Límites y continuidad de funciones reales de variable real

Álvarez S., Caballero M.V. y Sánchez M.ªM.

salvarez@um.es, m.victori@um.es, marvega@um.es

OPEN COURSEWARE
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Índice

1. Definiciones **3**

2. Herramientas **7**

2.1. Funciones elementales 7

2.2. Operaciones con funciones 9

2.3. Cálculo de límites 11

3. Ejercicios resueltos **17**

4. Ejercicios propuestos **26**

1. Definiciones

- **Función real de variable real:** Es una aplicación $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que asocia a cada valor de la variable independiente $x \in D$ un único valor real de la variable dependiente y, que es la imagen de x a través de f. Se escribe $y = f(x)$.

  Puede ocurrir que siempre se utilice una única regla para calcular la imagen de cada uno de los elementos del dominio o bien que según sea el valor de la variable independiente se utilice una regla u otra para calcular su imagen(función definida a trozos).

- **Dominio de una función f:** Es el conjunto de números reales que tienen imagen mediante la función f. Se denota como D o $Dom(f)$ y se escribe:
$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x)\}$$

Ejemplo 1.1 *La función $f(x) = x^2$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ utiliza la misma regla para calcular la imagen de cualquier número real.*

Sin embargo, la función
$$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 & si \quad 3 < x < 5 \end{cases}$$
cuyo dominio es $[0, 5)$ tiene reglas distintas para calcular la imagen de los elementos de su dominio. La imagen de los números reales x tales que $0 \leq x \leq 3$ se calcula utilizando la regla $2x$ mientras que si $3 < x < 5$, su imagen se obtiene utilizando la regla x^2. Se trata de una función definida a trozos.

- **Gráfica de una función:** Es el conjunto
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in Dom(f), y = f(x)\}$$
cuya representación es generalmente una curva en $\mathbb{R}^2$.

  En la figura 1 se observa la representación gráfica de una función. Se tiene que para cada valor de la variable independiente x, que se representa en el eje horizontal, le corresponde un único valor de la variable dependiente y, que se representa en el eje vertical. Sin embargo, en la figura 2 se tiene la representación gráfica de una curva que no corresponde a una función (por ejemplo a $x = 1$ le corresponden dos valores de y).

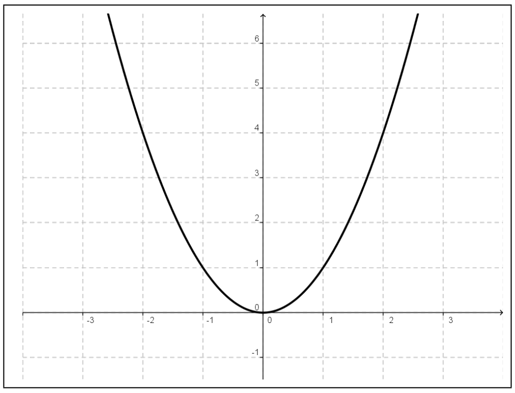

Figura 1: Representación gráfica de una función

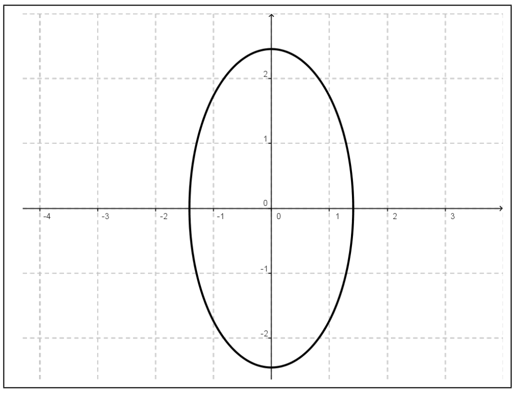

Figura 2: Esta representación gráfica no es de una función

- **Función elemental:** Es aquella función que no se puede obtener a partir de otras funciones.

  Ejemplo 1.2 *La función potencia $f(x) = x^2$ es una función elemental.*

- **Límite de una función en un punto:** Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite L (finito) cuando x tiende a x_0, si al aproximar la variable independiente x suficientemente a x_0 (sin llegar a x_0) sus imágenes $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L o valen L. Se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

  Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite $+\infty$ (respectivamente, $-\infty$) cuando x tiende a x_0, si al aproximar la variable independiente x suficientemente a x_0 (sin llegar a x_0), sus imágenes $f(x)$ se hacen tan grandes (respectivamente, tan pequeñas) como se quiera. Se escribe:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ (respectivamente, } -\infty)$$

Ejemplo 1.3 *Sea la función $f(x) = 2x + 3$. El valor del límite de esta función cuando x tiende a -1 (que se escribe $x \to -1$) es 1.*

Para verlo de un modo intuitivo se ha construido una tabla donde se dan valores a la variable independiente próximos a -1, y se calculan sus correspondientes imágenes, observándose que éstas están muy próximas a 1:

x	$-0{,}9$	$-0{,}99$	$-1{,}1$	$-1{,}01$	$-1{,}0007$
$f(x) = 2x + 3$	1,2	1,02	0,8	0,98	0,9986

