Ecuaciones e inecuaciones. Sistemas de ecuaciones e inecuaciones

Álvarez S., Caballero M.V. y Sánchez M.ªM.

salvarez@um.es, m.victori@um.es, marvega@um.es

Índice

1. Definiciones

- **Polinomio de grado n:** La expresión de un polinomio de grado n de una variable es

  $$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

  con $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

  Ejemplo 1.1 $-x^4 + 2x^3 - 4$ *es un polinomio de grado 4.*

- **Ecuación:** Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que aparecen valores conocidos o datos y desconocidos o incógnitas relacionados mediante operaciones matemáticas.

  Ejemplo 1.2 *La expresión* $2x = 10$ *es una ecuación.*

- **Solución de una ecuación:** Conjunto de valores numéricos de las incógnitas para el que se verifica la igualdad.

  Una ecuación puede no tener solución, tener solución única o más de una solución.

  Ejemplo 1.3 $x = 5$ *es la única solución de la ecuación* $2x = 10$.

- **Raíz de un polinomio:** es cada una de las soluciones de la ecuación, llamada ecuación polinómica, $P_n(x) = 0$.

- **Factorización de un polinomio:** Consiste en expresar un polinomio como producto de polinomios de menor grado.

  Ejemplo 1.4 *El polinomio* $p(x) = -2x^2 + 8x - 6$ *de grado 2 se factoriza como producto de polinomios de grado 1 de la forma siguiente:*

  $$-2x^2 + 8x - 6 = 2(x-1)(3-x)$$

- **Sistema de m ecuaciones con n incógnitas:** Se trata de un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas.

  Ejemplo 1.5 *Este es un sistema de* 2 *ecuaciones con* 3 *incógnitas:*

  $$\left.\begin{array}{r} 3x + 5y^2 - 3z^2 = 8 \\ \ln x + 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$

- **Solución de un sistema de ecuaciones:** Conjunto de valores numéricos de las incógnitas para los que se verifican las igualdades que definen el sistema de ecuaciones.

- **Inecuación:** Es una desigualdad (del tipo $\leq, \geq, <, >$) entre dos expresiones algebraicas donde aparecen valores conocidos y desconocidos o incógnitas que se relacionan mediante operaciones matemáticas.

  Ejemplo 1.6 $2x - 2y \leq 5$ *es una inecuación con dos incógnitas.*

- **Sistemas de m inecuaciones con n incógnitas:** Se trata de m inecuaciones con n incógnitas.

- **Solución de una inecuación o de un sistema de inecuaciones:** Conjunto de valores numéricos de las incógnitas para los que se verifican las desigualdades.

  Puede ocurrir que una inecuación no tenga solución.

  Ejemplo 1.7 *La inecuación*

  $$x^2 + 1 < 0$$

  no tiene solución.

- **Diferencia entre ecuación e identidad:** Es una igualdad entre dos expresiones algebraicas se verifica para cualquier valor numérico de las incógnitas se llama identidad, en caso contrario se tiene una ecuación.

  Ejemplo 1.8 *La expresión $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ es una identidad puesto que si sustituimos x por cualquier número real se verifica siempre.*

- **Ecuaciones y sistemas de ecuaciones equivalentes:** Dos ecuaciones se dicen equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. Análogamente dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

- **Inecuaciones o sistemas de inecuaciones equivalentes:** Dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones. Igualmente dos sistemas de inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto de soluciones.

2. Herramientas

2.1. Factorización de polinomios: Regla de Ruffini

La regla de Ruffini es un procedimiento útil para obtener el cociente y el resto de dividir un polinomio de grado n,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

entre $(x - \alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Para ello se construye una tabla con tres filas y $n + 2$ columnas donde

- En la primer fila se colocan los coeficientes del polinomio a_n, a_{n-1}, $\cdots$, a_1 y a_0 en este orden, dejando un hueco en la primera columna.

- En la segunda fila, primera columna se coloca α y esta segunda fila y la tercera se completan simultáneamente. Debajo del coeficiente a_n no se coloca ningún número, mientras que en la tercera fila, segunda columna, se vuelve a poner el coeficiente a_n según se observa a continuación

$$\begin{array}{cccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \alpha & & & & & \\ \hline & a_n & & & & \end{array}$$

- A continuación se multiplica α por el elemento que está bajo la línea en la segunda columna, a_n, este producto se coloca debajo de a_{n-1}, en la segunda fila, y la suma de ambos se escribe debajo de la línea en esa columna. Se repite este proceso con la segunda columna y así sucesivamente, hasta completar la segunda y tercera filas.

- El cociente, $C(x)$, es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo, cuyos coeficientes son los $n-1$ primeros valores que aparecen bajo la línea, y el último coeficiente es el resto, R, de la división, luego $P(x) = C(x)(x-\alpha)+R$. El resto es igual al valor que toma el polinomio cuando $x = \alpha$.

Ejemplo 2.1 *Dividir el polinomio* $P(x) = 3x^3 - x + 2$ *entre* $x + 1$ *utilizando la regla de Ruffini.*

Solución

En este caso $\alpha = -1$ y los coeficientes del polinomio dividendo son $a_3 = 3$, $a_2 = 0$, $a_1 = -1$ y $a_0 = 2$. Se procede según se ha descrito anteriormente:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & & -3 & & \\ \hline & 3 & -3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & & -3 & 3 & \\ \hline & 3 & -3 & 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & & -3 & 3 & -2 \\ \hline & 3 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Luego, la división tiene resto cero y el cociente es el polinomio de grado 2 cuyos coeficientes son $3, -3$ y 2, es decir, $3x^2 - 3x + 2$.

Al ser el resto cero, se dice que el polinomio $3x^3 - x + 2$ es divisible entre $x + 1$, y se puede escribir

$$3x^3 - x + 2 = (x + 1)(3x^2 - 3x + 2)$$

Como el polinomio vale 0, cuando $x = -1$, una raíz de este polinomio es $x = -1$.

2.2. Ecuaciones lineales

- La solución de una ecuación lineal con una incógnita que adopta la forma reducida $ax + b = 0$, donde x denota la incógnita y $a \neq 0$, es

  $$x = \frac{-b}{a}$$

  Si una ecuación lineal con una incógnita no adopta la forma reducida $ax + b = 0$, se procede a agrupar por una parte los términos donde aparece la incógnita x y por otra los términos que no la tienen, pasando de la ecuación dada a otra equivalente en forma reducida.

  Si al realizar este proceso se obtiene $b = 0$ con b un número real distinto de 0, la ecuación no tiene solución. Si se obtiene $c = c$ con c cualquier número real, entonces la ecuación es una identidad.

