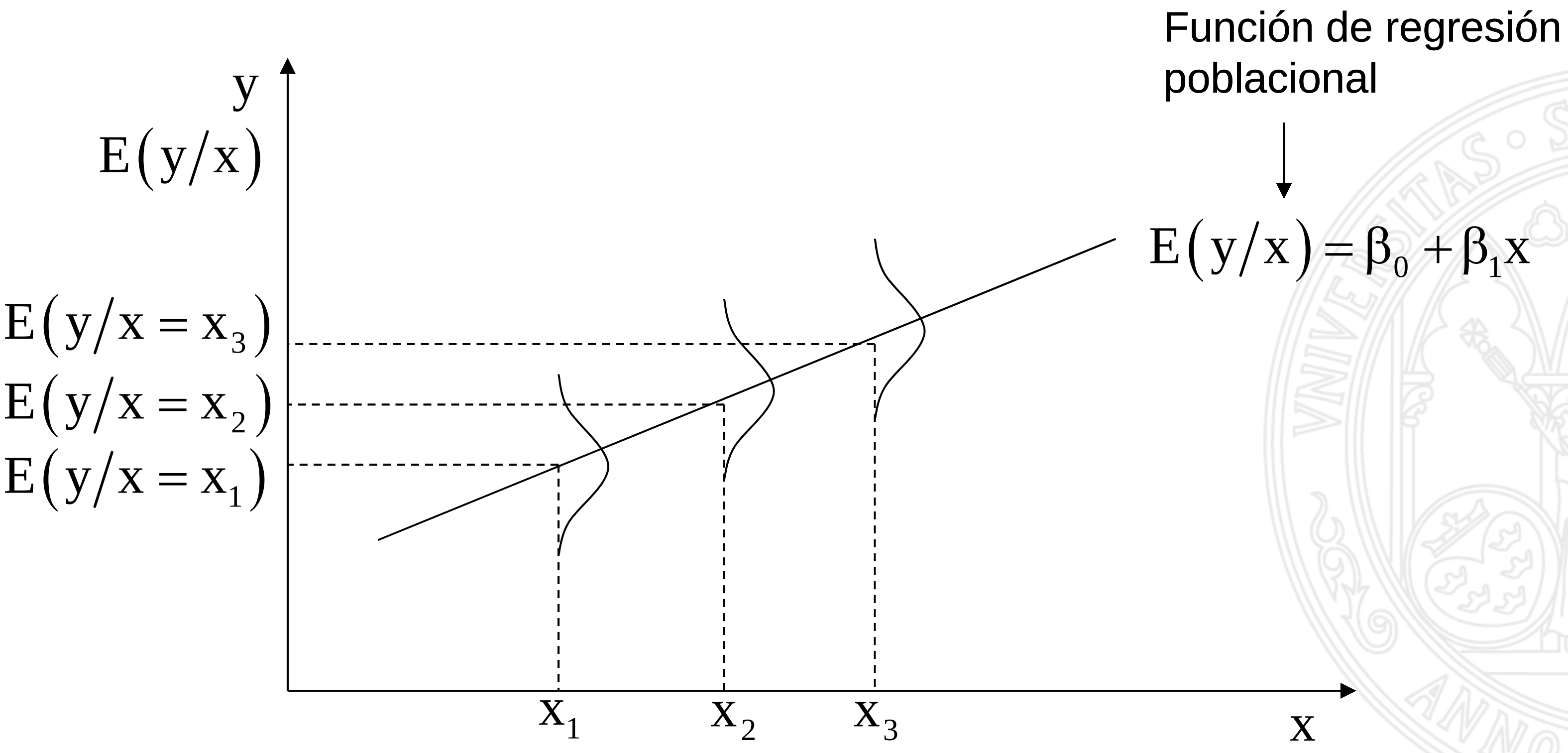
- $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ son los valores estimados de los coeficientes y definen la **función de regresión muestral**

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}$$

- La diferencia entre el valor verdadero y el ajustado es el **residuo**

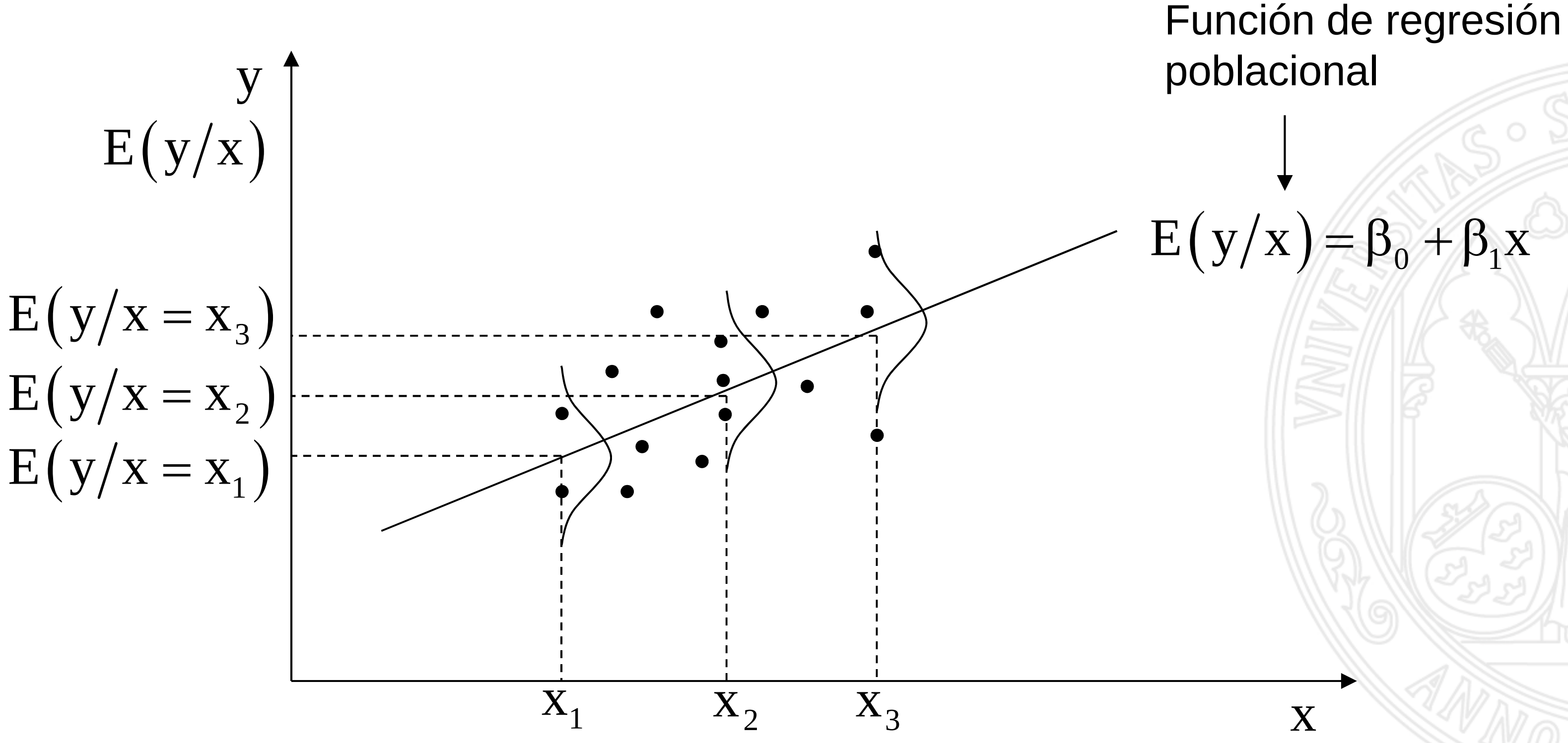
$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \ldots - \hat{\beta}_k x_{ki}$$