Ejemplo 1.4 *Sea la función $f(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$. El límite de esta función cuando x tiende a -3 ($x \to -3$) es $+\infty$.*

Igual que en el ejemplo anterior se construye una tabla donde se dan valores a la variable independiente que se aproximan a -3 y se calculan sus correspondientes imágenes. Se observa que las imágenes se hacen muy grandes, basta observar que mientras que el numerador vale 2, el denominador está cada vez más próximo a cero y por tanto el cociente es cada vez mayor.

x	$-2{,}9$	$-2{,}99$	$-3{,}1$	$-3{,}01$	$-3{,}005$
$f(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$	200,00	20000,00	200,00	20000,00	40000,00

- **Límites laterales:**
  - Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite por la derecha (lateral por la derecha) cuando x tiende a x_0, igual a L (finito) si al aproximar la variable x suficientemente a x_0 por la derecha, es decir, con valores de x mayores que x_0, sus imágenes $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L o valen L. Se escribe:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

- Una función $y = f(x)$, que no tiene por qué estar definida en el punto x_0, tiene límite por la izquierda (lateral por la izquierda) cuando x tiende a x_0, igual a L (finito) si al aproximar la variable x suficientemente a x_0 por la izquierda, es decir, con valores x menores que x_0, sus imágenes $f(x)$ se aproximan tanto como se quiera a L o valen L. Se escribe:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Nota: Los límites laterales en un punto x_0 también pueden valer $+\infty$ o $-\infty$.

- **Límite de una función en el infinito:**

  - El límite de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x se hace muy grande (es decir, cuando $x \to +\infty$) es L, $+\infty$ o $-\infty$, cuando las imágenes de valores de x suficientemente grandes se aproximan a L, se hacen muy grandes ($+\infty$) o se hacen muy pequeñas ($-\infty$). Se escribe:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \, (+\infty \text{ o } -\infty)$$

  - El límite de una función $f(x)$ cuando la variable independiente x se hace muy pequeña (es decir, cuando $x \to -\infty$) es L, $+\infty$ o $-\infty$, cuando las imágenes de valores de x suficientemente pequeños (muy negativos) se aproximan a L, se hacen muy grandes ($+\infty$) o se hacen muy pequeñas ($-\infty$). Se escribe:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \, (+\infty \text{ o } -\infty)$$

- **Función continua:** Una función $y = f(x)$ se dice continua en un punto $x_0 \in Dom(f)$ cuando

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- **Función continua en $A \subseteq D$:** Una función es continua en $A \subseteq D$ cuando es continua en en cada uno de los puntos $x \in A$.

- **Discontinuidades:** Sea $x_0 \in Dom(f)$. Si la función $f(x)$ no es continua en x_0 puede ser debido a:

  - $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$ y $L \neq f(x_0)$ (discontinuidad evitable)

- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (discontinuidad de salto finito).
- alguno de los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto x_0 es ∞ (discontinuidad de salto infinito).

Importante: Si x_0 no pertenece al $Dom(f)$, obviamente la función no es continua en x_0.

- **Asíntota vertical:** la recta $x = a$ es una asíntota vertical de una función $y = f(x)$ cuando alguno de los límites laterales de la función en $x = a$ es infinito ($+\infty$ o $-\infty$). Es decir:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad o \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

- **Asíntota horizontal:** la recta $y = b$ es una asíntota horizontal de una función $y = f(x)$ cuando alguno de los límites en el infinito de la función vale b. Es decir:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \qquad o \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$

- **Asíntota oblicua:** la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua de una función $y = f(x)$ cuando

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad y \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = n$$

2. Herramientas

2.1. Funciones elementales

Las funciones elementales que se estudian aquí son la función potencia, la función exponencial y la función logaritmo.

Función potencia

La función potencia de exponente $\alpha \in \mathbb{Q}$ asigna al número real $x \in D$ el número real x^α y se escribe:

$$f(x) = x^\alpha$$

El dominio de la función potencia depende del exponente α.

Ejemplo 2.1 *Hallar el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x^7$.

b) $f(x) = x^{-2}$.

c) $f(x) = x^{1/4}$.

d) $f(x) = x^{-1/2}$.

Solución

a) El exponente de esta función potencia es un número entero positivo por lo que $Dom(f) = \mathbb{R}$.

b) El exponente es un número entero negativo, por tanto

$$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

luego como el denominador no puede ser cero,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

c) Como el exponente es fraccionario se tiene que $f(x) = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$, luego la función consiste en dado$x$ encontrar el número real que elevado a 4 da x, por tanto $x \geq 0$ y

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

d) La función $f(x) = x^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tiene sentido cuando x es positivo y distinto de 0, luego $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Función exponencial

Sea $a > 0$. La aplicación que asigna a cualquier número real x el número $a^x > 0$ se llama función exponencial de base a y se escribe $f(x) = a^x$. Su dominio es $\mathbb{R}$.