Ejemplo 2.2 *A continuación se resuelven algunas ecuaciones lineales sencillas* *a)* $-5x = 10 \Leftrightarrow -5x - 10 \Leftrightarrow x = -2.$

b) $3x - 6 = -4x + 8$ *(agrupando)* $\Leftrightarrow 7x - 14 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

c) $\dfrac{3x}{5} - 2x + 5 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{x}{2}$ *(agrupando)* $\dfrac{3x}{5} - 2x + \dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{2} - 5$

$$\frac{-9x}{10} = \frac{-5}{2} \Leftrightarrow x = \frac{25}{9}$$

d) $4(2 - x) = 8 + 2(3 - x) - 6$ *(aprupando)* $\Leftrightarrow 0 = 0$ *no se trata de una ecuacion sino de una identidad.*

Gráficamente la solución de una ecuación lineal con una incógnita se representa por un punto en la recta real.

- Una ecuación lineal con dos incógnitas adopta la forma reducida

$$ax + by = c$$

con $a \neq 0$ o $b \neq 0$.

Si la ecuación no adopta esta forma se procede a agrupar los términos que tienen la incógnita x, los términos con la incógnita y y los términos independientes (términos sin incógnita), pasando de la ecuación dada a otra equivalente expresada de forma reducida. Puede ocurrir que se llegue a una contradicción si la ecuación no tiene solución o bien es una identidad.

Gráficamente, si una ecuación lineal con dos incógnitas tiene solución, ésta es una recta.

Ejemplo 2.3 *El conjunto de soluciones de la ecuación*

$$3x + 5 = y + 2x - 1 \Leftrightarrow x - y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = x + 6$$

es la recta $y = x + 6$ *con* $x \in \mathbb{R}$.

2.3. Ecuaciones de segundo grado

a) Una ecuación de segundo grado con una incógnita adopta la forma reducida:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0$$

Estas ecuaciones se resuelven utilizando la siguiente expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1}$$

de modo que:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas que son:
$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
2. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces se dice que la ecuación tiene una solución real doble que es:
$$x = \frac{-b}{2a}$$
3. Cuando $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene solución real.

Casos sencillos

Dentro de las ecuaciones de segundo grado, las más sencillas son aquellas en las que falta algún término.

- Si $c = 0$, entonces
$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0, ax + b = 0$$
luego las soluciones de esta ecuación de segundo grado son $x = 0$ y $x = -\frac{b}{a}$.
- Si $b = 0$, entonces $ax^2 + c = 0$ que tendrá solución si $c \leq 0$.

Ejemplo 2.4 *Para resolver la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$ se aplica la expresión (1), con $a = 1, b = -4$ y $c = 4$ y se tiene:*
$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$
donde la solución de esta ecuación es $x = 2$ (doble).

Ejemplo 2.5 *Para resolver la ecuación $3x^2 - 6 = 2x^2 + 3$ se agrupan los términos de igual grado*
$$3x^2 - 6 = 2x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3,\ x = -3$$

b) Las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas que se estudian aquí adoptan la forma reducida:
$$ax^2 + bx + c - y = 0$$
con $a \neq 0$. El conjunto de soluciones es la parábola vertical:
$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2 + bx + c\right\}$$

2.4. Ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2

Tienen la forma reducida:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con $n > 2$ y $a_n \neq 0$. Para resolver estas ecuaciones, se distinguen dos situaciones, que $a_0 \neq 0$ o que $a_0 = 0$.

i) Cuando $a_0 \neq 0$, suele ser útil buscar si el polinomio tiene raíces enteras, porque éstas se encuentran entre los divisores del término independiente, a_0. Si α_1 es una de estas raíces enteras, el polinomio se puede escribir como

$$P_n(x) = (x - \alpha_1) P_{n-1}(x)$$

siendo $P_{n-1}(x)$ un polinomio de grado $n-1$. Para este polinomio se repite el procedimiento siempre que cada polinomio cociente tenga raíces enteras y tras sucesivas etapas se llega a

$$P_n(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_{n-2}) P_2(x)$$

con $P_2(x)$ un polinomio de grado 2. Luego las raíces del polinomio serían $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}$ junto con las raíces del polinomio $P_2(x)$, que se obtienen mediante el procedimiento descrito en el apartado 2.

Para obtener los sucesivos polinomios cocientes, por ejemplo obtener en la primera etapa $P_{n-1}(x)$, se puede utilizar la Regla de Ruffini (y sucesivamente).

ii) El caso en el que $a_0 = 0$, x o alguna potencia de x es factor común de todos los sumandos y se puede escribir

$$P_n(x) = x^k (a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-k-1} + \cdots + a_k)$$

con $k \geq 1$, y $a_k \neq 0$.

Ahora, el polinomio $a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-k-1} + \cdots + a_k$ estaría en la situación descrita en el apartado i), pues su término independiente sería distinto de cero, y se calcularían sus raíces aplicando el procedimiento anterior.

Finalmente, las raíces del polinomio de partida $P_n(x)$ serían 0,con multiplicidad k, junto con las raíces del polinomio

$$a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-k-1} + \cdots + a_k$$

Ejemplo 2.6 *Hallar las raíces del polinomio* $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$.

Solución

Primero se busca alguna raíz entera del polinomio, para lo cual se prueba con los divisores del término independiente, 4, que son:

$$2, -2, 1, -1, 4 \text{ y } -4.$$

Es fácil observar que 2 es una raíz de este polinomio (basta sustituir en el polinomio, $P(2) = 0$). Esto implica que $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ es divisible por $x - 2$.

A continuación, se divide $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ entre $x - 2$, para lo cual es útil aplicar la regla de Ruffini. En este caso $\alpha = 2$ y los coeficientes del polinomio dividendo son $a_3 = 3$, $a_2 = -7$, $a_1 = 0$ y $a_0 = 4$ y se procede tal como se ha descrito anteriormente:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -7 & 0 & 4 \\ 2 & & & & \\ \hline & 3 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 3 & -7 & 0 & 4 \\ 2 & & 6 & & \\ \hline & 3 & -1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -7 & 0 & 4 \\ 2 & & 6 & -2 & \\ \hline & 3 & -1 & -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 3 & -7 & 0 & 4 \\ 2 & & 6 & -2 & -4 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, $3x^3 - 7x^2 + 4 = (x - 2)(3x^2 - x^2 - 2)$.

Si el polinomio tiene dos raíces reales más, éstas son las raíces del polinomio de segundo grado:

$$3x^2 - x^2 - 2$$

Sus raíces se calculan utilizando la fórmula dada anteriormente y se obtienen los valores 1 y $-\dfrac{2}{3}$.

Luego las raíces de $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ son $2, 1$ y $-\dfrac{2}{3}$.

2.5. Inecuaciones

La inecuaciones que se estudian adoptan la forma reducida:

- $f(x) \leq 0$ o $f(x) \geq 0$, o bien con desigualdades estrictas $(<, >)$, donde $f(x)$ es un polinomio de grado 1 o 2 en la incógnita x en forma reducida.

- $f(x, y) \leq 0$ o $f(x, y) \geq 0$, o bien con desigualdades estrictas, donde $f(x, y)$ es un polinomio de grado 1 en las incógnitas x e y en forma reducida o bien $f(x, y) = ax^2 + bx + c - y$ con $a \neq 0$.

