Derivadas e integrales

Álvarez S., Caballero M.V. y Sánchez MªM

salvarez@um.es, m.victori@um.es, marvega@um.es

OPEN COURSEWARE
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Índice

1. Definiciones

- **Derivada de una función**: Sea la función $f(x)$, si el límite siguiente existe

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

  se dice que la función es derivable en x_0 y $f'(x_0)$ es el valor de la derivada de f en el punto x_0.

- **Recta tangente:** Sea $y = f(x)$ una función derivable en $x_0 \in Dom(f)$, la recta tangente a la función en el punto x_0, es la recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y cuya pendiente es $f'(x_0)$.

- **Punto crítico**: Sea $y = f(x)$ una función derivable en $x_0 \in Dom(f)$. Se dice que x_0 es un punto crítico de f cuando $f'(x_0) = 0$.

- **Máximo relativo**: Una función $y = f(x)$ tiene un máximo relativo o local en x_0 cuando para puntos x próximos a x_0 se verifica que

  $f(x) \leq f(x_0)$.

- **Mínimo relativo**: Una función $y = f(x)$ tiene un mínimo relativo o local en x_0 cuando para puntos x próximos a x_0 se verifica que

  $f(x) \geq f(x_0)$.

- **Extremo relativo**: Es un máximo o un mínimo relativo.

- **Máximo absoluto**: Una función $y = f(x)$ tiene un máximo absoluto (o global) en x_0 cuando para cualquier $x \in Dom(f)$ se verifica que $f(x) \leq f(x_0)$.

- **Mínimo absoluto**: Una función $y = f(x)$ tiene un mínimo absoluto (o global) en x_0 cuando para cualquier $x \in Dom(f)$ se verifica que $f(x) \geq f(x_0)$.

- **Primitiva de una función**: $F(x)$ es una primitiva de una función continua $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$.

- **Integral indefinida**: La integral indefinida de una función continua $f(x)$ es el conjunto de todas sus primitivas. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ se escribe

$$\int f(x)dx = F(x) + cte.$$

- **Integral definida**: Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$ y $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$, la integral definida de $f(x)$ entre a y b es el número real

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ (Regla de Barrow).}$$

2. Herramientas

2.1. Reglas de derivación

1. Derivada de la función constante: $y = f(x) = K \Longrightarrow y' = f'(x) = 0$.

2. Derivada de la función potencia: $y = f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R} \Longrightarrow y' = f'(x) = nx^{n-1}$.

3. Derivada de la función logaritmo: $y = \ln x \Longrightarrow y' = f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

4. Derivada de la función exponencial: $y = e^x \Longrightarrow y' = f'(x) = e^x$.

5. Si $f(x)$ es una función derivable, entonces la función $y = \lambda f(x)$ es derivable y su derivada vale $y' = \lambda f'(x)$.

6. Derivada de la suma: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces $(f+g)(x)$ es derivable y

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Ejemplo 2.1 *Hallar la función derivada de la función $f(x) = x + 1$.*

La función derivada es $f'(x) = 1$, pues $f(x) = g(x)+h(x)$, con $g(x) = x$ y $h(x) = 1$. Y como la derivada de una suma es la suma de las correspondientes derivadas, $f'(x) = g'(x)+h'(x)$, con $g'(x) = 1$ y $h'(x) = 0$.

7. Derivada del producto: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces $(fg)(x)$ es derivable y

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ejemplo 2.2 *Hallar la función derivada de la función*

$f(x) = (x+2)e^x$.

$f^{'}(x) =^{(1)} (x+2)'e^x + (x+2)(e^x)' =^{(2)} e^x + (x+2)e^x = e^x(x+3)$. *La igualdad (1) resulta de utilizar la regla de derivación de un producto, y la igualdad (2) se obtiene simplemente sustituyendo el valor de las derivadas (que se conocen por las reglas de derivación).*

8. Derivada del cociente: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces $(f/g)(x)$ es derivable cuando $g(x) \neq 0$, y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Ejemplo 2.3 *Hallar la función derivada de la función* $f(x) = \dfrac{5x}{e^x}$.

$f^{'}(x) =^{(1)} \dfrac{(5x)' \cdot e^x - 5x \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \dfrac{5 \cdot e^x - 5x \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{5(1-x)}{e^x}$, *donde la igualdad (1) resulta de aplicar la regla de derivación de un cociente.*

9. Regla de la cadena: Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables, entonces

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Como consecuencia de la regla de la cadena, se obtiene que:

a) Derivada de la potencia de una función:
$y = (f(x))^n$, $n \in \mathbb{R} \Longrightarrow y' = n(f(x))^{n-1}f'(x)$.

b) Derivada del logaritmo de una función:
$y = \ln f(x) \Longrightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

c) Derivada de la exponencial de una función:
$y = e^{f(x)} \Longrightarrow y' = f'(x)e^{f(x)}$.

Ejemplo 2.4 *Hallar la función derivada de las siguientes funciones:*

- $f(x) = (x^2 - 10)^7$.
- $g(x) = \ln(x^2 + 4)$.
- $h(x) = e^{x^3}$.
- $f^{'}(x) =^{(1)} 7(x^2-10)^6(x^2-10)' = 7(x^2-10)^6(2x)$, *donde la igualdad (1) resulta de aplicar la regla de derivación de la potencia de una función (la función* $(x^2 - 10)$ *en este caso).*

- $g'(x) =^{(2)} \dfrac{(x^2+4)'}{x^2+4} = \dfrac{2x}{x^2+4}$, *correspondiendo la igualdad (2) a la derivada del logaritmo de una función.*
- $h'(x) =^{(3)} (x^3)'e^{x^3} = 3x^2e^{x^3}$, *la igualdad (3) corresponde a la derivada de la exponencial de una función.*

2.2. Crecimiento y extremos

Condición de crecimiento o decrecimiento
Sea $f(x)$ una función derivable en x_0, se cumple que:

a) Si $f'(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ es creciente en x_0.

b) Si $f'(x_0) < 0$, entonces $f(x)$ es decreciente en x_0.

c) Si $f'(x_0) = 0$ caso dudoso.

Condición de primer orden de extremo relativo
Sea una función $y = f(x)$ derivable en x_0.

Si $f(x)$ tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.
Condición de segundo orden de extremo relativo
Sea x_0 un punto crítico de una función $y = f(x)$ dos veces derivable. Entonces:

- Si $f''(x_0) < 0$, entonces en x_0 la función tiene un máximo relativo.
- Si $f''(x_0) > 0$, entonces en x_0 la función tiene un mínimo relativo.