La función exponencial de base el número e es la más utilizada y se escribe: $f(x) = e^x$ (el número real e vale aproximadamente $2,71828$...)

Función logaritmo

La aplicación que asigna a cada número real x positivo el único número real y que cumple $e^y = x$ se llama función logaritmo neperiano. Se escribe $f(x) = \ln x$ y su dominio es $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Importante:

$$e^{\ln x} = x \Leftrightarrow \ln(e^x) = x$$

Por tanto, todo número real a mayor que 0 se puede escribir como una potencia del número e:

$$a = e^{\ln a}$$

Ejemplo 2.2 *Se puede escribir:*

- $2 = e^{\ln 2}$.
- $2^{-3} = e^{-3\ln 2}$.
- $\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{1/2} = e^{1/2\ln\left(\frac{2}{5}\right)} = e^{1/2(\ln 2 - \ln 5)}$.

2.2. Operaciones con funciones

Dadas dos funciones reales de una variable real $f(x)$ y $g(x)$ se definen las siguientes operaciones:

- Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Producto por un número: Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- Producto: $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
- Inversa de una función $f(x) \neq 0$: $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.
- Cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \left(f\dfrac{1}{g}\right)(x) = f(x)\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando $g(x) \neq 0$.
- Composición: La composición de la función $f(x)$ con la función $g(x)$ es otra función, que se denota por $g \circ f$, que aplica la función f a la variable independiente x y al resultado le aplica g. Se escribe:

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ejemplo 2.3 *Hallar el dominio de las funciones siguientes:*

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{-2x+4}$.

b) $f(x) = \ln(3x-2)$.

c) $f(x) = \sqrt{-x^3+4x}$.

Solución

En la determinación del dominio de una función hay que tener presente si se trata de una potencia, de un cociente o de un logaritmo.

a) Por tratarse de un cociente, se podrán calcular las imágenes de los números reales que no anulen el denominador. Por tanto, se calculan los números reales que hacen cero el denominador:

$$-2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

y se tiene que:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : -2x + 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

b) El logaritmo neperiano tiene sentido siempre que se aplique a números reales mayores que cero:

$$3x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2/3$$

luego,

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\} = (2/3, +\infty)$$

c) La raíz cuadrada tiene sentido siempre que el radicando sea mayor o igual que 0:

$$-x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 2,\ x = -2,\ x = 0$$

Se estudia el signo de $-x^3 + 4x$ en cada uno de los intervalos que los puntos $x = 0$, $x = -2$ y $x = 2$ dividen la recta real $\mathbb{R}$, que es el dominio del polinomio. Luego:

$$Dom(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : -x^3 + 4x \geq 0\right\} = (-\infty, -2] \cup [0, 2]$$

Ejemplo 2.4 *La función* $h(x) = \ln(3x^2 + 7)$ *es el resultado de componer las funciones* $f(x) = 3x^2 + 7$ *y* $g(x) = \ln x$*; es decir,*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(3x^2 + 7) = \ln(3x^2 + 7)$$

Si en vez de componer f *con* g*, se realiza la composición de* g *con* f *se obtiene:*

$$(f \circ g)(x) = f(\ln x) = 3(\ln x)^2 + 7$$

que es una función distinta de $h(x)$*.*

Ejemplo 2.5 *La función* $h(x) = -2e^{3x^2+7}$ *es el resultado de componer las funciones* $f(x) = 3x^2 + 7$ *y* $g(x) = -2e^x$*; es decir,*

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(3x^2 + 7) = -2e^{3x^2+7}$$

2.3. Cálculo de límites

Propiedad

1. El límite de una función en un punto, si existe, es único.

2. El límite de una función $f(x)$ en x_0 es L si y solo si los límites laterales de la función $f(x)$ en el punto x_0 valen L.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \\ \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \end{cases}$$

¿Cómo se procede en el cálculo de límites?

- Si el punto x_0 donde se quiere calcular el límite de una función no pertenece al dominio de ésta pero, la función está definida en puntos x próximos a x_0, se calculan los límites laterales. El valor de los límites laterales que se obtienen sustituyendo en la expresión que la función tenga a la derecha o a la izquierda por x_0 y así se calculan los límites latarales a la derecha y a la izquierda de x_0.

- Si el punto x_0 pertenece al dominio de la función, se ha de tener en cuenta si la función cambia su definición dependiendo de que la variable independiente sea menor o mayor que x_0, o bien si la función se define igual a la derecha y a la izquierda del punto x_0. En el primer caso se tienen que calcular los límites laterales tal como se ha dicho en el apartado anterior y en el segundo caso el límite será la imagen por de x_0 utilizando la definición que la función tiene a la derecha o a la izquierda de x_0.

  Ejemplo 2.6

  $$\lim_{x\to 3} \left(x^3 - 2x - 8\right) = 13$$

  Ejemplo 2.7 *Sea la función*

  $$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

  El límite de esta función en 0*, si existe, se obtiene calculando los límites laterales:*

  $$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x - 1 = -1 \\ \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \end{cases}$$

luego la función no tiene límite en 0.

