TEMA 6
HETEROSCEDASTICIDAD

S. Álvarez, A. Beyaert, M. Camacho, M. González, A. Quesada
Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Lo que estudiaremos en este tema:

UNIVERSIDAD DE MURCIA

1. El problema de la heteroscedasticidad

1.1 Introducción
1.2 Consecuencias sobre el estimador MCO
1.3 Mínimos Cuadrados Generalizados

2. Detección de la heteroscedasticidad: el contraste de White

3. Estimación e inferencia: el método de White

Bibliografía básica: Wooldridge, 2008, cap. 8

- Modelo: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$

- Heteroscedasticidad: “la varianza del error no es constante”

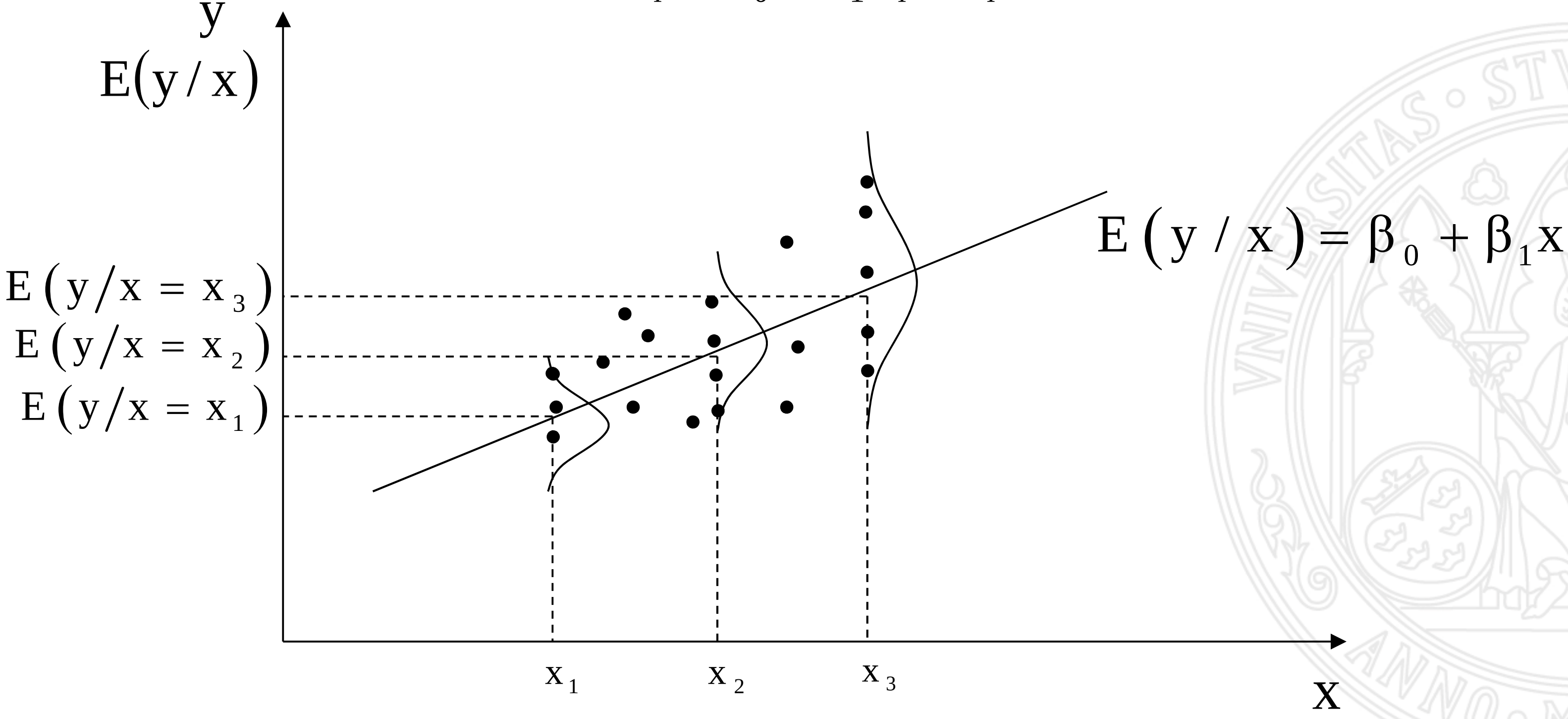
$$V\left(\varepsilon_i \mid x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{k(N-1)}, x_{kN}\right) = V\left(\varepsilon_i \mid x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ki}\right) = \sigma_i^2 \quad i = 1, \cdots, N$$

$$\Rightarrow V\left(y_i \mid x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ki}\right) = \sigma_i^2 \quad i = 1, \cdots, N$$

- No se cumple RLM.4
- Algunos ejemplos económicos
  - Consumo en función de la renta
  - Salario en función de los años de educación
  - Dividendos a repartir entre accionistas en función del beneficio
  - Errores cometidos en función de las horas de aprendizaje

- Gráficamente:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$



UNIVERSIDAD DE MURCIA

- Se siguen cumpliendo RLM.1 a RLM.3 $\Rightarrow$ la estimación MCO de los parámetros sigue siendo
  - insesgada $E(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ ☺
  - consistente $\underset{N\to\infty}{\text{p lim}}(\hat{\beta}_j) = \beta_j$ ☺
- Cambia la varianza de los parámetros estimados por MCO

Homoscedasticidad	Heteroscedasticidad
$V(\hat{\beta}_j) = \dfrac{\sigma^2}{STC_j(1-R_j^2)} = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N} r_{ij}^2}$	$V(\hat{\beta}_j) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} r_{ij}^2 \sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} r_{ij}^2\right)^2}$