Nota: Determinar el signo de una función $f(x)$ o $f(x,y)$ es resolver una inecuación $f(x) \leq 0$, $f(x,y) \leq 0$, $f(x) \geq 0$ o $f(x,y) \geq 0$, o bien con desigualdades estrictas.

Si una inecuación no adopta la forma reducida se agruparán las incógnitas y los términos sin incógnitas hasta obtenerla.

Inecuaciones con una incógnita

Para resolver una inecuación una vez expresada de forma reducida se procede de la siguiente manera:

- Se resuelve la ecuación polinómica $f(x) = 0$.
- Las raíces del polinomio dividen el dominio de la función, que es $\mathbb{R}$, en intervalos. En cada uno de estos intervalos el signo de la función permanece constante.
- Para saber el signo que tiene $f(x)$ en uno de estos intervalos, bastará evaluar la función en un punto del interior del intervalo.

Gráficamente la solución de una inecuación de este tipo, si la tiene, es un intervalo, la unión de varios intervalos, todo el conjunto de los números reales o bien un número finito de números reales.

Ejemplo 2.7 *Resolver* $1 - 4x \leq 0$.

Solución

$$1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Luego en la recta real se distinguen dos intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$:

- Si $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, $1 - 4x > 0$.
- Si $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, $1 - 4x < 0$.

Luego la solución de la inecuación es $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ donde se incluye el número real $x = 1/4$, que es donde la expresión $1 - 4x$ vale 0.

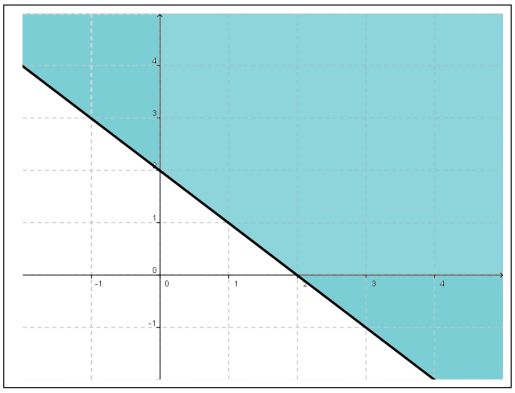

Figura 1: La zona sombreada junto con la recta representada corresponde a la solución del ejemplo 2.8

Inecuaciones con dos incógnitas

Se resuelve la ecuación $f(x, y) = 0$ con $f(x, y)$ un polinomio y el conjunto de sus soluciones se representa en el plano: una recta o una parábola, según se trate. Estas curvas dividen el plano en dos regiones donde la función $f(x, y)$ mantiene su signo. Para ello, se elige un punto de una de las regiones del plano y se valora $f(x, y)$, el signo de $f(x, y)$ para dicho valor se mantiene para todos los puntos de la región del plano a la que pertenece el punto elegido; luego si $f(x, y)$ es positivo para (x, y) perteneciente a una región del plano, en toda esa región del plano el signo de $f(x, y)$ es positivo e igualmente si el signo en el punto considerado es negativo.

Ejemplo 2.8 *Representar el conjunto de soluciones de la inecuación*

$$x + y \geq 2$$

Solución

La inecuación $x + y \geq 2$ es equivalente a la inecuación $x + y - 2 \geq 0$. Luego se representa la recta $x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 2$. En la figura 1 se observa la región sombreada que junto con la recta (semiplano) constituyen el conjunto de soluciones de la inecuación $x + y - 2 \geq 0$.

Ejemplo 2.9 *Representar del conjunto de soluciones de la inecuación*

$$-x^2 - 2x - y > 0$$

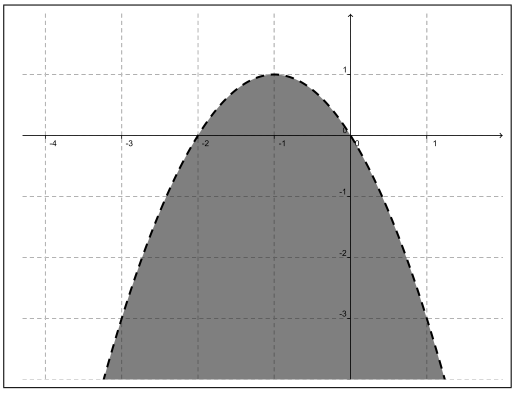

Figura 2: La zona sombreada es la solución de la inecuación del ejemplo 2.9

Solución

Se representa la parábola $-x^2 - 2x - y = 0$. La solución de la inecuación es la zona sombreada, sin incluir la parábola (línea discontinua) como se observa en la figura 2

IMPORTANTE:

Para resolver cualquier inecuación donde $f(x)$ 0 $f(x,y)$ no sea un polinomio se produce de la mima manera. En el $Dom(f)$ consideran los puntos que resuelven la ecuación $f(x) = 0$ o $f(x,y) = 0$, que lo dividiran en intervalos de la recta real o regiones del plano y análogamente se obtiene la solución.

2.6. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Distinguimos si el sistema tiene dos o tres ecuaciones.

a) Con dos ecuaciones

Adopta la forma reducida:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{array}\right\}$$

Se resuelve por cualquiera de los procedimientos conocidos: despejando en ambas ecuaciones la misma incógnita e igualando; despejando una incógnita en una ecuación y sustituyendo en la otra o bien multiplicando ambas ecuaciones por el número real conveniente de modo que al sumar ambas ecuaciones una incógnita desaparezca.

Gráficamente: La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede visualizarse representado ambas ecuaciones, que son las rectas $ax + by = c$ y $a'x + b'y = c'$, en el plano de modo que:

- Si las dos rectas se cortan en un punto, ese punto es la solución del sistema lineal.
- Si las dos rectas son paralelas, el sistema no tiene solución.
- Si las dos rectas son coincidentes, el sistema tiene muchas soluciones, que son todos los puntos de la recta.

Por tanto, el sistema puede tener una solución única, múltiples soluciones o bien ninguna solución (según sea la posición de las rectas que representa cada ecuación).

Ejemplo 2.10 *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y &=& -1 \\ 2x-y &=& 4 \end{array}\right\}$$

Solución

Si se suman ambas ecuaciones, la incógnita y desaparece, obteniéndose la ecuación $3x = 3$, luego $x = 1$. Sustituyendo el valor de esta incógnita en una de la ecuaciones del sistema se tiene que $y = -2$. La solución del sistema es $x = 1$ e $y = -2$.

Las rectas que representan cada una de las ecuaciones se cortan en el punto del plano de coordenadas $(1, -2)$.

b) Con tres ecuaciones

Adopta la forma reducida:

$$\left.\begin{array}{rcr} ax+by &=& c \\ a'x+b'y &=& c' \\ a''x+b''y &=& c'' \end{array}\right\}$$

Para resolverlo, se toman dos ecuaciones cualquiera y se resuelve el sistema formado por ellas, por cualquiera de los métodos dichos en el apartado anterior.

- Si ese sistema no tiene solución, el sistema formado por las tres ecuaciones no tiene solución.