Otro método
Sea x_0 un punto crítico de una función derivable $y = f(x)$. Entonces:

1. Si $f'(x) > 0$ para puntos x próximos a x_0, $x < x_0$ (por la izquierda) y $f'(x) < 0$ en puntos x próximos a x_0, $x > x_0$ (por la derecha) , entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en x_0.
2. Si $f'(x) < 0$ para puntos x próximos a x_0, $x < x_0$ (por la izquierda) y $f'(x) > 0$ en puntos x próximos a x_0, $x > x_0$ (por la derecha) , entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en x_0.
3. Si $f'(x)$ tiene el mismo signo para puntos x próximos a x_0 ,entonces $f(x)$ no tiene un extremo relativo en x_0.

2.3. Representación gráfica

La representación gráfica de una función real $y = f(x)$ requiere:

1. Determinar el dominio donde la función está definida.
2. Identificar los puntos de corte con los ejes coordenados.
3. Estudiar la existencia de asíntotas (su definición se da en el tema de límites y continuidad de funciones).
4. Estudiar la existencia de puntos de corte con las asíntotas:

   las curvas $y = f(x)$ no cortan a las asíntotas paralelas a OY; pero sí pueden cortar a las asíntotas horizontales y oblicuas.
5. Identificar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
6. Determinar (si existen) los máximos y los mínimos relativos.

2.4. Cálculo de primitivas

INTEGRALES INMEDIATAS

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K \text{ si } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + K$$

$$\int e^x dx = e^x + K$$

Propiedades

1. Dadas dos funciones f y g :

   $$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

   Ejemplo 2.5 *Calcular* $\int (x^3 + e^x)dx$.
   $\int (x^3 + e^x)dx = \int x^3 dx + \int e^x dx = \frac{1}{4}x^4 + e^x + K.$

2. Dada una función f y λ una constante:

   $$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

3. Cambio de variable en una integral indefinida:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$$

siendo $t = g(x)$.

Ejemplo 2.6 *Calcular* $\int \sqrt[5]{7x+2}dx$.
Mediante el cambio de variable $t = 7x + 2$*, se tiene que* $dt = 7dx$*, y la integral se reescribe en términos de* t *como* $\int \frac{1}{7}t^{1/5}dt$*, y* $\int \frac{1}{7}t^{1/5}dt = \frac{1}{7}\int t^{1/5}dt = \frac{1}{7}\frac{5}{6}t^{6/5} + K = \frac{5}{42}(7x+2)^{6/5} + K$.

Ejemplo 2.7 *Deducir que para toda función derivable* $f(x)$*, se cumple que:*

a) $\int f(x)^n f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + K$ *si* $n \neq -1$.

b) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x)) + K$.

c) $\int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + K$.

a) Mediante el cambio de variable $t = f(x)$*, se tiene que* $dt = f'(x)dx$*, y la integral se reescribe como* $\int f(x)^n f'(x)dx = \int t^n dt$*, que es inmediata y vale* $\frac{t^{n+1}}{n+1} + K$.
Al deshacer el cambio, queda $\frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + K$.

b) Igual que antes, con el cambio de variable $t = f(x)$*, se tiene que* $dt = f'(x)dx$*, y la integral se reescribe como* $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt$*, que es inmediata y vale* $\ln t + K = \ln(f(x)) + K$.

c) Con el mismo cambio que en los anteriores apartados, $t = f(x)$*,* $\int e^{f(x)}f'(x)dx = \int e^t dt = e^t + K = e^{f(x)} + K$.

2.5. Cálculo de áreas

- El área bajo una curva $y = f(x)$ y sobre el intervalo $[a, b]$ (para $f(x) \geq 0$ si $x \in [a, b]$) es

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

con $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$

- Si la función no fuese positiva en el intervalo, el área limitada por la curva el eje de abscisas y las recta $x = a$ y $x = b$ es

$$\int_a^b f(x)dx = -F(b) + F(a).$$

- Si $c \in [a, b]$, se cumple

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1 *Hallar las funciones derivadas de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^4$.

b) $f(x) = 5x^3$.

c) $f(x) = \sqrt{5x - 2}$.

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} + \sqrt[3]{2x} - \dfrac{1}{\sqrt[7]{x}}$.

e) $f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - \dfrac{5}{x}$.

f) $f(x) = x \ln x$.

g) $f(x) = (x^4 - 2x^3)e^x$.

h) $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2}{\ln x}$.

i) $f(x) = e^{x^3 - 5x}$.

j) $f(x) = (3x^2 - 2)\, e^{x^3 + 7x}$.

k) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3x + 5}}$.

l) $f(x) = \ln\left(\dfrac{5x + 1}{3x - 1}\right)$.

Solución

a) $f'(x) = 4x^3$.

b) $f'(x) = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$,

ya que la derivada de un número por una función es el número por la derivada de la función, y la derivada de x^3 es $3x^2$.

c) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-2}}$, ya que

$$f'(x) = (\sqrt{5x-2})' = \left[(5x-2)^{1/2}\right]' = \frac{1}{2}(5x-2)^{-1/2}5,$$

donde se ha utilizado la derivada de la potencia de una función, pues $y = \sqrt{5x-2} = (5x-2)^{1/2}$.

d) $f'(x) = \dfrac{2}{5x}\sqrt[5]{x^2} + \dfrac{1}{3x}\sqrt[3]{2x} + \dfrac{1}{7x\sqrt[7]{x}}$,

que se obtiene escribiendo $f(x)$ como $f(x) = x^{2/5} + (2x)^{1/3} - x^{-1/7}$,

con lo que

$$f'(x) = (x^{2/5})' + \left((2x)^{1/3}\right)' - (x^{-1/7})' = \frac{2}{5x}x^{2/5} + \frac{1}{3x}(2x)^{1/3} + \frac{1}{7x}x^{-1/7},$$

donde las derivadas de los distintos sumandos resultan de aplicar la derivada de la función potencia.

e) $f'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 6x - \dfrac{5}{x^2}$, lo que resulta de sumar las derivadas de los distintos sumandos, que a su vez se calculan en la forma indicada en los anteriores apartados.

f) Aplicando la regla de derivación de un producto,

$$f'(x) = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

g) Por la regla de derivación de un producto,

$$f'(x) = (x^4 - 2x^3)'e^x + (x^4 - 2x^3)(e^x)' =$$

$$(4x^3 - 6x)e^x + (x^4 - 2x^3)e^x =$$

$$e^x(x^4 + 4x^3 - 6x).$$

h) Aplicando la regla de derivación de un cociente,

$$f'(x) = \frac{(x^4 + x^2)' \ln x - (x^4 + x^2)(\ln x)'}{(\ln x)^2} =$$

$$\frac{(4x^3+2x)\ln x-(x^4+x^2)(1/x)}{(\ln x)^2}=$$

$$\frac{(4x^3+2x)\ln x-x^3-x}{(\ln x)^2}.$$

i) La función que hay que derivar es de la forma $e^{h(x)}=(g\circ h)(x)$ siendo $g(x)=e^x$ y $h(x)=x^3-5x$, y por la regla de la cadena,

$f'(x)=(\ e^{h(x)})'=(g\circ h)'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)=e^{h(x)}\cdot h'(x).$