- El límite de una función f en el infinito ∞ se calcula sustituyendo la variable independiente x por ∞ y operando con el como si de un número se tratase, muy grande si se trata del límite en $+\infty$ o muy pequeño (muy negativo) si se trata del límite en $-\infty$.

  Ejemplo 2.8
  $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^3+2x+8\right)=+\infty$$

  Ejemplo 2.9
  $$\lim_{x\to-\infty}\left(x^3+2x+8\right)=-\infty$$

- Sea $f(x)$ una función tal que $f(x)\neq 0$ y con $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$, entonces
  $$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$$
  El numerador vale siempre 1 y el denominador está cada vez más cercano a cero, por tanto, el cociente se hace cada vez más positivo o negativo ($+\infty$ o $-\infty$). Igual si se trata de límites en el infinito.

  Ejemplo 2.10
  $$\lim_{x\to 0}\frac{-3}{x^2}=-\infty$$

- Cuando $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, el límite $\lim_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$. Igual si se trata de límites en el infinito.

- Pero al intentar calcular el límite de una función en un punto o en el infinito puede ocurrir que no obtengamos un resultado de modo directo, sino que se den algunas de las situaciones siguientes:
  - $(+\infty)+(-\infty)$.
  - $\infty\cdot 0$.
  - ∞/∞.
  - $0/0$.

(Las dos últimas situaciones se derivan de la segunda)

En estos casos hay que realizar algún cálculo o transformación adicional para obtener el valor del límite que se busca. Se trata de una indeterminación.

Dos de los procedimientos utilizados para resolver indeterminaciones son:

1. El límite de un polinomio en el infinito coincide con el límite en el infinito del término de mayor grado.
2. Si al realizar el límite en un punto de un cociente de polinomios resulta que el numerador tiene por límite 0 y el denominador también, entonces se factorizan ambos polinomios y se simplifica para eliminar la indeterminación.

Ejemplo 2.11 *Sean los límites*

$$\lim_{x\to -2} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to -2} g(x) = 1$$

Entonces:

a) *El límite* $\lim_{x\to -2} f(x)\,(g(x)-1)$ *es indeterminado porque al tener en cuenta los límites dados se obtiene* $(+\infty)\cdot 0$ *y no se conocen las funciones* $f(x)$ *y* $g(x)$.

Si estas funciones fueran conocidas habría que realizar algún cálculo para poder obtener el valor del límite.

b) *El límite* $\lim_{x\to -2} g(x)\,(f(x)+8) = +\infty$, *basta con tener en cuenta los límites dados y operar.*

c) *Igualmente el límite* $\lim_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{(g(x)-1)^2} = +\infty$.

Ejemplo 2.12 *Calcular los límites siguientes:*

a) $\lim_{x\to -2} x^2 + 3x - 1$.

b) $\lim_{x\to +\infty} -x^3 + 2x - 5$.

c) $\lim_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{x^2+2}{x}}$.

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{3}{x^2(1-x)}$.

e) $\lim_{x\to 3} \dfrac{(x-3)x}{-2(x-3)}$.

f) $\lim_{x\to 3} \dfrac{2}{\sqrt[3]{3x^2-2x+3}}$.

Solución

a) y c) Se trata de calcular el límite de una función en un punto de su dominio. El límite se obtiene sustituyendo en la función el valor del punto. Así se tiene:

$$\lim_{x\to -2} x^2+3x-1 = -3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{x^2+2}{x}} = \sqrt{3}$$

b) Se trata del límite de un polinomio en el infinito. Si se sustituye x por $+\infty$ se obtiene la indeterminación $-\infty+\infty$. En este caso para resolver la indeterminación se aplica que el límite en el infinito de un polinomio es igual al límite en el infinito del término de mayor grado. Por tanto:

$$\lim_{x\to +\infty} -x^3+2x-5 = \lim_{x\to +\infty} -x^3 = -\infty$$

NOTA: Este criterio se puede emplear casi siempre que se tenga que hacer un límite en el infinito donde haya un polinomio.

d) El punto $x=0$ no pertenece al dominio de la función, pero sí pertenecen los puntos próximos a 0. Como al sustituir x por 0 se obtiene que el denominador vale 0 y el numerador vale 3 el límite vale infinito.

$$\lim_{x\to 0} \frac{3}{x^2(1-x)} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty$$

e) El punto $x=3$ no pertenece al dominio de la función, pero al sustituir en la función tanto el numerador como el denominador de ésta, que son polinomios, se hacen cero. En estos casos para resolver la indeterminación se factoriza tanto numerador como denominador y se simplifica. Como en este límite numerador y denominador están factorizados, se tiene:

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x-3)x}{-2(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x}{-2} = -3/2$$

f) Teniendo en cuenta que el límite en el infinito de un polinomio coincide con el límite de su término de mayor grado se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{3x^2-2x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{3x^2}}$$

El límite del denominador de la función es $+\infty$ y el límite del numerador es 2, luego el límite que se pide vale 0:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{3x^2-2x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{3x^2}} = \left(\frac{2}{+\infty}\right) = 0$$

Ejemplo 2.13 *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si & x \leq -1 \\ -x^2 & si & -1 < x < 2 \\ -x-1 & si & x \geq 2 \end{cases}$$

Calcular, si existen, $\lim_{x\to-1} f(x)$, $\lim_{x\to2} f(x)$ *y* $\lim_{x\to4} f(x)$.