- Si el sistema formado por las dos ecuaciones elegidas tiene una única solución, es preciso comprobar que esta solución verifica la ecuación restante, de modo que si la verifica, esa será la solución del sistema formado por las tres ecuaciones con dos incógnitas; en el caso de que la solución obtenida con las dos primeras ecuaciones no verifique la tercera ecuación, el sistema no tendría solución.
- Cuando el sistema de las dos primeras ecuaciones tiene infinitas soluciones (rectas coincidentes), nos quedamos con una de estas (de hecho es la misma) y junto con la última ecuación se resuelve este sistema.

Ejemplo 2.11 *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y & = & -1 \\ 2x-y & = & 4 \\ 4x+y & = & 2 \end{array}\right\}$$

Solución

Las dos primeras ecuaciones de este sistema constituyen el sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas que ha sido resuelto en el ejemplo 2.10, cuya solución es $x = 1$ e $y = -2$. Cuando se sustituye en la tercera ecuación de este sistema, ésta se verifica, luego el sistema tiene solución que es $x = 1$ e $y = -2$.

2.7. Sistemas de ecuaciones no lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

1. Sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax^2+bx+y & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{array}\right\}$$

La primera ecuación del sistema representa una parábola y la segunda una recta, ambas en el plano, y para resolverlo se despeja una incógnita en la ecuación lineal y se sustituye en la ecuación de la parábola de modo que:

   - El sistema tendrá solución si la recta corta a la parábola en dos puntos (dos soluciones) o bien la recta es tangente a la parábola en un punto (que es la solución del sistema).
   - La parábola y la recta no se cortan ni son tangentes, en este caso el sistema no tiene solución.

2. Sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} ax^2+bx+y & = & c \\ a'x^2+b'x+y & = & c' \end{array}\right\}$$

Ambas ecuaciones representan parábolas en el plano. Para resolver el sistema se despeja la incógnita y en una de las parábolas y se sustituyen en la otra y se resuelve la ecuación resultante de modo que:

- El sistema tendrá solución si ambas parábolas intersectan en dos puntos (dos soluciones), intersectan o son tangentes en un punto (que es la solución del sistema).
- Si las parábolas no se cortan, el sistema no tiene solución.

Ejemplo 2.12 *Resolver el sistema*

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+2x+y & = & -1 \\ x^2+4x-y+3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución

Se despeja la incógnita y en la segunda ecuación $y = x^2+4x+3$ y se sustituye en la primera ecuación:

$$x^2+2x+(x^2+4x+3) = -1 \Leftrightarrow 2x^2+6x+4 = 0$$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado se obtiene: $x = -2$ y $x = -1$, cuyos correspondientes valores de y, sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones del sistema, son $y = -1$ y $y = 0$.

Luego este sistema tiene dos soluciones $x = -2, y = -1$ y $x = -1, y = 0$ (es decir, las parábolas se cortan en dos puntos:$(-2,-1)$ y $(-1,0)$).

2.8. Sistemas de inecuaciones

Solamente se estudian sistemas de dos inecuaciones con una incógnita y sistemas de dos inecuaciones con dos incógnitas. El resultado se puede generalizar a más inecuaciones con el mismo número de incógnitas.

Sistemas de dos inecuaciones con una incógnita

El procedimiento general consiste en resolver cada una de las inecuaciones y una vez resueltas, el conjunto de números reales común que verifica ambas inecuaciones es la solución del sistema.

La solución del sistema puede ser un intervalo de la recta real, un conjunto finito de puntos o bien puede que no tenga solución.

Ejemplo 2.13 *Resolver el sistema de inecuaciones*

$$\left.\begin{array}{c} 4x-8\leq 0 \\ \dfrac{3}{2}x+2<2x+\dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Solución

Se resuelven ambas inecuaciones:

- $4x-8=0 \Leftrightarrow x=2$.

  Entonces:

  - Si $x\in(-\infty,2)$, $4x-8<0$.
  - Si $x\in(2,+\infty)$, $4x-8>0$.

  Luego la solución de la primera inecuación es $(-\infty,2]$.

- Agrupando los términos con la incógnita x y los términos independientes se obtiene la inecuación equivalente a la dada en forma reducida

  $$\frac{3}{2}x+2<2x+\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{-x}{2}-\frac{1}{2}<0$$

  Se resuelve la inecuación $\dfrac{-x}{2}-\dfrac{1}{2}<0$.

  $$\frac{-x}{2}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=-1$$

  Entonces:

  - Si $x\in(-\infty,-1)$, $\dfrac{-x}{2}-\dfrac{1}{2}>0$ es decir, $\dfrac{3}{2}x+2>2x+\dfrac{5}{2}$.
  - Si $x\in(-1,+\infty)$, $\dfrac{-x}{2}-\dfrac{1}{2}<0$ es decir, $\dfrac{3}{2}x+2<2x+\dfrac{5}{2}$.

  Luego la solución de la segunda inecuación es $(-1,+\infty)$.

Por tanto, la solución del sistema de inecuaciones dado es

$$(-1,+\infty)\cap(-\infty,2]=(-1,2]$$

Ejemplo 2.14 *Resolver el sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{c} 4x-8\leq 0 \\ \\ \dfrac{3}{2}x+2>2x+\dfrac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Solución

Teniendo en cuenta la resolución del ejercicio 2.13 la solución de la primera inecuación es $(-\infty, 2]$ y la solución de la segunda inecuación es $(-\infty, -1)$, luego la solución del sistema de inecuaciones es el intervalo

$$(-\infty, 2] \cap (-\infty, -1) = (-1, 2] = (-\infty, -1)$$

Ejemplo 2.15 *Resolver el sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{c} 4x - 8 \geq 0 \\ \frac{3}{2}x + 2 \leq 2x + \frac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Solución

Teniendo en cuenta la resolución del ejemplo 2.13 la solución de la primera inecuación es: $[2, +\infty)$ y la solución de la segunda inecuación es: $[-1, +\infty)$. Por tanto, la solución del sistema de inecuaciones es:

$$[2, +\infty) \cap [-1, +\infty) = [2, +\infty)$$

Ejemplo 2.16 *Resolver el sistema de inecuaciones*

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + 2x + 1 > 0 \\ 2x - 3 \leq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

Se resuelven las inecuaciones

- $x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

  Entonces:

  - Si $x \in (-\infty, -1)$, $x^2 + 2x + 1 > 0$.
  - Si $x \in (-1, +\infty)$, $x^2 + 2x + 1 > 0$.

  Luego la solución de la primera inecuación es $\mathbb{R} - \{0\}$.

- $2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$.

  Entonces:

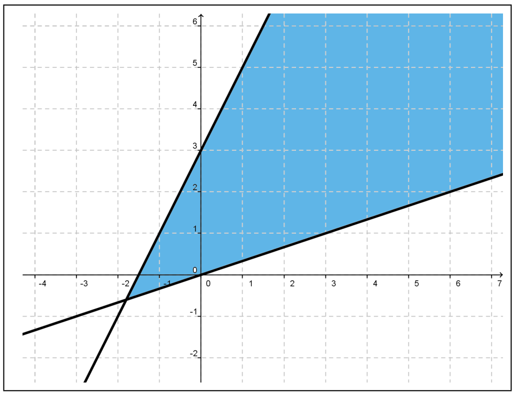

Figura 3: La zona sombreada, incluyendo las rectas, corresponde a la solución del sistema del ejemplo 2.17

- Si $x \in (-\infty, 3/2)$, $2x - 3 < 0$.
- Si $x \in (3/2, +\infty)$, $2x - 3 > 0$.