Ilustración gráfica en modelo de regresión simple: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$



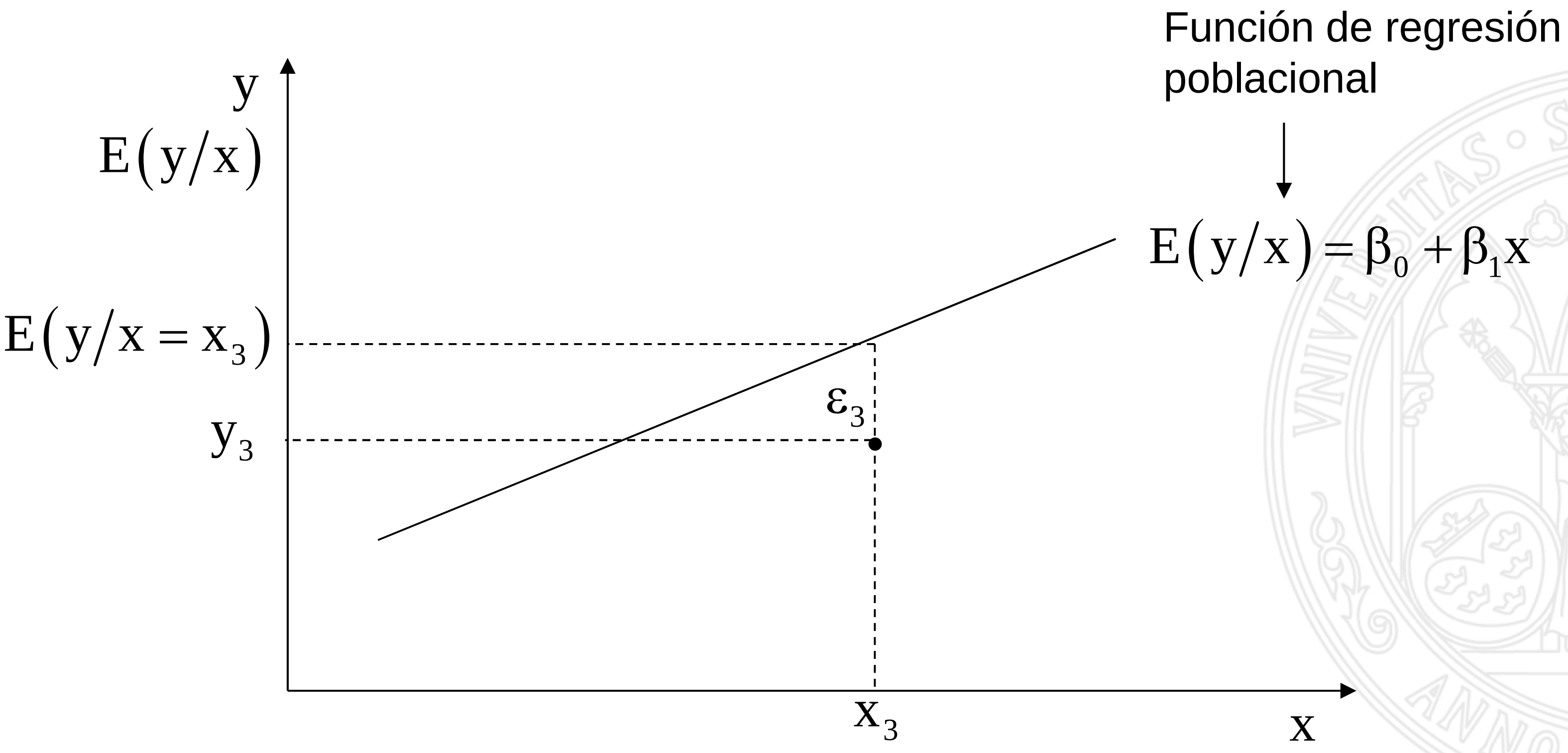
UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$



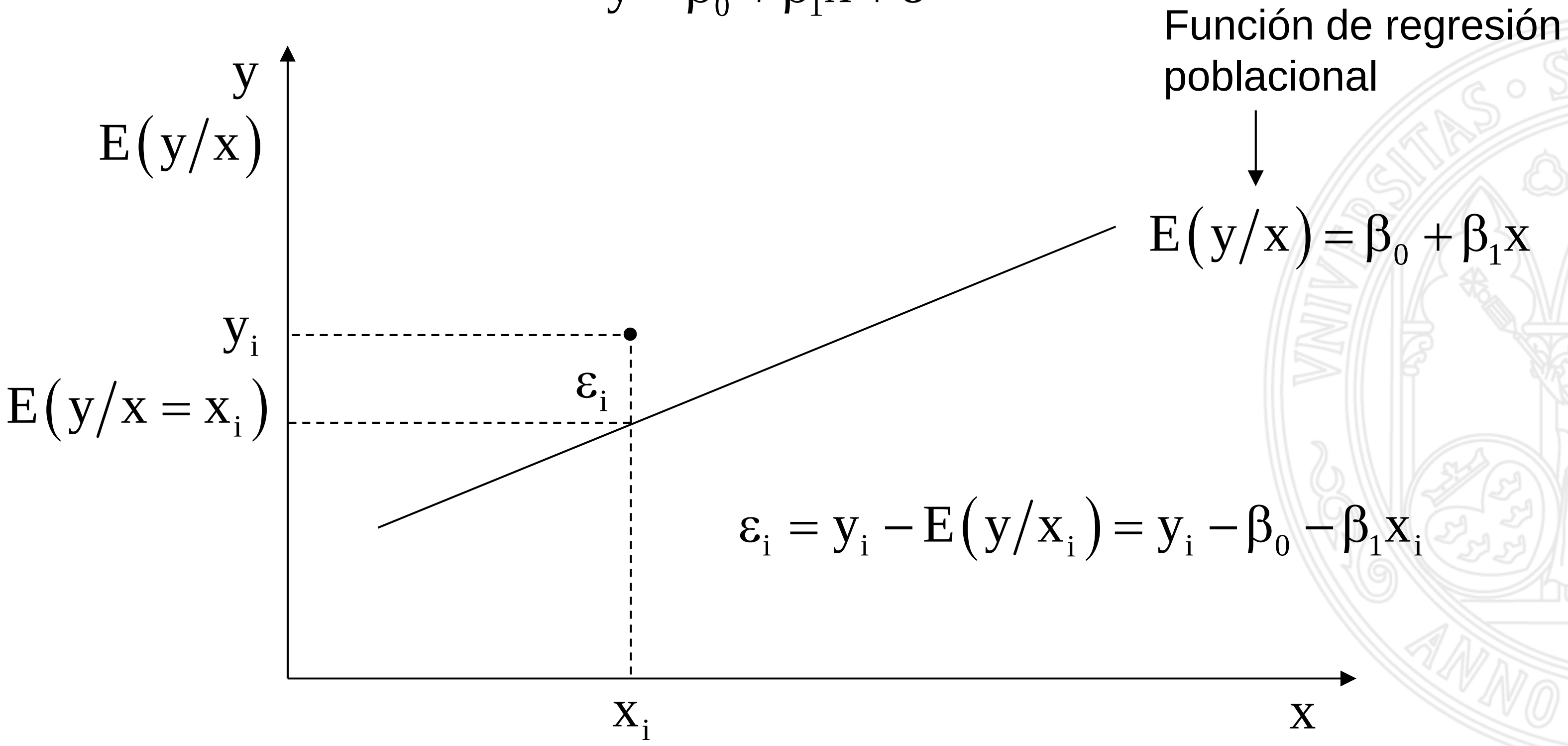
UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