Solución

Para calcular el límite $\lim_{x\to-1} f(x)$ es necesario calcular los límites laterales puesto que la función se define de modo distinto a la derecha y a la izquierda de -1:

$$\begin{cases} \lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} 3x+2 = -1 \\ \lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} -x^2 = -1 \end{cases}$$

El límite de la función en $x = -1$ existe y vale -1.

Análogamente para calcular el límite $\lim_{x\to2} f(x)$ es necesario calcular los límites laterales puesto que la función se define de modo distinto a la derecha y a la izquierda de 2:

$$\begin{cases} \lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} -x^2 = -4 \\ \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} -x-1 = -3 \end{cases}$$

como los límites laterales son distintos el límite én $x = 2$ no existe.

Como a la derecha y a la izquierda de $x = 4$ la función se define igual no se tienen que realizar los límites laterales, luego:

$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4} -x-1 = -5$$

Propiedades de las funciones continuas

- La función potencia, exponencial y logarítmica son funciones continuas en sus dominios.

- La suma de funciones continuas es una función continua en su dominio.
- El producto de un número real por una función continua es continua en su dominio.
- El producto de funciones continuas es una función continua en su dominio.
- El cociente de funciones continuas es una función continua en su dominio.
- La composición de funciones continuas es una función continua en su dominio.

Ejemplo 2.14 *Estudiar la continuidad de la función* $f(x) = 3e^{2x-1}$.

Solución

- El dominio de esta función es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.
- Esta función es el resultado de componer la función $h(x) = 2x - 1$, que es continua en $\mathbb{R}$ por tratarse de un polinomio, y la función exponencial $g(x) = 3e^x$, que, también, es continua en $\mathbb{R}$.
- Luego la función $f(x) = (g \circ h)(x) = 3e^{2x-1}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.15 *Estudiar la continuidad de la función*

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & si \quad -3 \leq x \leq 1 \\ x^2 & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 9 & si \quad 3 < x \leq 7 \end{cases}$$

Solución

- El dominio de esta función es $[-3, 7]$.
- El límite lateral por la derecha de $x = -3$ vale

$$\lim_{x \to -3^+} -x + 3 = 6 = f(-3)$$

  Al coincidir con el valor de la función en este punto se dice que es continua a la derecha de $x = -3$.
- Si $x \in (-3, 1)$ la función es continua por tratarse de un polinomio.

- Si $x \in (1,3)$ la función es continua por tratarse de un polinomio.
- Ahora estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} -x+3 = 2 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1 \end{cases}$$

  Como los límites laterales de esta función en $x = 1$ son distintos la función no es continua en $x = 1$.

- Si $x \in (3,7)$ la función es continua por ser una función constante (polinomio).
- Continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} x^2 = 9 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 9 = 9 \end{cases}$$

  entonces $\lim_{x\to 3} f(x) = 9 = f(3)$, es decir es continua en $x = 3$.

- La función es continua por la izquierda de $x = 7$ puesto que

$$\lim_{x\to 7^-} 9 = 9 = f(7)$$

- La función es continua en $[-3,1) \cup (1,7]$.

3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1 *Determinar el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = -7x^3 + 5x - 5$.

b) $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{3-7x}$.

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x}{x^2-1}}$.

f) $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+4x-5}$.

Solución

a) Por tratarse de un polinomio su dominio es $\mathbb{R}$.

b) Por tratarse de un logaritmo, éste solo se puede calcular de números positivos, pero $3x^2 + 1$ es siempre positivo para cualquier valor real que tome la variable independiente x, luego $Dom(f) = \mathbb{R}$.

c) Por tratarse de un cociente, el dominio será el conjunto de números reales que no anulen el denominador:

$$3 - 7x = 0 \Leftrightarrow x = 3/7$$

Luego $Dom(f) = \mathbb{R} - \{3/7\}$.

d) El radicando debe ser positivo o cero por tanto hay que resolver la inecuación $x^2 - 1 \geq 0$. La solución de esta inecuación es

$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

que es el dominio de la función y se escribe:

$$Dom(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

e) Se podrán calcular las imágenes de los números reales que hacen que el radicando sea positivo o cero, pero como el radicando es un cociente, éste podrá calcularse siempre y cuando el denominador sea distinto de cero. Por tanto en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, que es donde no se anula el denominador, hay que ver qué números reales x hacen que la fracción $\dfrac{2x}{x^2 - 1}$ sea mayor o igual que cero.