Luego la solución de esta inecuación es $(-\infty, 3/2]$.

Por tanto, la solución del sistema de inecuaciones es $(-\infty, 3/2] - \{0\}$.

Sistemas de dos inecuaciones con dos incógnitas

Se resuelve cada una de las inecuaciones que forman el sistema y se representa su solución. La intersección del conjunto de soluciones de cada una de las inecuaciones es la solución del sistema.

Ejemplo 2.17 *Representar el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3 \geq 0 \\ -x + 3y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

Se representan las rectas $2x - y + 3 = 0$ y $-x + 3y = 0$ y se calcula, si existe, la solución del sistema lineal formado por estas dos ecuaciones, que es $(-9/5, -3/5)$.

En la figura 3 se observa el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que verifica el sistema del ejemplo 2.17.

Ejemplo 2.18 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3 \leq 0 \\ -x + 3y \geq 0 \end{array}\right\}$$

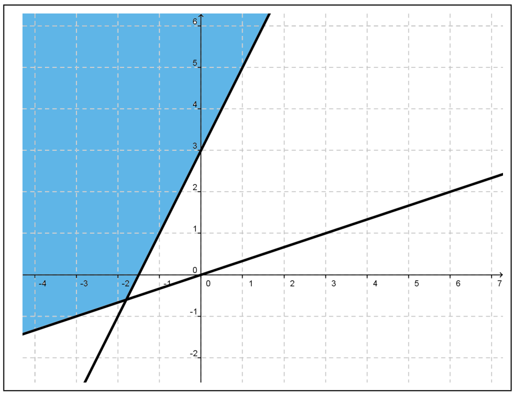

Figura 4: La zona sombreada corresponde a la solución del sistema del ejemplo 2.18

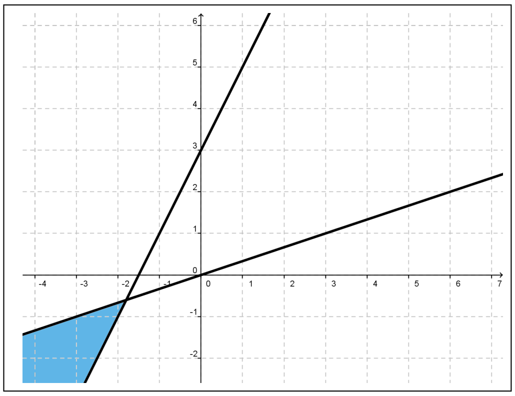

Figura 5: La zona sombreada junto con las semirectas que lo limitan corresponde a la solución del sistema del ejemplo 2.19

Solución

En la figura 4 se observa el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que verifica el sistema de este ejemplo.

Ejemplo 2.19 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y + 3 \leq 0 \\ -x + 3y \leq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

La figura 5 representa el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que verifica este sistema de inecuaciones.

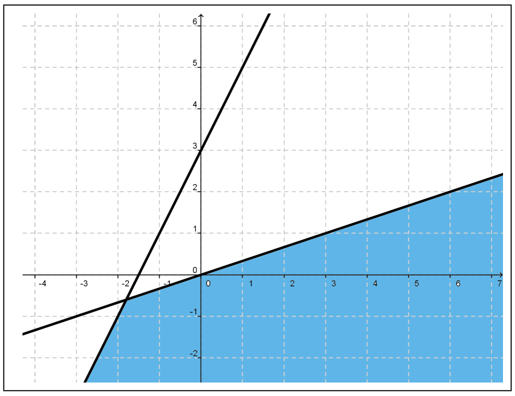

Figura 6: La zona sombreada junto con las semirectas que la limitan corresponde a la solución del sistema del ejemplo 2.20

Ejemplo 2.20 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3 \geq 0 \\ -x + 3y \leq 0 \end{aligned}\right\}$$

Solución

En la figura 6 se observa el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que verifica el sistema de este ejemplo.

Ejemplo 2.21 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + 3 \geq 0 \\ -x + 3y \leq 0 \\ x \geq -5/2 \end{aligned}\right\}$$

Solución

La solución del sistema lineal formado por las dos primera ecuaciones, obtenidas al igualar a cero, es $(-9/5, -3/5)$. Esta punto no verifica la condición $x = -2$, luego el sistema lineal obtenido de igualar cada inecuación a 0 no tiene solución, pero el sistema de inecuaciones sí tiene solución, que es la región del plano que verifica las tres inecuaciones a la vez. El conjunto de puntos del plano que verifican estas tres inecuaciones se puede observar en la figura 7

Ejemplo 2.22 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y - 4 \geq 0 \\ 2x + 2y - 4 \leq 0 \end{aligned}\right\}$$

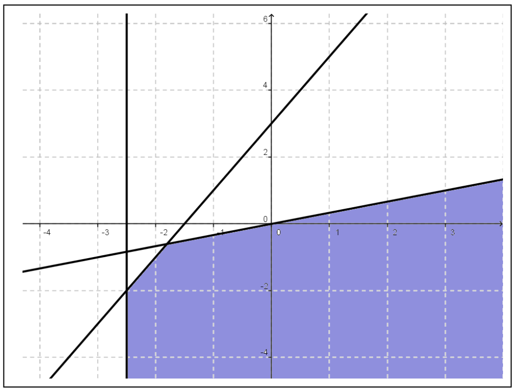

Figura 7: La zona sombreada, incluyendo las semirectas que la limitan, corresponde a la solución del sistema del ejemplo 2.21

Solución

Se representan la parábola $x^2 - y - 4 = 0$ y la recta $2x + 2y - 4 = 0$ y se calculan los puntos que resuelven el sistema formado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 - y - 4 & = & 0 \\ 2x + 2y - 4 & = & 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x^2 - 4 \\ y & = & -x + 2 \end{array}\right.$$

de donde se obtiene que

$$-x + 2 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3, \;\; x = 2$$

luego los puntos de corte de la parábola y la recta son $(-3, 5)$ y $(2, 0)$.

Se representa en el plano el conjunto de soluciones de cada una de las inecuaciones y su intersección será la solución del sistema, incluyendo la porción de parábola y recta que lo limita, tal como se puede ver en la figura 8.

Ejemplo 2.23 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - y - 4 \geq 0 \\ 2x + 2y - 4 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

Teniendo en cuenta la resolución del ejemplo 2.22, la solución del ejemplo 2.23 se puede ver en la figura 9. Se trata de la zona sombreada junto con el trazo de parábola y recta que la limita.