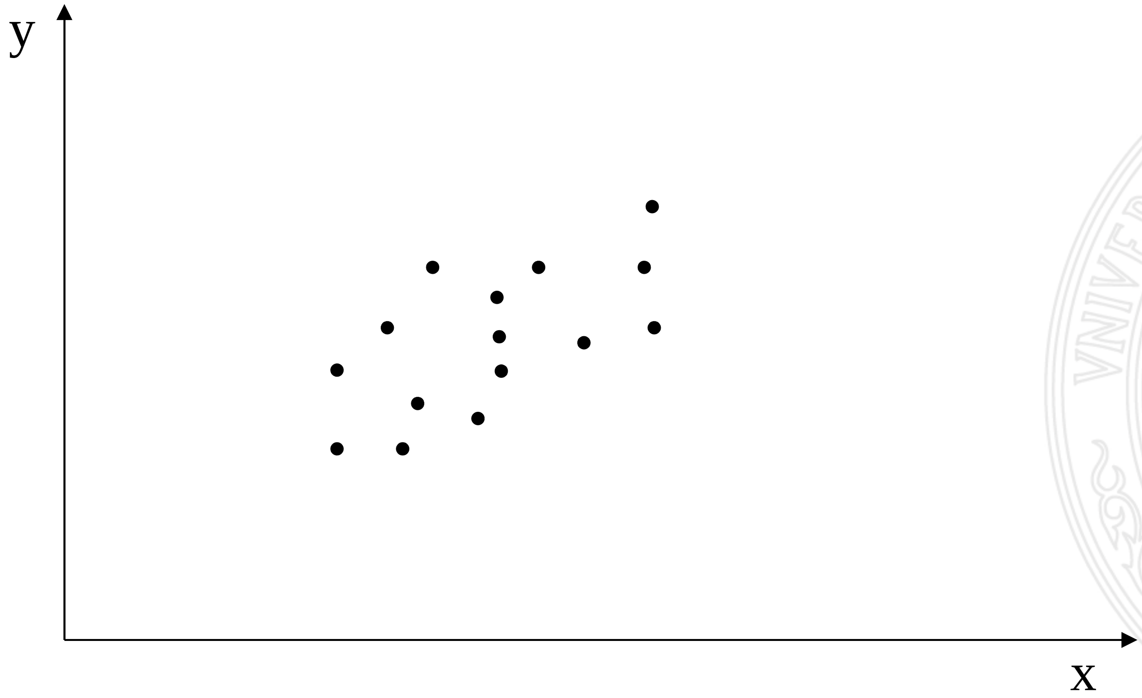


En general, para la observación “i”

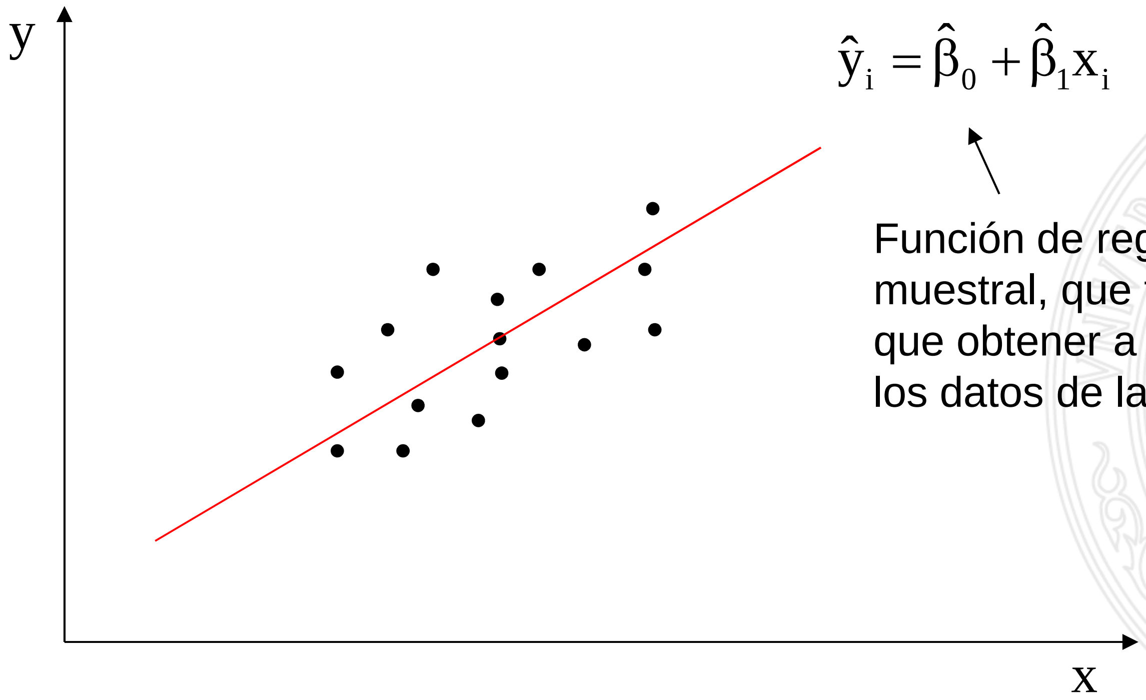
$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$