La fracción vale cero cuando el numerador es cero, en este caso cuando $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Por tanto hay que estudiar el signo de la fracción en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. Se tiene:

- Si $x \in (-\infty, -1)$, $\dfrac{2x}{x^2 - 1} < 0$.
- Si $x \in (-1, 0)$, $\dfrac{2x}{x^2 - 1} > 0$.
- Si $x \in (0, 1)$, $\dfrac{2x}{x^2 - 1} < 0$.
- Si $x \in (1, +\infty)$, $\dfrac{2x}{x^2 - 1} > 0$.

Luego $Dom(f) = (-1, 0] \cup (1, +\infty)$.

f) Por tratarse de un cociente de polinomios, no se podrán calcular las imágenes de los números reales que anulan el denominador

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5$$

Por tanto el dominio de la función es:

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, x \neq -5\} = \mathbb{R} - \{1, -5\}$$

Ejercicio 2 *Escribir el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt[5]{2x^3 + 1}$.

b) $f(x) = e^{\frac{2x-1}{x}}$.

c) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

d) $f(x) = \ln(2x^2 - 6)$.

Solución

a) Por tratarse de una raíz quinta, el radicando puede ser cualquier número real. Por tanto el dominio de esta función es $\mathbb{R}$.

b) Por tratarse de una función exponencial, su dominio será donde tenga sentido la función exponente. Como en el exponente hay un cociente, el dominio será el conjunto de números reales que no anulen su denominador, es decir $x \neq 0$, luego $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) Por tratarse de un logaritmo, éste debe tomarse de números positivos, pero $x^2 + 1$ tiene siempre un valor positivo para cualquier valor de x, por tanto $Dom(f) = \mathbb{R}$.

d) Por tratarse de un logaritmo, éste debe tomarse de números positivos, como

$$2x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$$

se tiene que

- Si $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \bigcup (\sqrt{3}, +\infty)$, $2x^2 - 6 > 0$.
- Si $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $2x^2 - 6 < 0$.

luego $Dom(f) = \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \bigcup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$.

Ejercicio 3 *Calcular los límites siguientes:*

a) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2-1}$.

b) $\lim_{x\to -\infty} -2x^4+7x-5$.

c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{3x+2}{4x}$.

d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{3}{x^2(1-x)^2}$.

e) $\lim_{x\to -3} \dfrac{(x+3)^2x}{-2(x+3)}$.

f) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Solución

a) y c) Como son límites de una función en un punto que pertenece al dominio de la función, para calcularlo basta con sustituir en la función la variable independiente por este punto. Se tiene:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^2-1} = \sqrt{3} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 3} \frac{3x+2}{4x} = \frac{11}{12}$$

b) El límite de un polinomio en el infinito es igual al límite del término de mayor grado en el infinito:

$$\lim_{x\to -\infty} -2x^4+7x-5 = \lim_{x\to -\infty} -2x^4 = -\infty$$

d) El número $x=1$ no pertenece al dominio de la función, pero sí pertenecen los números reales próximos. Al sustituir x por 1, el denominador vale 0 y el numerador vale 3. Luego, el límite es infinito.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3}{x^2(1-x)^2} = \left(\frac{3}{0^+}\right) = +\infty$$

e) El punto $x=-3$ no pertenece al dominio de la función, pero tanto el numerador como el denominador se hacen cero. En estos casos se factoriza tanto numerador como denominador y se simplifica. Se tiene:

$$\lim_{x\to -3} \frac{(x+3)^2x}{-2(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)x}{-2} = 0$$

f) Teniendo en cuenta que el límite en el infinito de un polinomio coincide con el límite del término de mayor grado de dicho polinomio, se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \left(\frac{1}{+\infty}\right) = 0$$

Ejercicio 4 *Escribir el significado de los límites siguientes para sus correspondientes funciones:*

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 4$.

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x) + 2x = 3$.

d) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ *y* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

e) $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$.

f) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Solución

a) La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de la función, es decir, conforme la variable independiente aumenta, sus imágenes se van aproximando al número 2.

b) La recta $y = 4$ es una asíntota horizontal de la función. En este caso lo que ocurre es que conforme la variable independiente se hace más negativa sus imágenes se van aproximando a 4.

c) La recta $y = -2x + 3$ es asíntota oblicua de la función $f(x)$, es decir conforme la variable independiente x se hace más pequeña (más negativa) sus imágenes se van aproximando a la recta $y = -2x + 3$.

d) La recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la función. Conforme la variable independiente se acerca a 0 tanto por la derecha como por la izquierda, sus imágenes se hacen cada vez más grandes.

e) La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la función. Conforme la variable independiente se acerca a 0 por la izquierda (es decir, con valores menores que -1), sus imágenes se hacen cada vez más pequeñas (negativas).

f) Este límite nos dice que cuando la variable x es muy grande (muy positiva) la función se hace muy grande por lo que no tiene una asíntota horizontal.