Ejemplo 2.24 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - y - 4 \leq 0 \\ 2x + 2y - 4 \leq 0 \end{array}\right\}$$

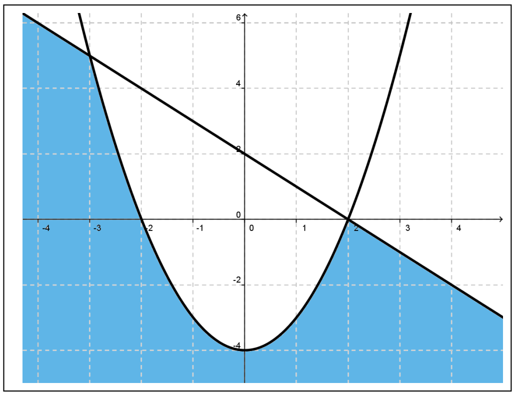

Figura 8: Solución del sistema de inecuaciones del ejercicio 2.22

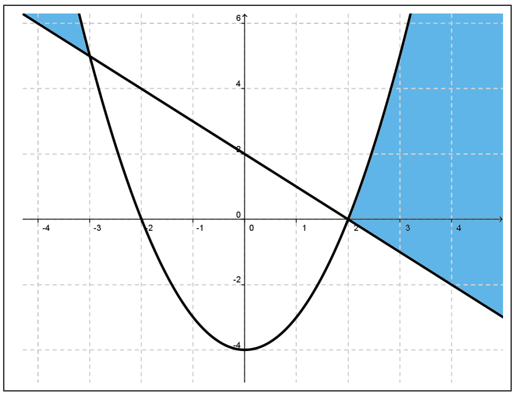

Figura 9: Solución del sistema de inecuaciones del ejercicio 2.23

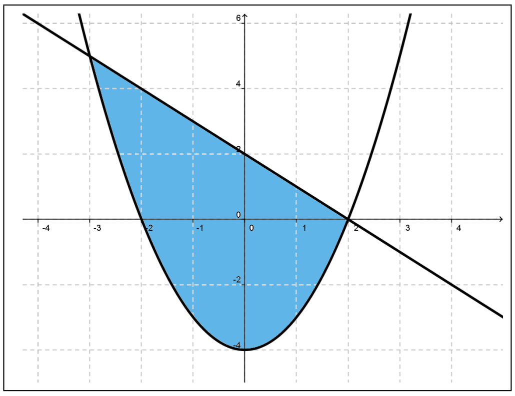

Figura 10: Solución del sistema de inecuaciones del ejercicio 2.24

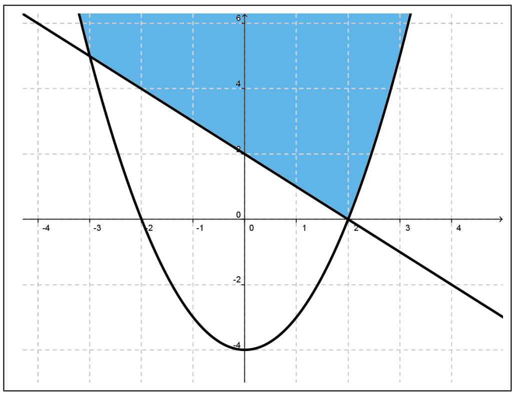

Figura 11: Solución del sistema de inecuaciones del ejemplo 2.25, zona sombreada junto con los trozos de parábola y recta de trazo grueso que la limita

Solución

Teniendo en cuenta la resolución del ejemplo 2.22 la zona sombreada de la figura 10, junto con el trozo de parábola y el de recta que la limita, corresponde a la solución del ejemplo 2.24.

Ejemplo 2.25 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} x^2 - y - 4 \leq 0 \\ 2x + 2y - 4 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

La zona sombreada de la figura 11 junto con los trazos gruesos de la parábola y recta que la limita corresponde a la solución del ejemplo 2.25.

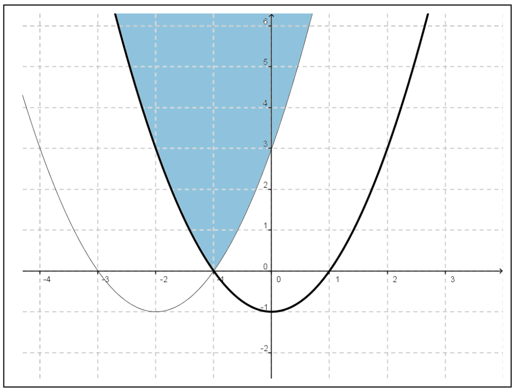

Figura 12: Solución del sistema de inecuaciones del ejemplo 2.26 donde los puntos del trazo débil que limita esta región del plano no pertencen al conjunto de soluciones del sistema

Ejemplo 2.26 *Representar la solución del sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} x^2+4x-y+3<0 \\ x^2-y-1\leq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

Se representan las parábolas $x^2+4x+3=y$ y $x^2-1=y$ y se calculan, si los tienen, los puntos donde se cortan ambas parábolas.

En este caso el sistema formado por las ecuaciones anteriores solo tienen un punto en común, cuando $x=-1$ e $y=0$. Se trata del punto $(-1,0)$.

Se representa el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ que resuelve cada una de las inecuaciones y el conjunto común es la solución del sistema dado.

La zona sombreada de la figura 12 corresponde a la solución de este ejemplo, incluyendo los puntos de la parábola que limitan la zona sombreada de trazo más grueso y excluyendo los puntos de la parábola de trazo más débil.

3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1 *Resolver las ecuaciones:*

a) $2x^2-10x+12=0$.

b) $-x^2-2x-1=0$.

c) $-8x^2-28x-12=0$.

Solución

a) Aplicamos la expresión (1), con $a = 2, b = -10$ y $c = 12$ y se obtiene:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{4} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

esta ecuación tiene dos soluciones $x = 3$ y $x = 2$.

b) Aplicando la expresión (1), con $a = -1, b = -2$ y $c = -1$ se tiene:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

que no tiene solución.

c) Aplicamos la expresión (1), con $a = -8, b = -28$ y $c = -12$ se tiene:

$$x = \frac{28 \pm \sqrt{784 - 384}}{-16} = \frac{28 \pm 20}{-16}$$

cuyas soluciones son $x = -1/2$ y $x = -3$.

Ejercicio 2 *Obtener las raíces del polinomio* $P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2$.

Solución

En este caso, el término independiente y el coeficiente de x valen 0. Luego x^2 es factor común de todos los sumandos, y el polinomio se puede escribir

$$P(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2 = x^2(x^3 + x^2 - 5x + 3).$$

El problema se reduce ahora a calcular las raíces del polinomio

$$x^3 + x^2 - 5x + 3$$

que tiene término independiente distinto de cero. Se procede como se ha indicado en la sección herramientas y se obtiene que sus raíces son 1 (doble) y -3.

Por tanto, las raíces del polinomio $x^5 + x^4 - 5x^3 + 3x^2$ son:

$$0 \text{ (doble)}, 1 \text{ (doble) y } -3$$

Ejercicio 3 *Resolver la inecuación:* $-8 - 4x \leq 0$.