$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$



$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$



$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

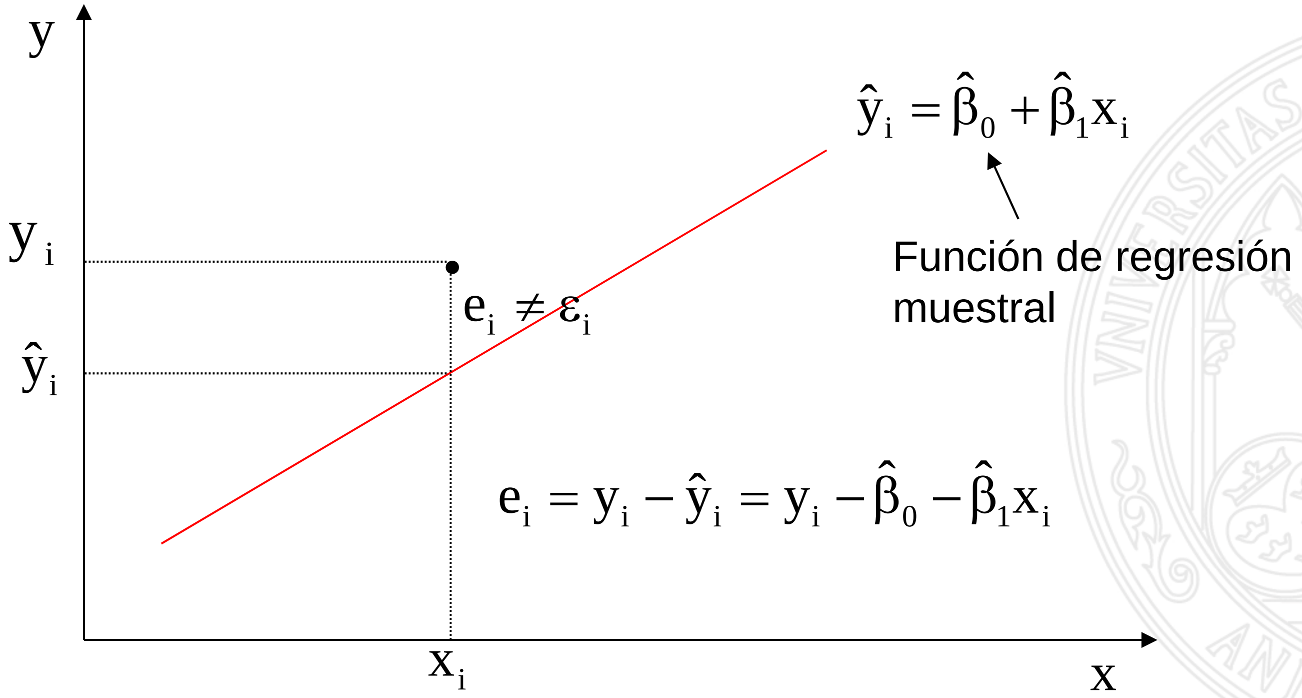
Función de regresión muestral, que tenemos que obtener a partir de los datos de la muestra