(Demostración: Wooldridge p. 122)

r_{ij}, STC_j y R_j^2: residuos, STC y R^2 de la regresión de x_j sobre el resto de explicativas

- No se puede aplicar el Teorema de Gauss-Markov ☹

  $\Rightarrow$ La varianza de MCO ya no es óptima (MCO ya no es ELIO)

- La estimación habitual de la varianza de los estimadores es
  - sesgada ☹
  - inconsistente ☹

- Bajo RLM.6 los contrastes t y F habituales ya no son válidos ☹
  - Están basados en $V\left(\hat{\beta}_j\right)$ bajo homoscedasticidad

- No afecta a interpretación de R^2 ni R_a^2 ☺

- Con heteroscedasticidad el estimador más apropiado es Mínimos Cuadrados Generalizados (MCG)

- Dado el modelo con heteroscedasticidad

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i,$$

$$V(\varepsilon_i \mid x_{1i}, \cdots, x_{ki}) = \sigma_i^2 \quad \text{i=1,...,N} \Rightarrow \text{no cumple RLM.4}$$

- Si σ_i^2 es conocida podemos calcular MCG

- <u>Cálculo MCG</u>

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, \qquad V(\varepsilon_i \mid x_{1i}, \cdots, x_{ki}) = \sigma_i^2$$

- Dividimos por la desviación típica, obtenemos el **modelo ponderado**:

$$\frac{y_i}{\sigma_i} = \beta_0 \frac{1}{\sigma_i} + \beta_1 \frac{x_{1i}}{\sigma_i} + \cdots + \beta_k \frac{x_{ki}}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$$

- El modelo ponderado cumple RLM.1-RLM.5:

$$V\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1 \quad i=1,\ldots,N$$

- MCG es MCO en el modelo ponderado

  $\Rightarrow$ según el Teorema de Gauss-Markov, **MCG es ELIO**

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- MCG en contexto de heteroscedasticidad se llama **Mínimos Cuadrados Ponderados**: cada observación se pondera inversamente a la varianza de su error
- Los contrastes t y F habituales serían aplicables en el modelo ponderado
- Para interpretar los parámetros del modelo siempre volvemos a la ecuación original
- En la práctica casi nunca conoceremos σ_i^2
  - En la Sección 3 veremos distintas soluciones prácticas

- Ejemplo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$
  - Supongamos que sabemos

$$V(\varepsilon_i \mid x_{1i}, \cdots, x_{ki}) = \lambda x_{1i}$$

  - El modelo ponderado es homoscedástico

$$\frac{y_i}{\sqrt{x_{1i}}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{x_{1i}}} + \beta_1 \frac{x_{1i}}{\sqrt{x_{1i}}} + \cdots + \beta_k \frac{x_{ki}}{\sqrt{x_{1i}}} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_{1i}}}$$

$$V\left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{x_{1i}}}\right) = \frac{\lambda x_{1i}}{x_{1i}} = \lambda$$

  - Nota: no necesitamos conocer λ

2. Detección de la heteroscedasticidad: el contraste de White

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- El contraste de White es un contraste muy general de heteroscedasticidad

$$H_0: \text{ homoscedasticidad}$$
$$H_1: \text{ heteroscedasticidad}$$

- Procedimiento de contraste:

1. MCO en $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$ y obtenemos los residuos e_i

2. Regresión auxiliar por MCO y obtenemos el R-cuadrado (R_e^2)

$$e_i^2 = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_{ji} + \sum_{j=1}^{k} \delta_j x_{ji}^2 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{h<j} \omega_{jh} x_{ji} x_{hi} + u_i$$

Si hay pocos grados de libertad, a veces se supone ω_{jh}=0

3. Contraste de significatividad global en la regresión auxiliar

H_0 : $\alpha_j = 0$, $\delta_j = 0$ y $\omega_{jh} = 0 \; \forall \; j,h$ (homosced.)
H_1 : no H_0 (heterosced.)

4. Estadístico del contraste:

$$NR_e^2 \underset{H_0}{\sim} \chi_p^2$$

p es el número de regresores en la regresión auxiliar (sin contar la constante)

3. Estimación e inferencia: el método de White

UNIVERSIDAD DE MURCIA

- El método de White se aplica para poder hacer inferencia con MCO en caso de heteroscedasticidad
- Los β_j se estiman por MCO (insesgada y consistente)
- Las $V(\hat{\beta}_j)$ se estiman de forma robusta a heteroscedasticidad

$$\hat{V}(\hat{\beta}_j) = \frac{\sum_{i=1}^{N} r_{ij}^2 e_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{N} r_{ij}^2\right)^2}$$

Se puede demostrar que $\operatorname{p\,lim}_{N \to \infty}\left(\hat{V}(\hat{\beta}_j)\right) = V(\hat{\beta}_j)$ (Wooldridge, p. 288)

- Con esta $\hat{V}(\hat{\beta}_j)$ los contrastes t y F son válidos en muestras grandes

Lo que hemos aprendido:

UNIVERSIDAD DE **MURCIA**

1. Bajo heteroscedasticidad:
   - MCO es ELI y consistente pero no óptimo. Los contrastes del Tema 4 no son válidos
   - MCG es ELIO y consistente. Los contrastes del Tema 4 son válidos. Es poco útil en la práctica porque casi nunca conocemos la varianza
2. En la practica
   - Detectamos heteroscedasticidad con el “contraste de White”
   - Para estimar usamos el “método de White”:
     - Los parámetros por MCO
     - Sus varianzas por la corrección de White