Solución

$$-8 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8}{4} = -2$$

Luego en la recta real se distinguen dos intervalos $(-\infty, -2)$ y $(-2, +\infty)$

- Si $x \in (-\infty, -2)$, $-8 - 4x > 0$.
- Si $x \in (-2, +\infty)$, $-8 - 4x < 0$.

Luego la solución de la inecuación es $(-\infty, -2]$ donde se incluye el número real $x = -2$, que es donde $-8 - 4x$ vale 0.

Ejercicio 4 *Resolver la inecuación* $x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Solución

Se resuelve la ecuación $x^2 + 3x + 2 = 0$ cuyas soluciones son: $x = -1$ y $x = -2$.

En la recta real se distinguen los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$ y $(-1, +\infty)$, de modo que:

- Si $x \in (-2, 1)$ resulta que $x^2 + 3x + 2 < 0$.
- Si $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$, $x^2 + 3x + 2 > 0$

Luego la solución de la inecuación es $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$ donde se incluyen los número reales $x = -2$ y $x = -1$ porque para estos valores la expresión $x^2 + 3x + 2$ vale 0.

Ejercicio 5 *Resolver la inecuación* $3(x^2 + 1) < 0$.

Solución

En este caso la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución, por lo que el polinomio $3(x^2 + 1)$ para cualquier valor que tome la incógnita x tiene el mismo signo, que es poisitivo. Luego esta inecuación no tiene solución.

Ejercicio 6 *Resolver la inecuación* $3(x + 1)^2 \leq 0$.

Solución

En este caso la ecuación $(x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$, para el resto de los número reales la expresión $3(x+1)^2$ es positiva, por tratarse de un cuadrado. Luego la solución de la inecuación se reduce a un único número real $x = -1$.

Ejercicio 7 *Resolver la inecuación* $(x - 2)(2x + 3)(3x - 1) < 0$.

Solución

Este es un ejemplo de resolución de una inecuación polinómica de grado mayor que 2. Para ello, se factoriza el polinomio, que en este caso ya esta factorizado, y se calculan sus raíces.

$$(x-2)(2x+3)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -3/2, x = 1/3$$

En la recta real se distinguen los intervalos $(-\infty, -3/2)$, $(-3/2, 1/3)$,$(1/3, 2)$ y $(2, +\infty)$, de modo que:

- Si $x \in (-\infty, -3/2) \cup (1/3, 2)$, $(x-2)(2x+3)(3x-1) < 0$.
- Si $x \in (-3/2, 1/3) \cup 2, +\infty)$, resulta que $(x-2)(2x+3)(3x-1) > 0$

Luego la solución de la inecuación es $(-\infty, -3/2) \bigcup (1/3, 2)$.

Ejercicio 8 *Resolver el sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2 + 4x - 6 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

La ecuación $2x^2 + 4x - 6 = 0$ se verifica cuando $x = 1$ o $x = -3$. Estos puntos dividen $\mathbb{R}$ en los intervalos $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ y $(1, +\infty)$ y se estudia el signo de $2x^2 + 4x - 6 = 0$ en cada uno de estos intervalos. Por tanto, la solución de la primera inecuación es $[-3, 1]$.

Ahora se resuelve la ecuación $x^2 - 2x + 3 = 0$, que no tiene solución real, por lo que la expresión es siempre positiva para cualquier valor que tome la incógnita x (basta valorar $x^2 - 2x + 3$ para x cualquier número real y el resultado es un número positivo).

Luego la solución del sistema de inecuaciones es el intervalo $[-3, 1]$.

Ejercicio 9 *Representar del conjunto de soluciones de la inecuación:*

$$3x + 2y \leq 4x + 4$$

Solución

Se obtiene la inecuación equivalente

$$3x + 2y \leq 4x + 4 \Leftrightarrow -x + 2y - 4 \leq 0$$

Se representa la recta $-x + 2y - 4 = 0$. La solución de la inecuación se observa en la figura 13

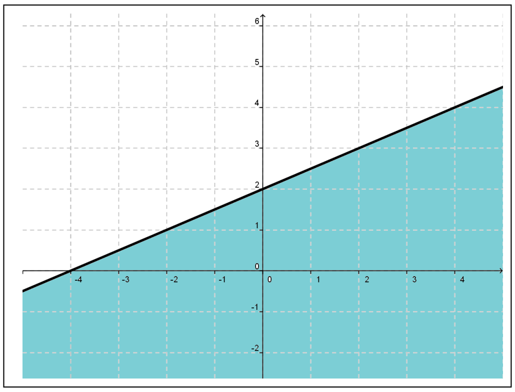

Figura 13: La zona sombreada junto con la recta corresponde a la solución de la inecuación del ejercicio 9

Ejercicio 10 *Representar el conjunto de soluciones de los siguientes sistemas de inecuaciones:*

a)

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} - y + 3 \leq 0 \\[2ex] \dfrac{3x}{2} - 3y - 3 \leq 0 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} - y + 3 \geq 0 \\[2ex] \dfrac{3x}{2} - 3y - 3 \leq 0 \end{array}\right\}$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} - y + 3 \geq 0 \\[2ex] \dfrac{3x}{2} - 3y - 3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

d)

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x}{2} - y + 3 \leq 0 \\[2ex] \dfrac{3x}{2} - 3y - 3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

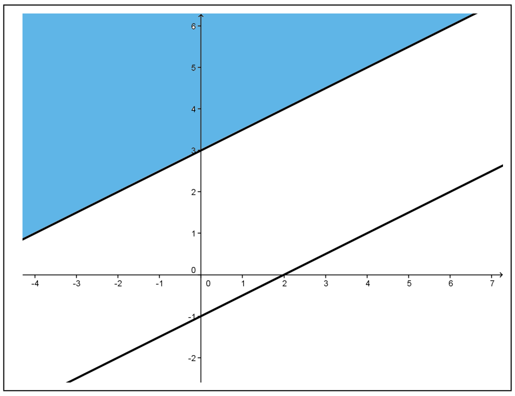

Figura 14: Solución del sistema de inecuaciones del ejercicio 10 apartado a)

Solución

Se representan las rectas

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x}{2}-y+3=0\\[2ex]\dfrac{3x}{2}-3y-3=0\end{array}\right\}$$

que son paralelas y a partir de ellas se obtienen la solución de cada una de las inecuaciones, la zona común es la solución del sistema en cada uno de los casos.

a) La zona sombreada de la figura 14 corresponde a la solución del ejercicio 10 apartado a)

b) La zona sombreada de la figura 15 corresponde a la solución del ejercicio 10 apartado b)

c) La zona sombreada de la figura 16 corresponde a la solución del ejercicio 10 apartado c)

d) El sistema no tiene solución.

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 *Resolver las siguientes ecuaciones:*

a) $x^2-4x-21=0$.

b) $3x^2-21x+30=0$.