2. Funcionamiento e interpretación del estimador MCO

2.2 Estimación MCO. Modelo de regresión simple

UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

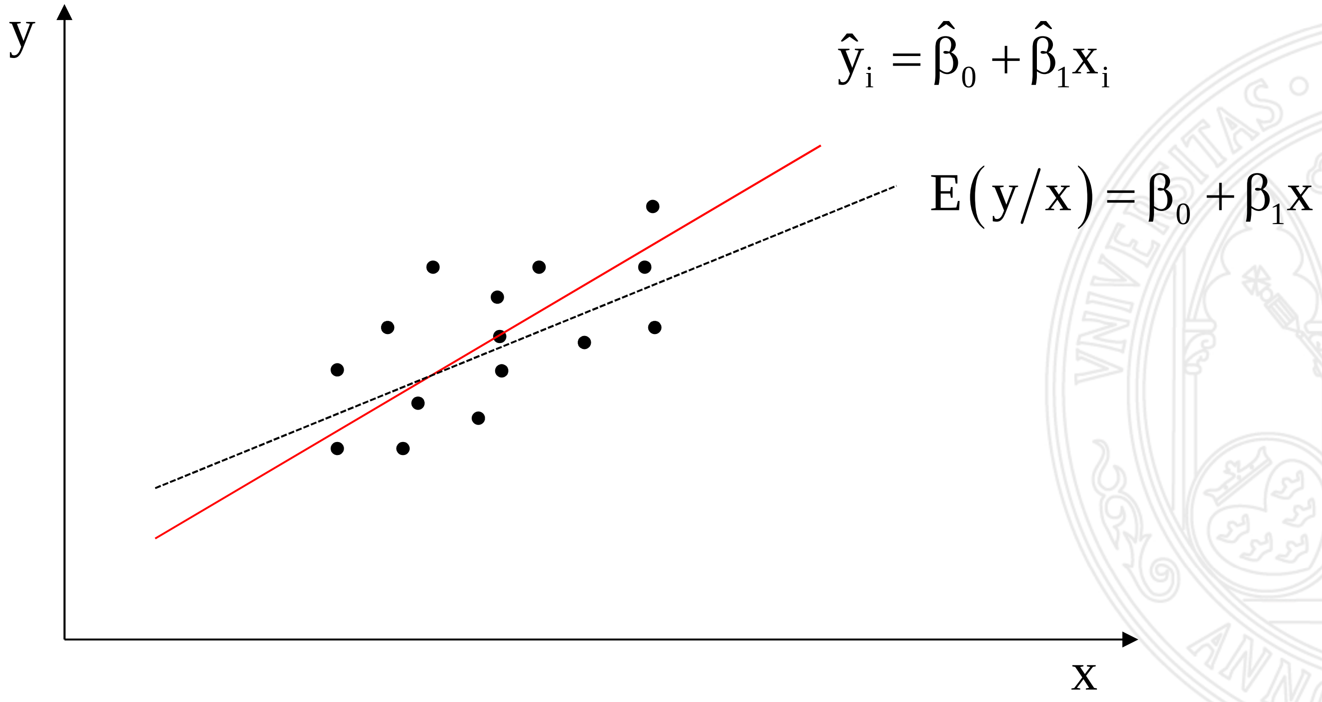


2. Funcionamiento e interpretación del estimador MCO

2.2 Estimación MCO. Modelo de regresión simple

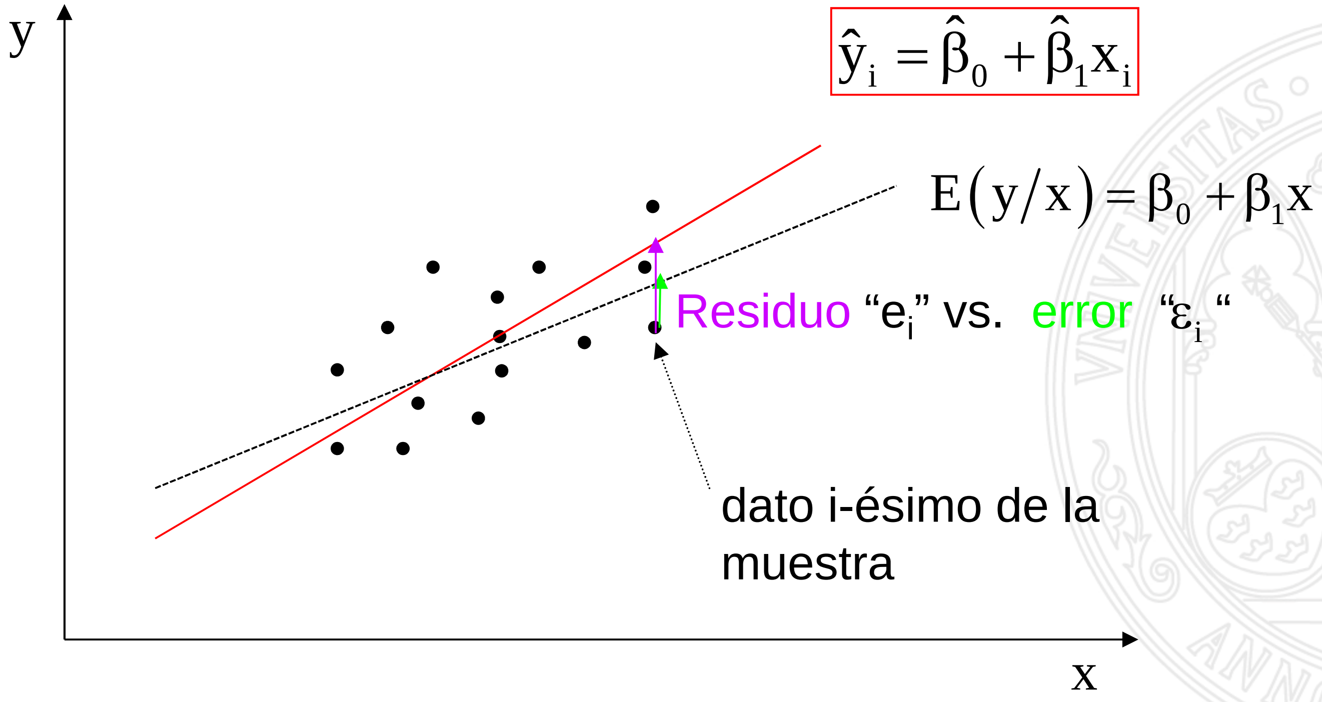
UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$



UNIVERSIDAD DE MURCIA

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$



- *Mínimos Cuadrados Ordinarios* (MCO), **regresión simple**:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i ; \forall i = 1, \dots, N$$

- Buscamos $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

- MCO escoge $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ para minimizar la suma de los cuadrados de los residuos:

$$\underset{b_0, b_1}{\mathrm{Min}} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_0 - b_1 x_i \right)^2 \equiv \underset{b_0, b_1}{\mathrm{Min}}\, Q\left(b_0, b_1\right)$$

- Las condiciones de primer orden son:

$$\left. \frac{\partial Q\left(b_0, b_1\right)}{\partial b_0} \right|_{b_0 = \hat{\beta}_0, b_1 = \hat{\beta}_1} = 0$$

$$\left. \frac{\partial Q\left(b_0, b_1\right)}{\partial b_1} \right|_{b_0 = \hat{\beta}_0, b_1 = \hat{\beta}_1} = 0$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- De las condiciones de primer orden obtenemos el **sistema de ecuaciones normales**:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1 x_i\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_i\left(y_i-\hat\beta_0-\hat\beta_1 x_i\right)=0$$

- Resolviendo: $\hat\beta_0=\bar y-\hat\beta_1\bar x$

$$\hat\beta_1=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i\left(y_i-\bar y\right)}{\sum_{i=1}^{N}x_i\left(x_i-\bar x\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar x\right)y_i}{\sum_{i=1}^{N}x_i\left(x_i-\bar x\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar x\right)\left(y_i-\bar y\right)}{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar x\right)^2}=\frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

- => una condición necesaria para estimar por MCO es: $\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\bar x\right)^2>0$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- **Regresión múltiple**: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \quad \forall i = 1, \ldots, N$
- Buscamos: $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}$
- MCO escoge $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$ para minimizar la suma de los cuadrados de los residuos:

$$\underset{b_0, b_1, \ldots, b_k}{\text{Min}} \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_0 - b_1 x_{1i} - \ldots - b_k x_{ki} \right)^2 \equiv \underset{b_0, b_1, \ldots, b_k}{\text{Min}} Q\left(b_0, b_1, \ldots b_k \right)$$

- Condiciones de primer orden:

$$\left. \frac{\partial Q\left(b_0, b_1, \ldots, b_k \right)}{\partial b_0} \right|_{b_0 = \hat{\beta}_0, b_1 = \hat{\beta}_1, \ldots, b_k = \hat{\beta}_k} = 0$$

$$\vdots$$

$$\left. \frac{\partial Q\left(b_0, b_1, \ldots, b_k \right)}{\partial b_k} \right|_{b_0 = \hat{\beta}_0, b_1 = \hat{\beta}_1, \ldots, b_k = \hat{\beta}_k} = 0$$

- El **sistema de ecuaciones normales** es:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_{1i}-\ldots-\hat{\beta}_k x_{ki}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_{1i}\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_{1i}-\ldots-\hat{\beta}_k x_{ki}\right)=0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{N}x_{ki}\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_{1i}-\ldots-\hat{\beta}_k x_{ki}\right)=0$$

- Resolviendo obtenemos $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k$

En **modelos sin termino constante**: $\hat{y} = \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k$

- El sistema de ecuaciones normales es:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{1i}\left(y_i - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \ldots - \hat{\beta}_k x_{ki}\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ki}\left(y_i - \hat{\beta}_1 x_{1i} - \ldots - \hat{\beta}_k x_{ki}\right) = 0$$

- Resolviendo obtenemos $\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Expresión algebraica del estimador MCO:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{N} r_{1i} y_i}{\sum_{i=1}^{N} r_{1i}^2}$$

r_1 es el residuo de la regresión de x_1 sobre $x_2,\ldots,x_k$, y una constante. Es la parte de x_1 que no está explicada con $x_2,\ldots,x_k$

$\hat{\beta}_1$ mide la relación muestral entre y y x_1 una vez tomado en cuenta el efecto de $x_2,\ldots, x_k$

$\Rightarrow$ estimación del efecto céteris paribus

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + ... + \hat{\beta}_k x_{ki} \quad \forall i=1,\ldots,N$$

- $\hat{\beta}_0$: Matemáticamente, es el valor estimado de y cuando todas las variables explicativas valen cero. Pero ojo con la interpretación económica.
- $\hat{\beta}_1,\ldots,\hat{\beta}_k$: Efectos parciales o efectos céteris paribus

$$\hat{\beta}_j = \frac{\hat{\Delta y}}{\Delta x_j}$$

Variación estimada en y ante cambios unitarios en x_j, cuando el resto de variables explicativas no cambian (j=1,2,…,k)

- La regresión ofrece información céteris paribus aunque los datos no hayan sido recogidos de forma céteris paribus, si se cumple:

$$E\left(\varepsilon_i / x_{1i}, x_{2i},\ldots, x_{ki}\right) = E\left(\varepsilon_i\right) = 0 \quad \forall i$$

Derivan del sistema de ecuaciones normales

1. En **modelos con término constante**:

- La suma y la media muestral de los residuos MCO es nula:

$$\sum_{i=1}^{N} e_i = 0 \Rightarrow \bar{e} = 0$$

- Las medias muestrales de y y de $\hat{y}$ son iguales:

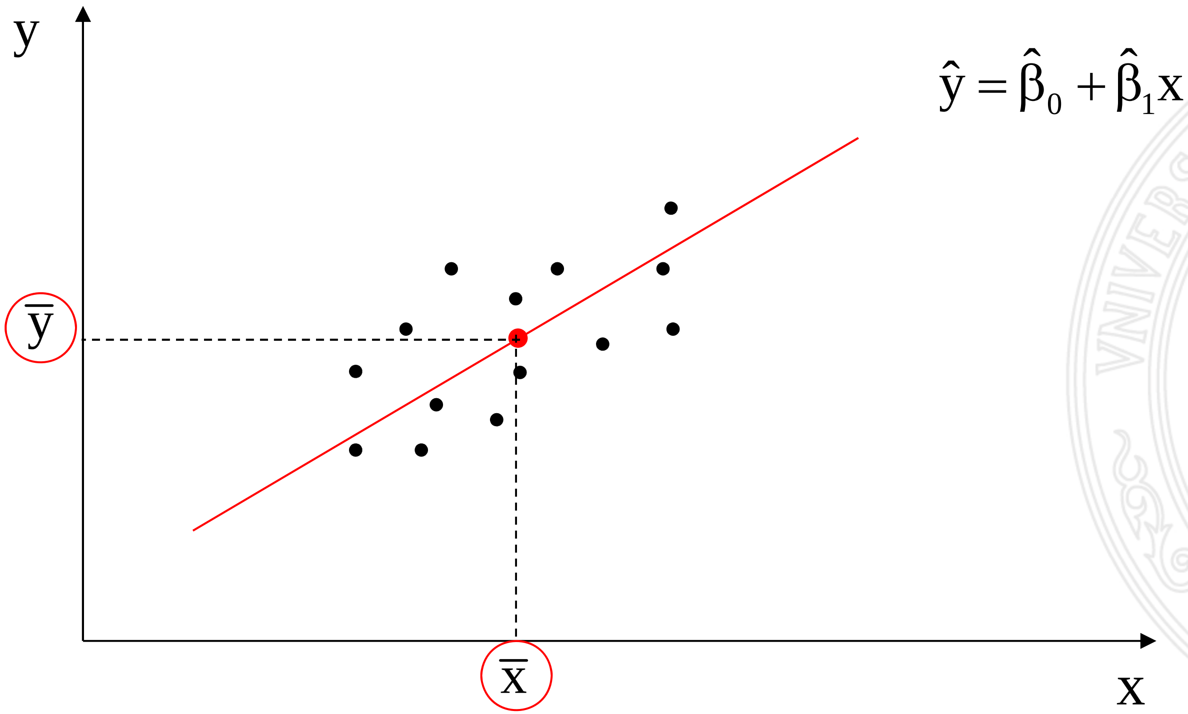
$$e_i = y_i - \hat{y}_i \Rightarrow \bar{e} = \bar{y} - \bar{\hat{y}} \Rightarrow \bar{y} = \bar{\hat{y}}$$

- El punto $(\bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_k)$ siempre está sobre la función de regresión MCO:

$$\bar{e} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k \bar{x}_k$$

Modelo de regresión simple con término constante: $\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$

Gráficamente



2. **Con o sin término constante:**

- Los regresores y los residuos MCO son ortogonales:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ji} e_i = 0; \, j = 1, \ldots, k$$

- Implica que $\hat{y}$ y los residuos MCO son ortogonales:

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{y}_i e_i = 0$$

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{y}_i e_i = \sum_{i=1}^{N} (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \ldots + \hat{\beta}_k x_{ki}) e_i =$$

$$= \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{N} e_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} e_i + \ldots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^{N} x_{ki} e_i = 0$$

- Si $\bar{e} = 0$ => las covarianzas muestrales entre cada regresor y el residuo y entre $\hat{y}$ y el residuo son nulas.

UNIVERSIDAD DE **MURCIA**

- El **coeficiente de determinación** es:

$$R^2 = 1 - \frac{SCE}{STC} \qquad R^2 \leq 1$$

donde:

$$STC = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2$$

$$SCE = \sum_{i=1}^{N} e_i^2$$

en modelos con constante

$$\text{además}: SCR = \sum_{i=1}^{N} \left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

STC: Suma total de cuadrados

SCE: Suma de cuadrados de los residuos

SCR: Suma de cuadrados de la regresión

- En **modelos con término constante** STC= SCR+SCE

$$R^2 = 1 - \frac{SCE}{STC} = \frac{SCR}{STC} \qquad 0 \leq R^2 \leq 1$$

Interpretación: Es la fracción de la variación muestral de y explicada por la función de regresión muestral

- También se puede demostrar que $R^2 = \left(\frac{S_{y\hat{y}}}{S_y S_{\hat{y}}} \right)^2$

- Si **no existe término constante** STC≠SCR+SCE
- El R^2 puede ser negativo sólo en modelos sin término constante

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Un R^2 bajo no implica que la regresión MCO no sea útil

- El R^2 nunca disminuye cuando se añade otro regresor

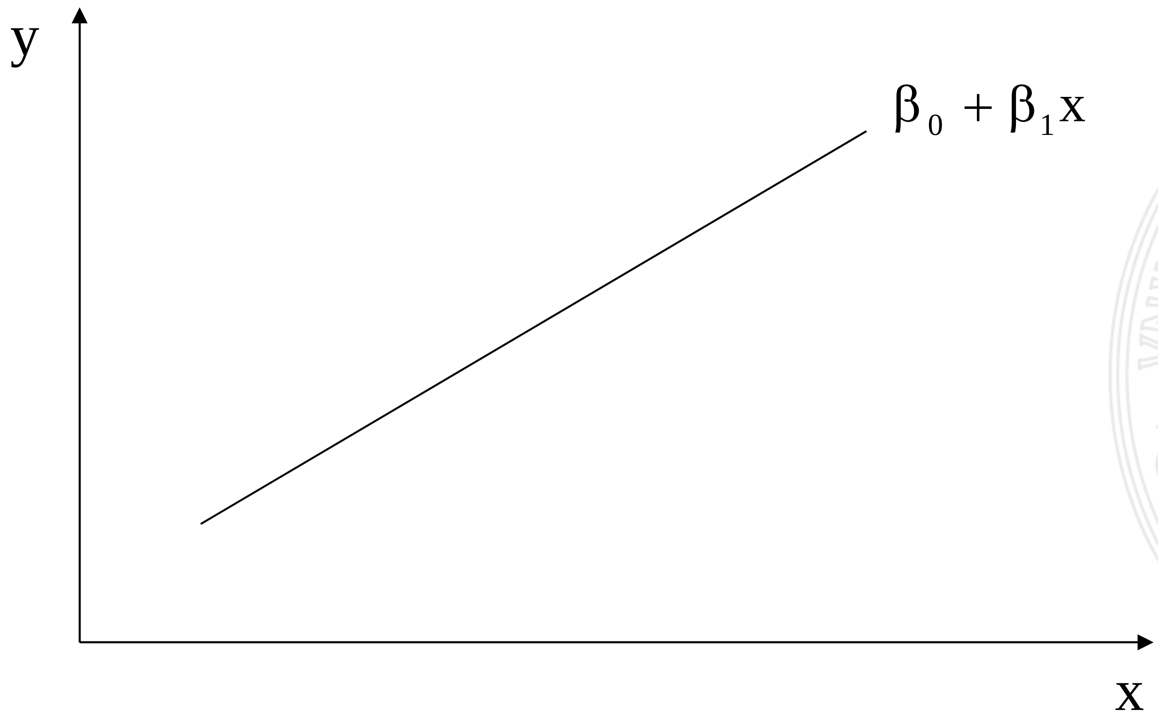
  $\Rightarrow$ no permite comparar modelos con distinto número de regresores