Luego, $f'(x)=e^{x^3-5x}\cdot(x^3-5x)'=e^{x^3-5x}\cdot(3x^2-5).$

j) Utilizando la regla de derivación de un producto y expresión la derivada de la función exponencial obtenida en i),

$f'(x)=(3x^2-2)'\,e^{x^3+7x}+(3x^2-2)\,(e^{x^3+7x})'=$

$6xe^{x^3+7x}+(3x^2-2)\,e^{x^3+7x}(3x^2+7)=$

$e^{x^3+7x}(6x+(3x^2-2)\,(3x^2+7)).$

k) $f'(x)=\dfrac{(x^2)'(\sqrt{3x}+5)-(x^2)(\sqrt{3x}+5)'}{(\sqrt{3x}+5)^2}=$

$$\frac{(2x)\sqrt{3x}+5-(x^2)\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{3x}+5)^2}=$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{3}\sqrt{x}+5\right)^2}\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}+5\right).$$

l) $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{5x+1}{3x-1}\right)'}{\left(\dfrac{5x+1}{3x-1}\right)}=\dfrac{-\dfrac{8}{(3x-1)^2}}{\left(\dfrac{5x+1}{3x-1}\right)}=-\dfrac{8}{(3x-1)\,(5x+1)}.$

Alternativamente se puede escribir $f(x)=\ln\left(\dfrac{5x+1}{3x-1}\right)=\ln(5x+1)-\ln(3x-1)$,

con lo que $f'(x)=\dfrac{5}{5x+1}-\dfrac{3}{3x-1}=-\dfrac{8}{(3x-1)\,(5x+1)}.$

Ejercicio 2 *Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:*

a) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x$, en $x=1$ y $x=0$.

b) $g(x) = e^{5x} - 4\ln x^2$, en $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$.

c) $h(x) = \dfrac{\ln(2x^2 - x)}{x}$, en $x = -1$ y $x = 1$.

Solución

a) $f'(x) = 2x^2 - x + 3$, luego $f'(1) = 4$ y $f'(0) = 3$.

b) $g'(x) = 5e^{5x} - \dfrac{8}{x}$, con lo que $g'(\frac{1}{2}) = 5e^{5/2} - 16$ y $g'(1) = 5e^5 - 8$.

c) $h'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln(2x^2 - x) - \dfrac{1}{x}\dfrac{4x-1}{x - 2x^2}$,
luego $h'(-1) = -\ln 3 + 5/3$ y $h'(1) = 3$.

Ejercicio 3 *Para las funciones siguientes, estudiar su crecimiento y sus extremos relativos:*

a) $f(x) = x^2 - x + 5$.

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 1$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$.

Solución

a) Sea $f(x) = x^2 - x + 5$,

- su dominio es $\mathbb{R}$, y es continua y derivable en su dominio.
- La función derivada es $f'(x) = 2x - 1$.
- Para obtener los puntos críticos se resuelve la ecuación

$$f'(x) = 2x - 1 = 0,$$

  cuya única solución es $x = 1/2$. Por tanto, la función solo tiene un punto crítico en $x = 1/2$.
- Para estudiar el crecimiento y el decreciomiento se analiza el signo de $f'(x)$. Es fácil obtener que $f'(x) > 0$ para $x \in (1/2, +\infty)$ y $f'(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 1/2)$. Por tanto, $f(x)$ es creciente en $(1/2, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1/2)$.

- Como se ha obtenido que $f(x)$ es creciente en $(1/2, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 1/2)$, se puede utilizar la correspondiente propiedad que permite afirmar que en $x = 1/2$, la función tiene un mínimo relativo.

b) Sea $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 4x + 1$,

- su dominio es $\mathbb{R}$, y es continua y derivable en su dominio.
- Para obtener los puntos críticos se resuelve la ecuación

$$f'(x) = x^2 - 3x - 4 = 0,$$

  cuyas soluciones son $x = -1$ y $x = 4$.
- Escribiendo ahora $f'(x)$ como $f'(x) = (x+1)(x-4)$, se observa que $f'(x) > 0$ (y por tanto f es creciente) para $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ y $f'(x) < 0$ (f decreciente) para $x \in (-1, 4)$.
- El comportamiento de crecimiento y decrecimiento de la función indica que en $x = -1$, la función tiene un máximo relativo y tiene un mínimo relativo en $x = 4$.

c) Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3}$.

- Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$, donde es continua y derivable.
- $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 3}{x^4}$.
- La función derivada se anula en $x = -\sqrt{3}$ y $x = \sqrt{3}$. Por tanto, éstos son los puntos críticos de la función.
- Escribiendo ahora $f'(x)$ como $f'(x) = -\dfrac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{x^4}$, se observa que $f'(x) < 0$ (y por tanto f es decreciente) para $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y $f'(x) > 0$ (f creciente) para $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$.
- Esto permite afirmar que la función tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{3}$ y un máximo relativo en $x = \sqrt{3}$.

Ejercicio 4 *Calcular los extremos relativos de la función* $f(x) = x^2(x-3)$.

Solución

- La función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
- $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = 2$. Por tanto, los posibles extremos relativos son $x = 0$ y $x = 2$.
- La confirmación o no de extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$, se puede hacer observando el signo de la derivada.

  $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y $f'(x) < 0$ si $x \in (0, 2)$.

  Luego, f es creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(0, 2)$.

  Esto indica que en $x = 0$, hay un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo.

  O bien se calcula la derivada segunda, $f''(x) = 6x - 6$, obteniéndose que $f''(0) < 0$ y $f''(2) > 0$.
- El comportamiento en cuanto al crecimiento indica también que en $x = 2$ tiene un mínimo absoluto y no tiene máximos absolutos.

Ejercicio 5 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$, *determinar:*

- Dominio.
- Máximos y mínimos.
- Intervalos de crecimiento.
- Asíntotas.

Solución

- La función es una fracción, y se puede calcular la imagen de cualquier número real puesto que ningún número real anula el denominador. Por tanto, $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{6x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = .$$

  Entonces:

Si $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) < 0$, por tanto, $f(x)$ decrece.
Si $x \in (0, +\infty, 0)$, $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ crece.
Por tanto, la función tiene en $x = 0$ un mínimo relativo de valor $f(0) = 0$.

- No tiene asíntotas verticales.
- Asíntotas horizontales
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$$

La recta $y = 3$ es una asíntota horizontal de la función.

Ejercicio 6 *Hacer la representación gráfica de la función* $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Solución

- $Dom(f) = \mathbb{R}$ puesto que la función es un polinomio.
- No tiene asíntotas verticales.
- No tiene asíntotas horizontales, pues:
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty.$$
- Al no tener asíntotas horizontales, puede tener asíntotas oblicuas.
- Asíntotas oblicuas:
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \infty.$$
Por tanto, no tiene asíntotas oblicuas.
- Puntos críticos, crecimiento y extremos
$$f'(x) = 2x - 2 \Leftrightarrow x = 1.$$
Si $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$, por tanto $f(x)$ crece.
Si $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, entonces $f(x)$ crece.
Luego, en $x = 1$ la función tiene un mínimo relativo de valor $f(1) = 0$.
La representación gráfica se da en la figura 1.