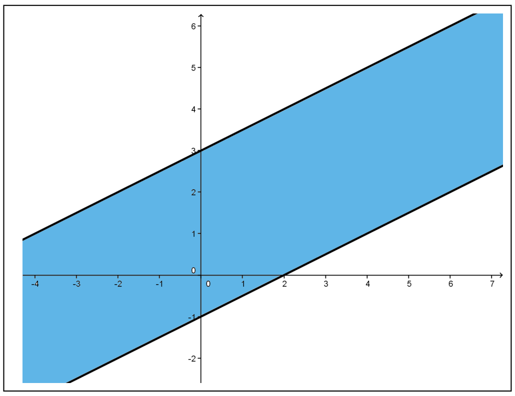

Figura 15: Solución del sistema de inecuaciones del ejercicio 10 apartado b)

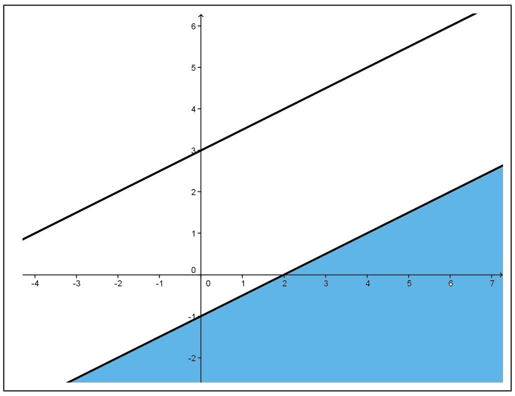

Figura 16: Solución del sistema de inecuaciones del ejercicio 10 apartado c)

Solución

a) $x = -3$ *y* $x = 7$.

b) $x = 2$ *y* $x = 5$.

Ejercicio 2 *Resolver las siguientes inecuaciones:*

a) $-2 + 6x > 0$.

b) $3x^2 - 21x \leq -30$.

c) $(x-1)(2x-1)(5x-2) > 0$.

Solución

a) $x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

b) $x \in [2, 5]$.

c) $x \in (1, +\infty) \cup \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

Ejercicio 3 *Resolver el sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{c} 3x + 5 \leq x + 3 \\ 2x^2 - 8 \geq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

$(-\infty, -2)$.

Ejercicio 4 *Resolver el sistema de inecuaciones:*

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + 2x - 8 \geq 0 \\ 3x^2 - 21x + 30 \geq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

$x \in (-\infty, -4] \cup [5, +\infty)$.

Ejercicio 5 *Representar del conjunto de soluciones de la inecuación*

$$2x - 2y \leq 3x + 2.$$

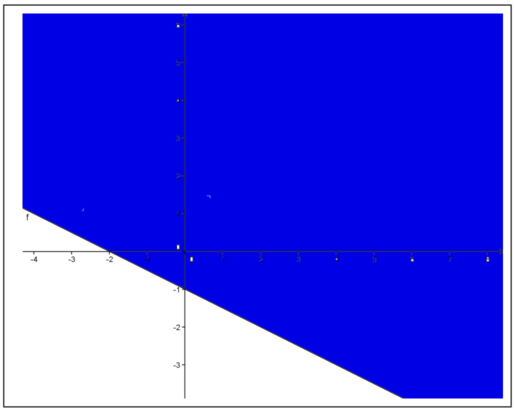

Figura 17: La zona sombreada es la solución de la inecuación del ejercicio propuesto 5

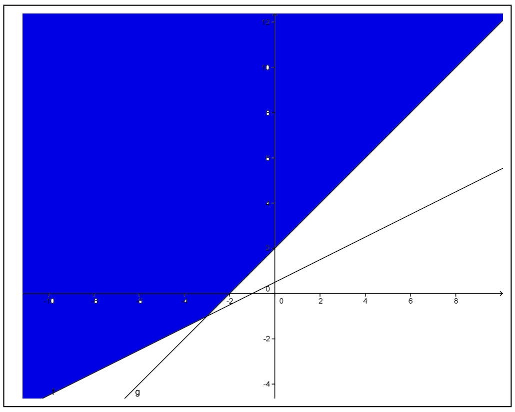

Figura 18: La zona sombreada es la solución del sistema de inecuaciones a) del ejercicio propuesto 6

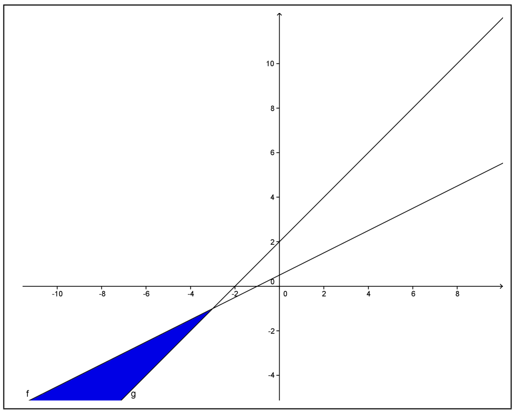

Figura 19: La zona sombreada es la solución del sistema de inecuaciones b) del ejercicio propuesto 6

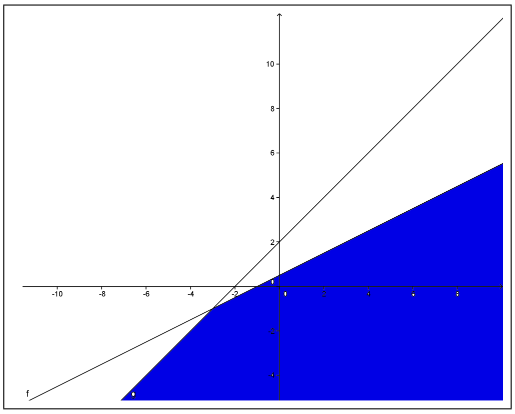

Figura 20: La zona sombreada es la solución del sistema de inecuaciones c) del ejercicio propuesto 6

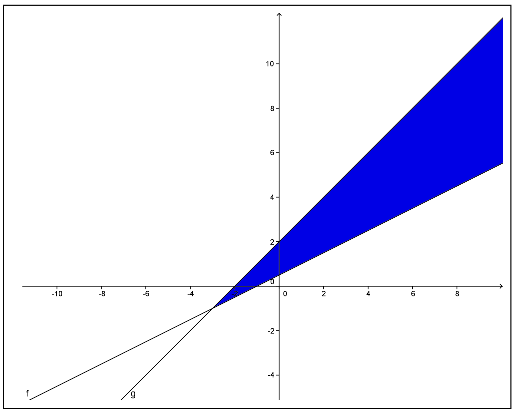

Figura 21: La zona sombreada es la solución del sistema de inecuaciones d) del ejercicio propuesto 6

Solución

Aparece en la figura 17.

Ejercicio 6 *Representar el conjunto de soluciones de los sistemas de inecuaciones siguientes:*

a)

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+1\leq 0 \\ x-y+2\leq 0 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+1\geq 0 \\ x-y+2\leq 0 \end{array}\right\}$$

c)

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+1\geq 0 \\ x-y+2\geq 0 \end{array}\right\}$$

d)

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+1\leq 0 \\ x-y+2\geq 0 \end{array}\right\}$$

Solución

Aparece en las figuras 18, 19, 20 y 21.