En efecto, sea cual sea la calidad de los regresores, ocurre que

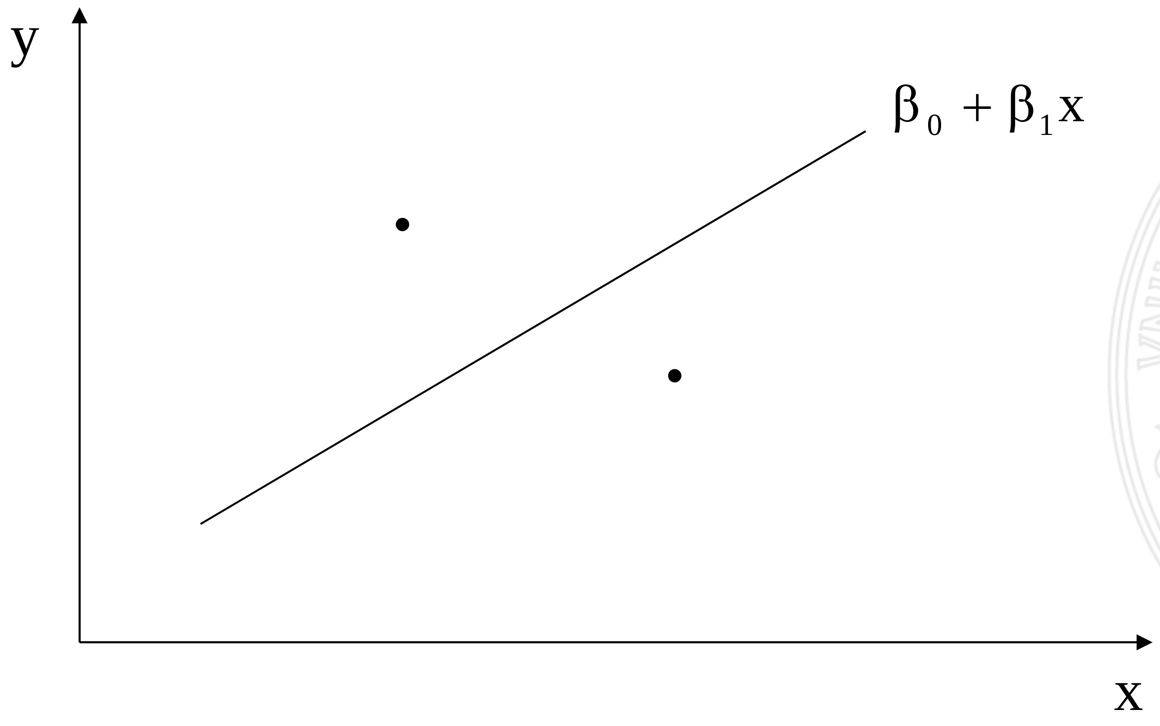
$$\text{Si } K = N \Rightarrow R^2 = 1$$

Gráficamente

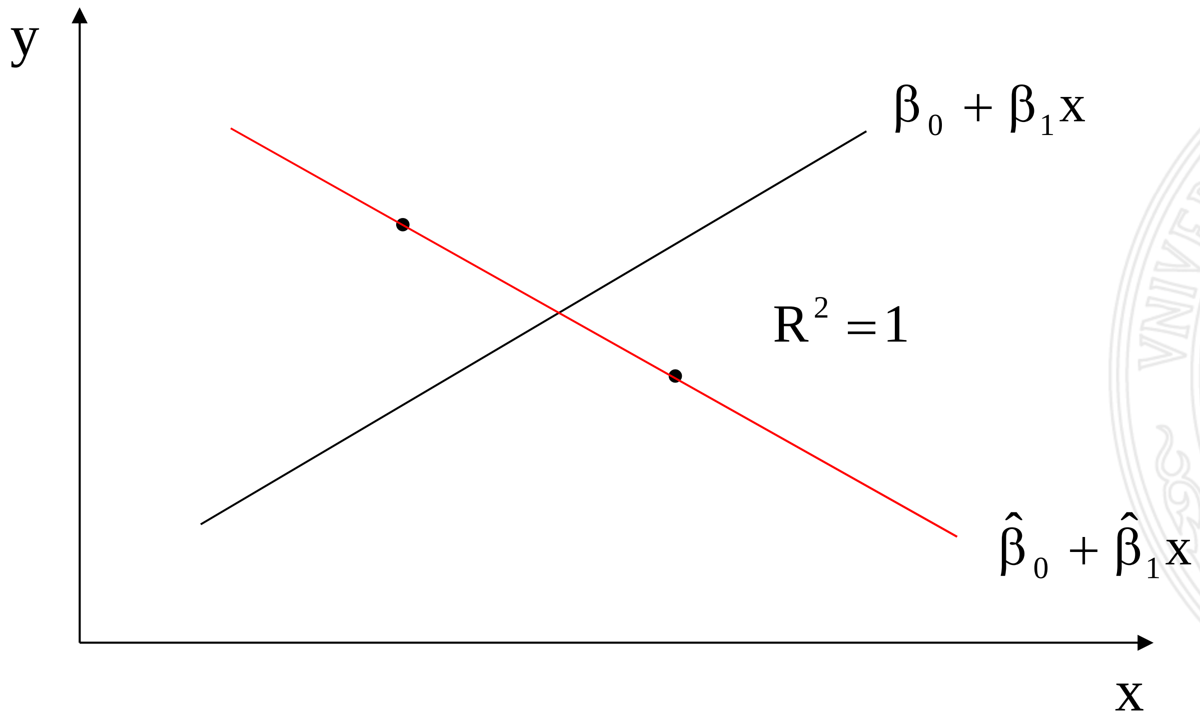
Modelo de regresión simple: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \Rightarrow K = 2$



Si N = 2



Entonces, $K = N$ y $R^2 = 1$



- El **coeficiente de determinación ajustado** es:

$$R_a^2 = 1 - \frac{(N-1)\ SCE}{(N-K)\ STC} = 1 - \left(1 - R^2\right)\frac{N-1}{N-K} \qquad R_a^2 \leq 1$$

- Penaliza la inclusión de variables independientes

- Permite comparar algo mejor que el R^2 modelos con distinto número de regresores

- El R_a^2 puede ser negativo incluso en modelos con término constante

Modelo poblacional: $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + \varepsilon$

Modelo estimado: $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \ldots + \hat{\beta}_k x_k + e$