Ejercicio 7 *Hacer la representación gráfica de la función* $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

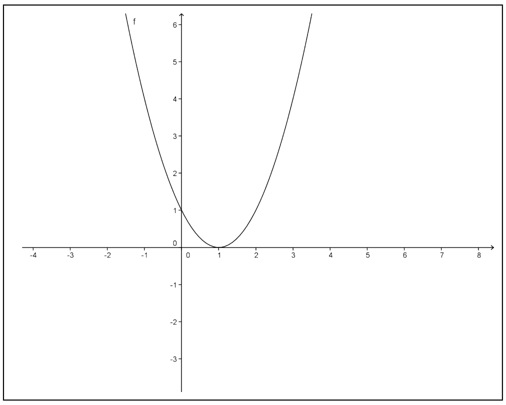

Figura 1: Representación gráfica de la función del ejercicio 6

Solución

- $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, -1\}$, puesto que $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -1$.
- Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

- La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función.
- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

- La función no tiene asíntotas horizontales, puede tener asíntotas oblicuas.
- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1 \qquad n = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = 0.$$

- La recta $y = x$ es asíntota oblicua de la función.

- Puntos críticos, crecimiento y extremos

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}.$$

  - Si $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, $f'(x) > 0$, entonces $f(x)$ crece.
  - Si $x \in (-\sqrt{3}, -1)$, $f'(x) < 0$, entonces $f(x)$ decrece.
  - Si $x \in (-1, 0)$, $f'(x) < 0$, por tanto $f(x)$ decrece.
  - Si $x \in (0, 1)$, $f'(x) < 0$, entonces $f(x)$ decrece.
  - Si $x \in (1, \sqrt{3})$, $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ decrece.
  - Si $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$, $f'(x) > 0$, con lo que $f(x)$ crece.

  Por tanto, en $x = -\sqrt{3}$ la función tiene un máximo relativo de valor $f(-\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}$ y en $x = \sqrt{3}$ tiene un mínimo relativo de valor $f(\sqrt{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

  La representación gráfica se presenta en la figura 2.

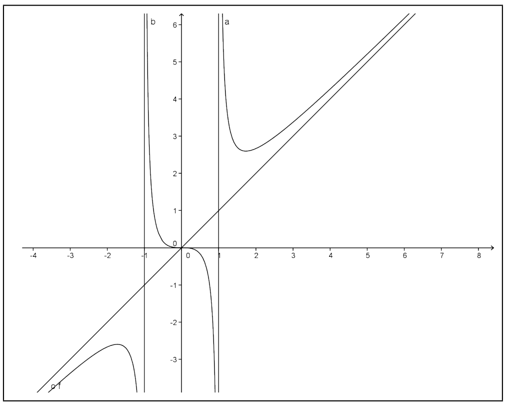

Figura 2: Representación gráfica de la función del ejercicio 7

Ejercicio 8 *Dada la parábola $y = x^2 - 6x + 10$, hallar el punto en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.*

Solución

- La pendiente de la recta tangente a una función en un punto $(x_0, f(x_0))$ es el valor de la derivada de la función en el punto x_0, es decir $f'(x_0)$.

- Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente. Por tanto, una recta paralela al eje de abscisas tiene que tener pendiente igual a 0.

Como $y' = 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, el punto buscado es el $(3, f(3)) = (3, 1)$.

Ejercicio 9 *Se divide un alambre de longitud 42 cm en dos partes, de modo que cada una de ellas sea la base de dos rectángulos cuyas alturas sean el triple y el cuádruple de la base considerada respectivamente. ¿Cómo habrá de hacerse la partición para que la suma del área de los rectángulos sea mínima?*

Solución

- La base de un rectángulo, se denota como x y su altura $3x$.
- La base del otro rectángulo es y y su altura $4y$.
- La suma $x + y = 42$.
- La suma de las áreas de los rectángulos es $A = 3x^2 + 4y^2$. Se sustituye $y = 42 - x$ y se obtiene la función a minimizar:
$$A(x) = 3x^2 + 4(42 - x)^2.$$
- $A'(x) = 14x - 336$. Por tanto, la función $A(x)$ tendrá un punto crítico cuando $x = \dfrac{336}{14} = 24$.
- Como $A''(x) = 14 > 0$, se trata de un mínimo relativo. Además, si $x < 24$, $A'(x) < 0$, la función $A(x)$ decrece y si $x > 24$, como $A'(x) > 0$, $A(x)$ crece. Luego la función A alcanza su menor valor cuando $x = 24$.
- La suma de las áreas de los rectángulos será mínima cuando $x = 24$ e $y = 18$.

Ejercicio 10 *Hallar las dimensiones que ha de tener un campo rectangular de superficie 2500* m^2 *para poder cercarlo con una valla de longitud mínima.*

Solución

- La base de un rectángulo, se denota por x y su altura por y.
- El área del rectángulo es $2500 = xy$.
- La longitud de la valla es el perímetro del campo, por tanto $P = 2x + 2y$. Se sustituye $y = \dfrac{2500}{x}$ y se obtiene la función de x a minimizar:
$$P(x) = 2x + 2\frac{2500}{x}.$$

- Puntos críticos:
$$P'(x) = 2 - \frac{5000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 50, x = -50.$$
$x = -50$ no tiene sentido, por tanto se considera solo el punto crítico $x = 50$.

- Como $P''(x) = \dfrac{10\,000}{x^3}$, se tiene que $P''(50) > 0$ y en $x = 50$ hay un mínimo relativo. Además, si $x < 50$, $P'(x) < 0$, la función $P(x)$ decrece y si $x > 50$, como $P'(x) > 0$, $P(x)$ crece. Luego la función P tiene un mínimo absoluto en $x = 50$. Por tanto, para $x = 50$ e $y = 50$, la longitud de la valla es mínima.