Ejercicio 5 *Un artículo se vende a distinto precio según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:*

- *a 12 euros/kg si* $0 \leq x < 5$
- *a 10 euros/kg si* $5 \leq x < 10$
- *a 9 euros/kg si* $10 \leq x < 20$
- *a 5 euros/kg si* $x \geq 20$

donde x es el peso en kg de la cantidad comprada.

a) Escribir la función que represente el precio del artículo.

b) Estudiar la continuidad de esta función.

Solución

a) La función que representa el precio del artículo en función de la cantidad comprada es:

$$p(x) = \begin{cases} 12 & \text{si} \quad 0 \leq x < 5 \\ 10 & \text{si} \quad 5 \leq x < 10 \\ 9 & \text{si} \quad 10 \leq x < 20 \\ 5 & \text{si} \quad x \geq 20 \end{cases}$$

b) El dominio de la función es el conjunto de todos los números reales x tales que $x \geq 0$. En los intervalos $(0,5) \cup (5,10) \cup (10,20) \cup (20,+\infty)$ la función es continua porque en cada uno de ellos la función es constante. Queda estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = 5$, $x = 10$ y $x = 20$, y a la derecha de $x = 0$.

- En $x = 0$:

$$\left. \lim_{x \to 0^+} p(x) = 12 = p(0) \right\} \Rightarrow \text{ la función es continua a la derecha de } x = 0.$$

- En $x = 5$:

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 5^-} p(x) = 12 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x \to 5^+} p(x) = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ en } x = 5 \text{ la función no es continua.}$$

- En $x = 10$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 10^-} p(x) = 10 \\ \\ \lim\limits_{x\to 10^+} p(x) = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{en } x = 10 \text{ la función no es continua.}$$

- En $x = 20$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 20^-} p(x) = 9 \\ \\ \lim\limits_{x\to 20^+} p(x) = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{en } x = 20 \text{ la función no es continua.}$$

Por tanto, $p(x)$ es continua en $[0,5) \cup (5,10) \cup (10,20) \cup (20,+\infty)$.

Ejercicio 6 *Estudiar la continuidad en $x = 0$ de la función*

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & si \quad x \leq 0 \\ 5x^2 + 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} 3x + 2 = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} 5x^2 + 2 = 2 \end{cases}$$

luego $\lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$ y por tanto esta función es continua en $x = 0$.

Ejercicio 7 *Determinar el dominio y las asíntotas de la función*

$$f(x) = \frac{2x - 3}{2x^2 + 4x - 6}$$

Solución

Dominio: es posible realizar este cociente siempre que el denominador sea un número real distinto de cero. Por tanto como

$$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ o } x = 1.$$

el dominio es $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

- Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím}_{x\Rightarrow -3^-} \dfrac{2x-3}{2x^2+4x-6} = -\infty \\[2ex] \text{lím}_{x\to -3^+} \dfrac{2x-3}{2x^2+4x-6} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3 \text{ es asíntota vertical de la función.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{lím}_{x\to 1^-} \dfrac{2x-3}{2x^2+4x-6} = +\infty \\[2ex] \text{lím}_{x\to 1^+} \dfrac{2x-3}{2x^2+4x-6} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \text{ es asíntota vertical de la función.}$$

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-6}{2x^2+4x-6} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ es asíntota horizontal de la función.}$$

- No tiene asíntotas oblicuas.

Ejercicio 8 *Si* $\text{lím}_{x\to x_0} f(x) = -2$ *y* $\text{lím}_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, *hallar:*

a) $\text{lím}_{x\to x_0} 2f(x) + g(x)$.

b) $\text{lím}_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)$.

c) $\text{lím}_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

d) $\text{lím}_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

e) $\text{lím}_{x\to x_0} \dfrac{g(x)}{(f(x)+2)^2}$.

f) $\text{lím}_{x\to x_0} \dfrac{-1}{(f(x)+2)^2}$.

g) $\text{lím}_{x\to x_0} (f(x)+2)\, g(x)$.

Solución

Aplicando las reglas que se han dado en el cálculo de límites se obtiene:

a) $\lim_{x \to x_0} 2f(x) + g(x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = -\infty$.

c) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

d) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

e) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{(f(x)+2)^2} = +\infty$.

f) $\lim_{x \to x_0} \dfrac{-1}{(f(x)+2)^2} = -\infty$.

g) $\lim_{x \to x_0} (f(x)+2)\, g(x) = \textit{indeterminado}$.

En este caso sería preciso conocer las funciones para poder realizar los cálculos necesarios y obtener el valor del límite.

Ejercicio 9 *Dada la función*

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x < 2 \\ x+3 & si \quad x > 2 \\ 3 & si \quad x = 2 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad en su dominio y en el caso de que exista algún tipo de discontinuidad, decir de qué tipo de discontinuidad se trata.