- Los cambios de origen en las variables sólo afectan a β_0 y a $\hat{\beta}_0$
- Si y se multiplica por una constante c (cambio de escala), entonces **todos** los coeficientes $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ y sus estimaciones MCO $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k)$ se multiplican por c.
- Si una x_j se multiplica (divide) por una constante c, entonces β_j y $\hat{\beta}_j$ se dividen (multiplican) por c
- Si las variables están en logaritmos los cambios de escala en las unidades de medida sólo afectan a β_0 y a $\hat{\beta}_0$
- El R-cuadrado es invariable a los cambios de unidades en las variables

Ejemplo: Cambio de origen en y

$$y^* = c + y$$

A. Efectos en el **modelo poblacional**: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$

- El nuevo modelo es: $y^* = \beta_0^* + \beta_1^* x + \varepsilon^*$

- Deshaciendo el cambio de origen:

$$y + c = \beta_0^* + \beta_1^* x + \varepsilon^* \Rightarrow y = (\beta_0^* - c) + \beta_1^* x + \varepsilon$$

$$\beta_1^* = \beta_1 \quad \beta_0^* = c + \beta_0$$

$$y^* = c + y$$

B. Efectos en el **modelo estimado**: $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + e$

- El nuevo modelo estimado es: $y^* = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x + e^*$

$$\hat{\beta}_0^* = \overline{y}^* - \hat{\beta}_1^* \overline{x} \qquad \hat{\beta}_1^* = \frac{S_{xy^*}}{S_x^2}$$

- Deshaciendo el cambio de origen:

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \hat{\beta}_1 \qquad \hat{\beta}_0^* = c + \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = c + \hat{\beta}_0$$

¿Qué pasa con el R-cuadrado?

¿Qué pasaría si el cambio de origen afectara a x?

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Ejemplo: Cambio de escala en y

$$y^* = c \cdot y$$

A. Efectos en el **modelo poblacional**: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$

- El nuevo modelo es: $y^* = \beta_0^* + \beta_1^* x + \varepsilon^*$

- Deshaciendo el cambio de escala:

$$c \cdot y = \beta_0^* + \beta_1^* x + \varepsilon^* \Rightarrow y = \frac{\beta_0^*}{c} + \frac{\beta_1^*}{c} x + \varepsilon$$

$$\beta_1^* = c \cdot \beta_1 \qquad \beta_0^* = c \cdot \beta_0$$

$$y^* = c \cdot y$$

B. Efectos en el **modelo estimado**: $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + e$

- El nuevo modelo estimado es: $y^* = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* x + e^*$

$$\hat{\beta}_0^* = \overline{y}^* - \hat{\beta}_1^* \overline{x} \qquad \hat{\beta}_1^* = \frac{S_{xy^*}}{S_x^2}$$

- Deshaciendo el cambio de escala:

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{cS_{xy}}{S_x^2} = c\hat{\beta}_1 \qquad \hat{\beta}_0^* = c\overline{y} - c\hat{\beta}_1 \overline{x} = c\hat{\beta}_0$$

¿Qué pasa con el R-cuadrado?

¿Qué pasaría si el cambio de escala afectara a x?

- Modelo lineal en parámetros y variables: $y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$

  Derivando: $\beta_1 = \dfrac{dy}{dx}$ es el **efecto marginal** de x sobre y

  Tomando incrementos: $\Delta y = \beta_1 \Delta x \quad \text{si } \Delta\varepsilon = 0$

  $$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

  Por ser el modelo lineal en parámetros y variables

- Modelos lineales en parámetros, pero no en variables:
  - modelos que incluyen variables en logaritmos
  - funciones cuadráticas
  - otros

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Modelos que incluyen variables en logaritmos:

- **Modelo log-log:** $\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + \varepsilon$

Derivando: $\beta_1 = \dfrac{d \ln y}{d \ln x} = \dfrac{dy/y}{dx/x}$

Aproximando a incrementos (válido sólo para Δx pequeños)

$$\beta_1 \approx \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \frac{100 \cdot \Delta y/y}{100 \cdot \Delta x/x} = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \text{elasticidad}$$

$\Rightarrow \beta_1$ es una **elasticidad**

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Modelos que incluyen variables en logaritmos:

- **Modelo log-nivel:** $\ln y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$

Derivando: $\beta_1 = \dfrac{d \ln y}{dx} = \dfrac{dy/y}{dx}$

Aproximando a incrementos (válido sólo para Δx pequeños)

$$\beta_1 \approx \frac{\Delta y/y}{\Delta x}$$

Multiplicando por 100 para expresar la variación de *y* en %

$$100 \cdot \beta_1 \approx \frac{100 \cdot \Delta y/y}{\Delta x} \Rightarrow 100 \cdot \beta_1 \approx \frac{\% \Delta y}{\Delta x} = \textbf{semielasticidad}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Modelos que incluyen variables en logaritmos:

- **Modelo nivel-log:** $y = \beta_0 + \beta_1 \ln x + \varepsilon$

Derivando: $\beta_1 = \dfrac{dy}{d\ln x} = \dfrac{dy}{dx/x}$

Aproximando a incrementos (válido sólo para Δx pequeños)

$$\beta_1 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x/x}$$

Dividiendo por 100 para expresar la variación de x en %

$$\frac{\beta_1}{100} \approx \frac{\Delta y}{100 \cdot \Delta x/x} \Rightarrow \frac{\beta_1}{100} \approx \frac{\Delta y}{\%\Delta x} = \textbf{semielasticidad}$$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Ejemplo numérico:

- $\ln\hat{y} = 2 + 0,05x$

  Si $\Delta x = 1 \Rightarrow \Delta\hat{y}\% \approx (0.05 \cdot 100)\% = 5\%$

- $\hat{y} = 2 + 70\ln x$

  Si $\Delta x\% = 1\% \Rightarrow \Delta\hat{y} \approx (70/100) = 0.7$ unidades

- $\ln\hat{y} = 2 - 2\ln x$

  Si $\Delta x\% = 1\% \Rightarrow \Delta\hat{y}\% \approx -2\%$

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Funciones cuadráticas:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$$

- Permiten captar efectos marginales crecientes o decrecientes
- El **efecto marginal** de x sobre y es:

$$\frac{dy}{dx} = \beta_1 + 2\beta_2 x$$

Es creciente cuando $\beta_2 > 0$ y decreciente cuando $\beta_2 < 0$

Aproximando a incrementos: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \beta_1 + 2\beta_2 x$

Lo que hemos aprendido:

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Definir e interpretar el modelo de regresión múltiple
- El método de los Mínimos Cuadrados Ordinarios para estimar los coeficientes del modelo
- Interpretar las estimaciones
- Propiedades algebraicas de los estimadores MCO
- Utilizar el R-cuadrado y el R-cuadrado ajustado para medir la bondad del ajuste
- Cambio en las estimaciones MCO cuando cambian las unidades de medida de la variable dependiente o de las variables independientes
- Utilizar el modelo de regresión lineal para modelizar relaciones no lineales entre las variables:
  - el logaritmo neperiano permite trabajar con modelos de elasticidad constante y de semielasticidad constante
  - las funcionales cuadráticas permiten captar efectos marginales crecientes o decrecientes