Ejercicio 11 *Realizar las siguientes integrales indefinidas:*

a) $\int (x^4 - 4x^2 + 4x - 2)dx.$

b) $\int (\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})dx.$

c) $\int (\frac{1}{2x} + \sqrt{2x})dx.$

d) $\int \sqrt{3x - 1}dx.$

e) $\int e^{4x}dx.$

f) $\int \sqrt[6]{2x + 1}dx.$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}dx.$

h) $\int x^2(2x^3 + 14)^4dx.$

i) $\int \frac{dx}{(5x - 1)^3}.$

j) $\int \frac{x + 4}{(x^2 + 8x)^{1/4}}dx.$

k) $\int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2x + 1)dx.$

l) $\int \frac{(\ln x)^4}{3x}dx.$

m) $\int e^{x^2-2}xdx.$

n) $\int \frac{3x}{x^2+2}dx.$

ñ) $\int \frac{e^{5/x}}{2x^2}dx.$

o) $\int \frac{x^3-2x+1}{x^4-4x^2+4x-2}dx.$

p) $\int \frac{1}{x\left[3+\ln x\right]^3}dx.$

q) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}dx.$

r) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}dx.$

s) $\int \frac{1}{x(3+\ln x)}dx.$

Solución

a) $\int(x^4-4x^2+4x-2)dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + K,$
pues $\int(x^4-4x^2+4x-2)dx = \int x^4dx - \int 4x^2dx + \int 4xdx - \int 2dx =$
$\int x^4dx - 4\int x^2dx + 4\int xdx - \int 2dx =$
$\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + K.$

b) $\int(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})dx = \int \sqrt[3]{x}dx + \int \sqrt{x}dx = \int x^{1/3}dx + \int x^{1/2}dx =$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + K.$

c) $\int(\frac{1}{2x}+\sqrt{2x})dx = \int \frac{1}{2x}dx + \int \sqrt{2x}dx.$
$\int \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln x + K.$
$\int \sqrt{2x}dx = \int (2x)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\int 2(2x)^{1/2}dx = \frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}} + K$, ya que $\int 2(2x)^{1/2}dx =$
$\int f'(x)(f(x))^n dx$ con $f(x) = 2x$ y $n = 1/2$.
Una forma alternativa de resolver esta última integral es mediante cambio de variable. Haciendo el cambio de variable $t = 2x$, se tiene que $dt = 2dx$, y la integral se reescribe en términos de t como
$\frac{1}{2}\int t^{1/2}dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + K = \frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}} + K.$

Luego, $\int (\dfrac{1}{2x} + \sqrt{2x})dx = \frac{1}{2}\ln x + \dfrac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}} + K.$

d) $\int \sqrt{3x-1}dx = \dfrac{1}{3}\int 3\sqrt{3x-1}dx = \dfrac{2}{9}\,(3x-1)^{\frac{3}{2}} + K,$

ya que $\int 3\sqrt{3x-1}dx = \int f'(x)(f(x))^n dx$ con $f(x) = 3x-1$ y $n = 1/2$.

Alternativamente, mediante cambio de variable $t = 3x-1$, se tiene que $dt = 3dx$, y la integral se reescribe en términos de t como

$\dfrac{1}{3}\int t^{1/2}dt = \dfrac{2}{9}t^{\frac{3}{2}} + K = \dfrac{2}{9}\,(3x-1)^{\frac{3}{2}} + K.$

e) $\int e^{4x}dx = \dfrac{1}{4}\int 4e^{4x}dx = \dfrac{1}{4}e^{4x} + K,$

pues $\int 4e^{4x}dx = \int e^{f(x)}f'(x)dx = e^{f(x)} + K.$

También se puede hacer el cambio de variable $t = 4x$, con lo que $dt = 4dx$, y $\int 4e^{4x}dx = \int e^t dt = e^t + K = e^{4x} + K$, luego $\dfrac{1}{4}\int 4e^{4x}dx = \dfrac{1}{4}e^{4x} + K.$

f) $\int \sqrt[6]{2x+1}dx = \dfrac{1}{2}\int 2\sqrt[6]{2x+1}dx = \dfrac{1}{2}\int 2(2x+1)^{1/6}dx =$

$\dfrac{1}{2}\dfrac{6}{7}(2x+1)^{7/6} + K = \dfrac{3}{7}(2x+1)^{7/6} + K.$

Alternativamente, mediante el cambio de variable $t = 2x+1$, se tiene que $dt = 2dx$, y la integral se reescribe en términos de t como $\int \dfrac{1}{2}t^{1/6}dt$,

y $\int \dfrac{1}{2}t^{1/6}dt = \dfrac{1}{2}\int t^{1/6}dt = \dfrac{1}{2}\dfrac{6}{7}t^{7/6} + K = \dfrac{3}{7}(2x+1)^{7/6} + K.$

g) $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}dx = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2}{\sqrt{2x-3}}dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2}(2x-3)^{1/2} + K =$

$\dfrac{1}{4}(2x-3)^{1/2} + K$, ya que $\int \dfrac{2}{\sqrt{2x-3}}dx$ es una integral inmediata del tipo

$\int f'(x)(f(x))^n dx$ con $f(x) = 2x-3$ y $n = -\dfrac{1}{2}$.

Alternativamente, se puede hacer uso del cambio de variable $t = 2x-3$.

h) $\int x^2(2x^3+14)^4dx = \dfrac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+14)^4dx = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{5}(2x^3+14)^5 + K =$

$\dfrac{1}{30}(2x^3+14)^5 + K,$

ya que $\int 6x^2(2x^3+14)^4dx = \int f'(x)(f(x))^n dx$ con $f(x) = 2x^3+14$ y $n = 4$.

Una forma alternativa de resolver la integral es mediante cambio de variable. Haciendo el cambio de variable $t = 2x^3+14$, se tiene que $dt = 6x^2dx$, y la integral se reescribe en términos de t como $\int \frac{1}{6}t^4dt$, y $\int \frac{1}{6}t^4dt = \frac{1}{6}\int t^4dt = \frac{1}{6}\frac{1}{5}t^5 + K = \frac{1}{30}(2x^3+14)^5 + K$.

i) $\int \frac{dx}{(5x-1)^3} = \int (5x-1)^{-3}dx = \frac{1}{5}\int 5(5x-1)^{-3}dx =$
$\frac{1}{5}\frac{1}{-2}(5x-1)^{-2} + K = \frac{-1}{10}(5x-1)^{-2} + K$.
El mismo resultado se obtendría a través del cambio de variable $t = 5x-1$.

j) $\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^{1/4}}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x+8}{(x^2+8x)^{1/4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+8}{(x^2+8x)^{1/4}}dx =$
$\frac{1}{2}\int (2x+8)(x^2+8x)^{-1/4}dx =$
$\frac{1}{2}\frac{4}{3}(x^2+8x)^{3/4} + K = \frac{2}{3}(x^2+8x)^{3/4} + K$.
Mediante el cambio de variable $t = x^2+8x$, $dt = 2x+8$, y
$\int \frac{x+4}{(x^2+8x)^{1/4}}dx = \frac{1}{2}\int t^{-1/4}dt = \frac{1}{2}\frac{4}{3}t^{3/4} + K = \frac{2}{3}(x^2+8x)^{3/4} + K$.

k) $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2x+1)dx = \int (-x+2\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+1)dx =$
$\int (-x+2x^{1/2}-2x^{3/2}+1)dx =$
$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{4}{5}x^{5/2} + x + K$.

l) $\int \frac{(\ln x)^4}{3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx = \frac{1}{3}\frac{1}{5}(\ln x)^5 + K = \frac{1}{15}(\ln x)^5 + K$, ya que $\int \frac{(\ln x)^4}{x}dx = \int f'(x)(f(x))^n dx$ con $f(x) = \ln x$ y $n = 4$.
Alternativamente se puede hacer el cambio $t = \ln x$, con lo que $dt = \frac{1}{x}dx$, y
$\int \frac{(\ln x)^4}{3x}dx = \frac{1}{3}\int t^4dt = \frac{1}{3}\frac{1}{5}t^5 + K = \frac{1}{15}t^5 + K = \frac{1}{15}(\ln x)^5 + K$.

m) $\int e^{x^2-2}xdx = \frac{1}{2}\int e^{x^2-2}2xdx = \frac{1}{2}e^{x^2-2} + K$, pues $\int e^{x^2-2}2xdx$ es inmediata, de la forma $\int e^{f(x)}f'(x)dx$, que es igual a $e^{f(x)} + K$.

También se puede hacer el cambio de variable $t = x^2 - 2$, con lo que $dt = 2xdx$, y $\int e^{x^2-2}xdx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + K = \frac{1}{2}e^{x^2-2} + K$.

n) $\int \frac{3x}{x^2+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + K$, ya que $\int \frac{2x}{x^2+2}dx$ es una integral inmediata de la forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, que es igual a $\ln(f(x)) + K$, con $f(x) = x^2 + 2$.

También puede utilizarse el cambio de variable $t = x^2 + 2$, con lo que $dt = 2xdx$, y

$\int \frac{3x}{x^2+2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{1}{t}dt = \frac{3}{2}\ln(t) + K = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + K$.

ñ) $\int \frac{e^{5/x}}{2x^2}dx = -\frac{1}{10}\int \frac{-5e^{5/x}}{x^2}dx = -\frac{1}{10}e^{5/x} + K$, pues $\int \frac{-5e^{5/x}}{x^2}dx$ es una integral inmediata de la forma $\int f'(x)e^{f(x)}dx$, que es igual a $e^{f(x)} + K$, con $f(x) = 5/x$.

Otra forma de resolverla es hacer uso del cambio de variable $t = 5/x$.

o) $\int \frac{x^3-2x+1}{x^4-4x^2+4x-2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3-8x+4}{x^4-4x^2+4x-2}dx =$

$\frac{1}{4}\ln(x^4 - 4x^2 + 4x - 2) + K$, de forma similar a la integral h).

El cambio de variable $t = x^4 - 4x^2 + 4x - 2$, conduce al mismo resultado.

p) $\int \frac{1}{x\,[3+\ln x]^3}dx = -\frac{1}{2}\,[3+\ln x]^{-2} + K$,

ya que es una integral inmediata del tipo $\int f'(x)(f(x))^n dx$ con $f(x) = 3 + \ln x$ y $n = -3$.

También se puede hacer el cambio de variable $t = 3 + \ln x$.

q) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}dx = 2(e^x+2)^{1/2} + K$,

pues es una integral inmediata del tipo

$\int f'(x)(f(x))^n dx$ con $f(x) = e^x + 2$ y $n = -\frac{1}{2}$.

De forma alternativa, resulta adecuado hacer el cambio $t = e^x + 2$.

r) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}dx = 2\int \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}dx = 2\ln(\sqrt{x}+2)+K$,
ya que $\int \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}dx$
es una integral inmediata de la forma
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, que es igual a $\ln(f(x))+K$, con $f(x)=\sqrt{x}+2$.
También se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}+2$.

s) $\int \frac{1}{x(3+\ln x)}dx = \ln(3+\ln x)+K$, porque es una integral inmediata de la forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$, con $f(x)=3+\ln x$.
El mismo resultado se obtiene mediante el cambio de variable
$t=3+\ln x$.

Ejercicio 12 *Calcular las siguientes integrales definidas:*

a) $\int_2^4 (2x^3-x^2-x)dx$.

b) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx$.

c) $\int_1^3 \frac{\ln^4 x}{x}dx$.

d) $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{e^{x^2+x}}dx$.

Solución

a) $\int_2^4 (2x^3-x^2-x)dx = \left.\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right|_2^4 = \frac{286}{3}$.

b) $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx = \ln(x^2+2)\big|_0^1 = \ln 3 - \ln 2$.

c) $\int_1^3 \frac{\ln^4 x}{x}dx = \left.\frac{1}{5}\ln^5 x\right|_1^3 = \frac{1}{5}\ln^5 3$.

d) $\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{e^{x^2+x}}dx = \left.-e^{-x^2-x}\right|_{-1}^1 = 1-e^{-2}$.

Ejercicio 13 *Calcular el área comprendida entre la recta $y = 2x + 4$, el eje OX y el eje OY.*

Solución

En primer lugar se dibuja la recta y la correspondiente representación gráfica del área, que se da en la figura 3. Los puntos de corte de la recta con

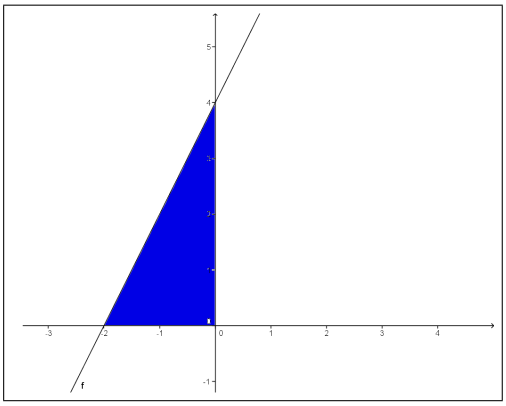

Figura 3: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 13

los ejes son: $(-2, 0)$ y $(0, 4)$, con lo que el área que se pide es:

$$\int_{-2}^{0} (2x + 4)dx = x^2 + 4x\big|_{-2}^{0} = 4 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 14 *Calcular el área que encierra la recta $y = 4$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.*

Solución

La representación gráfica del área buscada aparece en la figura 4, y vale:

$$\int_{-2}^{3} 4dx = 4x\big|_{-2}^{3} = 20 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 15 *Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 3$ e $y = 5 - x^2$.*

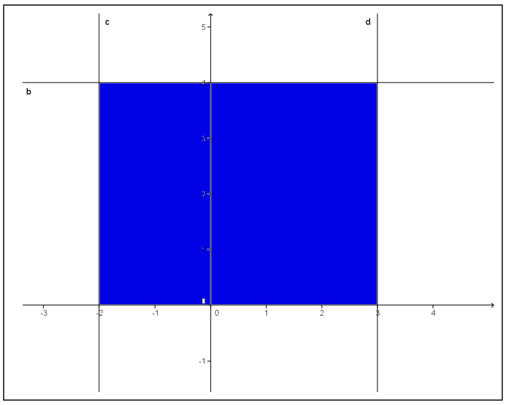

Figura 4: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 14

Solución

Para calcular esta área hay que dibujar ambas parábolas y calcular sus puntos de intersección. Estos puntos se obtienen a continuación:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3 \\ y = 5 - x^2 \end{array}\right\} 8 = 2x^2 \Leftrightarrow x = 2, x = -2.$$

La gráfica de estas parábolas aparece en la figura 5, con lo que el área es:

$$\int_{-2}^{2}(5 - x^2)dx - \int_{-2}^{2}(x^2 - 3)dx = \left[5x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3} \text{ u.a.}$$

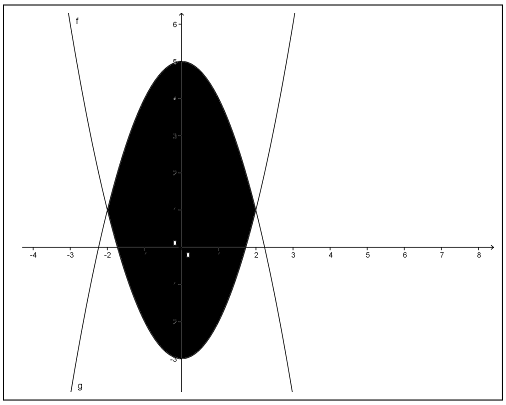

Figura 5: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 15

Ejercicio 16 *Hallar el área de la región del plano limitada por las gráficas* $f(x) = x^3 - x + 1$ *y* $g(x) = x^2 + 1$.

Solución

En primer lugar hay que dibujar ambas funciones, lo que aparece en la figura 6. Una vez representadas se calculan los puntos donde se cortan.

$$\left.\begin{array}{r} y = x^2 + 1 \\ y = x^3 - x + 1 \end{array}\right\} x(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Se aplica la aditividad respecto del intervalo:

$$A_1 = \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x + 1)dx - \int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^2 + 1)dx = 0{,}772\,54 - 0{,}696\,72 = 0{,}075\,82$$

:

$$A_2 = \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x^2 + 1)dx - \int_{1}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (x^3 - x + 1)dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x + 1)dx = 1.\,007\,5$$

de modo que el área buscada es $A = A_1 + A_2$.

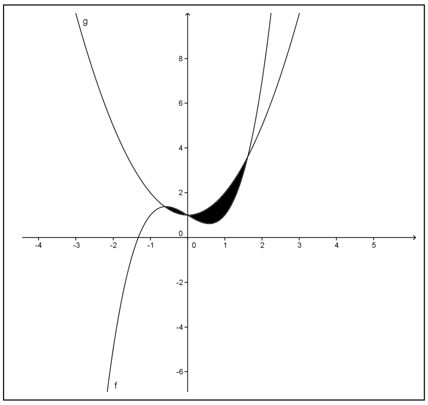

Figura 6: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 16

Ejercicio 17 *Calcular el área limitada por la curva* $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 1$ *el eje* OX *y las rectas* $x = 0$ *y* $x = 3$.

Solución

La gráfica de la parábola se encuentra en la figura 7, y los puntos de corte de la curva dada con el eje OX son:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 1.$$

Entonces el área pedida es:

$$A = \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1)dx - \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1)dx + \int_2^3 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1)dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3}{4}x^2 + x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3}{4}x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3}{4}x^2 + x\right]_2^3 = \frac{11}{12}\text{u.a.}$$

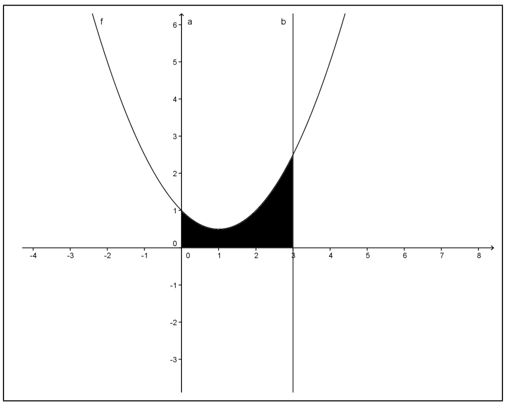

Figura 7: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 17

Ejercicio 18 *Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.*

Solución

Los puntos de corte de la parábola y la recta son:

$$\left.\begin{array}{r} 3x^2 + 2x - 16 = y \\ x + 2 = y \end{array}\right\} \Leftrightarrow x = -2, x = 1.$$

Y la representación gráfica del área se encuentra en la figura 8. Entonces el área pedida es:

$$A = -\int_{-2}^1 (4 - x^2)dx - \int_{-2}^1 (x + 2)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1 + \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}\text{ u.a.}$$

Ejercicio 19 *Calcular el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 + 2x - 16$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 4$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.*

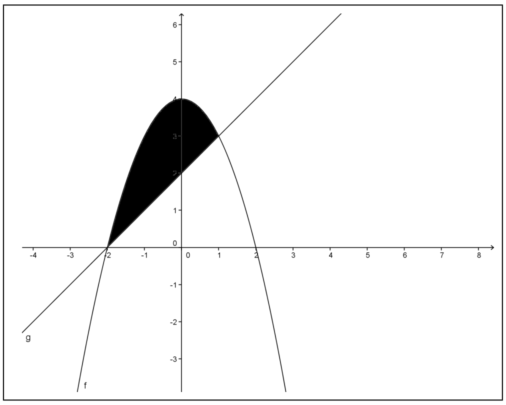

Figura 8: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 18

Solución

Los puntos de corte de la curva dada con el eje OX son:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -\frac{8}{3}.$$

Y la representación gráfica se encuentra en la figura 9. Así, el área pedida es:

$$A = -\int_{-2}^{2} (3x^2 + 2x - 16)dx + \int_{2}^{4} (3x^2 + 2x - 16)dx =$$

$$= -\left[x^3 + x^2 - 16x\right]_{-2}^{2} + \left[x^{+}x^2 - 16x\right]_{2}^{4} = 84 \text{ u.a.}$$

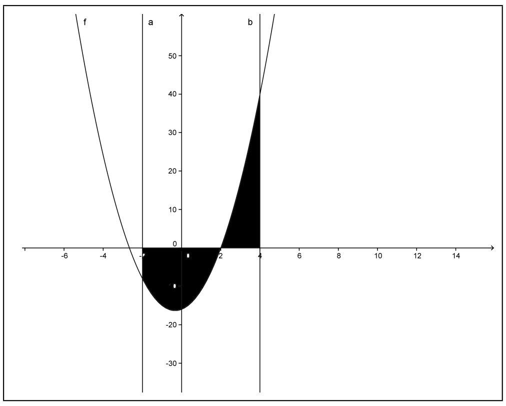

Figura 9: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 19

Ejercicio 20 *Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación* $y = -x^2 + 8x$ *y el eje* OX*.*

Solución

Los puntos de corte de la curva dada con el eje OX:

$$-x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 8.$$

Y la representación gráfica de la parábola se da en la figura 10, con lo que el área pedida es:

$$A = -\int_0^8 (-x^2 + 8x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2\right]_0^8 = \frac{256}{3} \text{ u.a.}$$

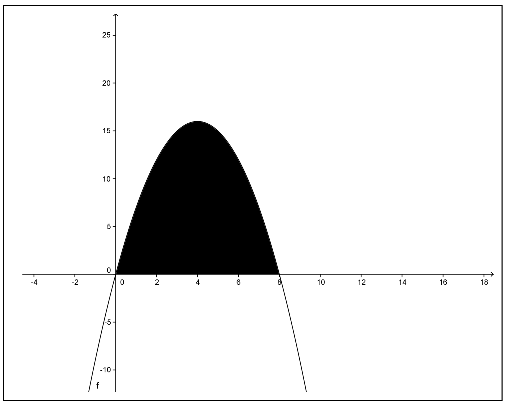

Figura 10: Representación gráfica del área correspondiente al ejercicio 20

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 *Hallar las funciones derivadas de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^5$.

b) $f(x) = 3x^4$.

c) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 2x^2 - \dfrac{3}{x}$.

d) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$.

e) $f(x) = x^2 \ln x$.

f) $f(x) = (x^3 - 3x^4)e^x$.

g) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x^2}{\ln x}$.

h) $f(x) = e^{x^3 - 7x + 1}$.

i) $f(x) = (5x^2 - 2x)\, e^{x^4 - 3x}$.

j) $f(x) = \dfrac{-x^3}{\sqrt{3x+1} - 1}$.

k) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x-1}{5x+1}\right)$.

Solución

a) $f'(x) = 5x^4$.

b) $f'(x) = 12x^3$.

c) $f'(x) = 8x^3 + 3x^2 - 4x + \dfrac{3}{x^2}$.

d) $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$.

e) $f'(x) = x + 2x\ln x$.

f) $f'(x) = e^x(3x^2 - 11x^3 - 3x^4)$.

g) $f'(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{\ln x} - \dfrac{x^2 + 2x}{(\ln x)^2}$.

h) $f'(x) = e^{x^3 - 7x + 1}\,(3x^2 - 7)$.

i) $f'(x) = e^{x^4 - 3x}\,(10x - 2) + e^{x^4 - 3x}\,(5x^2 - 2x)\,(4x^3 - 3)$.

j) $f'(x) = \dfrac{3}{2}\dfrac{x^3}{\left(\sqrt{3x+1} - 1\right)^2 \sqrt{3x+1}} - 3\dfrac{x^2}{\sqrt{3x+1} - 1}$.

k) $f'(x) = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{5}{5x+1}$.

Ejercicio 2 *Para las funciones siguientes, estudiar su crecimiento y sus extremos relativos:*

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 6x + 7.$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x}.$

Solución

a) $f(x)$ es creciente en $(3/4, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 3/4)$.En $x = 3/4$, la función tiene un mínimo relativo.

b) $f(x)$ es creciente si $x \in (-\infty, -6) \cup (1, +\infty)$ y decreciente si $x \in (-6, 1)$.

c) f es decreciente para $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ y creciente para $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$.Tiene un mínimo relativo en $x = -\sqrt{2}$ y un máximo relativo en $x = \sqrt{2}$.

Ejercicio 3 *Realizar las siguientes integrales indefinidas:*

a) $\int (x^5 + 4x^3 - x + 5)dx.$

b) $\int (\sqrt[5]{x} + 2\sqrt{x})dx.$

c) $\int (\dfrac{1}{3x} + \sqrt{5x})dx.$

d) $\int \sqrt{7x + 4}dx.$

e) $\int e^{6x}dx.$

f) $\int \sqrt[4]{4x + 2}dx.$

g) $\int \dfrac{1}{\sqrt{5x - 2}}dx.$

h) $\int x^3(3x^4 + 1)^5 dx.$

i) $\int \sqrt[6]{4x - 2}dx.$

j) $\int \dfrac{dx}{(3x + 3)^4}.$

k) $\int \dfrac{x + 3}{(x^2 + 6x)^{1/5}}dx.$

l) $\int (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - x)dx.$

m) $\int \frac{(\ln x)^5}{4x} dx.$

n) $\int e^{x^2+5} x dx.$

ñ) $\int \frac{4x}{x^2-7} dx.$

o) $\int \frac{e^{2/x}}{3x^2} dx.$

p) $\int \frac{2x^3-4x+2}{x^4-4x^2+4x-2} dx.$

q) $\int \frac{1}{2x\,[2+\ln x]^4} dx.$

Solución

a) $\frac{1}{6}x^6 + x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + K.$

b) $\frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + K.$

c) $\frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\sqrt{5}x^{\frac{3}{2}} + K.$

d) $\frac{2}{21}(7x+4)^{\frac{3}{2}} + K.$

e) $\frac{1}{6}e^{6x} + K.$

f) $\frac{1}{5}(4x+2)^{\frac{5}{4}} + K.$

g) $\frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + K.$

h) $\frac{1}{72}(3x^4+1)^6 + K$

i) $\frac{6}{28}(4x-2)^{7/6} + K.$

j) $-\frac{1}{9(3x+3)^3} + K.$

k) $\frac{5}{8}(x^2+6x)^{4/5} + K.$

l) $-\frac{1}{15}x^{\frac{3}{2}}(6x - 15\sqrt{x} + 10) + K.$

m) $\frac{1}{24}\ln^6 x + K.$

n) $\frac{1}{2}e^{x^2+5}+K$.

ñ) $2\ln(x^2-7)+K$.

o) $-\frac{1}{6}e^{2/x}+K$.

p) $\frac{1}{2}\ln(x^4-4x^2+4x-2)+K$.

q) $-\dfrac{1}{6(\ln x+2)^3}+K$.

Ejercicio 4 *Calcular las siguientes integrales definidas:*

a) $\int_1^3 (2x^5-3x^2-3)dx$.

b) $\int_1^2 \dfrac{4}{3x}dx$.

c) $\int_1^8 (\sqrt[3]{x}+2x)dx$.

d) $\int_0^2 \dfrac{4x}{x^2-1}dx$.

e) $\int_1^2 \dfrac{\ln^5 x}{x}dx$.

Solución

a) $\dfrac{632}{3}$.

b) $\frac{4}{3}\ln 2$.

c) $\dfrac{297}{4}$.

d) $2\ln 3-4\ln 2$.

e) $\frac{1}{6}\ln^6 2$.

Ejercicio 5 *Calcular el área comprendida entre la curva $y=x^2-x-2$, el eje OX y las rectas $x=-2$ y $x=2$.*

Solución

$$\frac{12\,667}{1000}.$$

Ejercicio 6 *Calcular el área comprendida entre las curvas* $y = 2x^2 - 2x - 4$, *el eje* OX *e* $y = -x^2 - 4x + 12$.

Solución

$$\frac{1372}{27}.$$