Solución

Si $x \in (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ la función es continua por tratarse de un polinomio en cada intervalo. Hay que estudiar lo que ocurre en $x = 2$, siendo $f(2) = 3$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x + 2 = 4$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x + 3 = 5$$

como los límites laterales son distintos, el límite de la función en $x = 2$ no existe. La función no es continua en $x = 2$. Se trata de una discontinuidad de salto finito.

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 *Determinar el dominio de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \dfrac{3x+2}{3x^2+12}$.

b) $f(x) = \dfrac{3x+2}{4-2x}$.

c) $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{3x-1}}$.

d) $f(x) = \sqrt{3x-1}$.

e) $f(x) = \sqrt[3]{3x-1}$.

f) $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt[3]{3x-1}}$.

g) $f(x) = \ln(x^2-4)$.

h) $f(x) = \ln(3x^4)$.

i) $f(x) = \dfrac{3x-4}{\ln(5x-9)}$.

Solución

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

b) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

c) $Dom(f) = (1/3, +\infty)$.

d) $Dom(f) = [1/3, +\infty)$.

e) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

f) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{1/3\}$.

g) $Dom(f) = (-\infty, -2) \bigcup (2, +\infty)$.

h) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

i) $Dom(f) = \left(\dfrac{9}{5}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

Ejercicio 2 *Sean las funciones* $f(x) = 3\ln x$ *y* $g(x) = 3x^2 + 2x$. *Calcular:*

a) $f \circ g$.

b) $g \circ f$.

c) $g \circ g$.

d) $f \circ f$.

Solución

a) $3\ln(3x^2+2x)$.

b) $27(\ln x)^2 + 6\ln x$.

OPEN COURSEWARE
UNIVERSIDAD DE MURCIA

c) $(3x^2+2x)(9x^2+6x+2)$. d) $3\ln(3(\ln x))$.

Ejercicio 3 *Si* $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$ *y* $\lim_{x\to -1} g(x) = +\infty$, *calcular:*

a) $\lim_{x\to -1}(-2)f(x)+g(x)$. *b)* $\lim_{x\to -1}(-3)f(x)\cdot g(x)$.

c) $\lim_{x\to -1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. *d)* $\lim_{x\to -1}\dfrac{2x^3}{f(x)}$.

e) $\lim_{x\to -1}\dfrac{1}{(f(x)\cdot g(x))^2}$. *f)* $\lim_{x\to -1}\dfrac{-g(x)+3}{(f(x)+2)^2}$.

Solución

a) $+\infty$. b) $+\infty$. c) indeterminado.

d) 0. e) 0. f) indeterminado.

Ejercicio 4 *La temperatura, en grados centígrados, de un objeto viene dado por la función:*

$$f(t) = 10\left(\frac{t^2+3t+4}{t^2+5}\right).$$

Donde t es el tiempo en horas. Calcular la temperatura inicial, la temperatura cinco horas más tarde y la temperatura que puede alcanzar el objeto si se deja transcurrir mucho tiempo.

Solución

La temperatura inicial es de 8 grados centígrados, cinco horas más tarde es de 14,67 grados centígrados y cuando transcurre mucho tiempo se estabiliza en torno a 10 grados centígrados.

Ejercicio 5 *Estudiar la continuidad de la función siguiente en $x=0$ y en $x=1$*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3x-2 & si \quad x\le 0 \\ -2 & si \quad 0<x\le 1 \\ x^2+4x-7 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Solución

La función es continua en $x = 0$ y en $x = 1$.

Ejercicio 6 *Sea la función* $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$. *Decir el significado de los límites* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

Solución

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical de la función $f(x)$ y la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función cuando los valores de la variable independiente se hacen muy negativos.

Ejercicio 7 *Calcular* a, b, c *y* d *para que la función* $f(x)$ *sea continua en su dominio:*

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & si \quad x < 2 \\ 3x - a & si \quad 2 \leq x < 3 \\ b & si \quad 3 \leq x < 5 \\ -x + c & si \quad 5 \leq x < 7 \\ d & si \quad 7 \leq x \end{cases}$$

Solución

La función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $a = 5$, $b = 4$, $c = 9$ y $d = 2$.

Ejercicio 8 *Determinar el valor de los parámetros* a *y* b *para que la función siguiente sea continua en su dominio:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + a & si \quad x \leq 0 \\ 3x + b & si \quad 0 < x < 1 \\ 4 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

$a = b = 1$.

Ejercicio 9 *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2a & si \quad x \leq 1 \\ 3 & si \quad 1 < x \leq 2 \\ bx - 1 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de esta función cuando *i)* $a = 2$ *y* $b = 1$.

ii) $a = 1$ *y* $b = 2$.

iii) $a = -2$ *y* $b = 2$.

Solución

i) Continua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

ii) Continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

iii) Continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 10 *Estudiar la continuidad de la función:*

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & si \quad x \leq 1 \\ 3x - 2 & si \quad 1 < x \leq 4 \\ 1 - x & si \quad x > 4 \end{cases}$$

Solución

La función es continua en $\mathbb{R} - \{4\}$. En $x = 4$ la función tiene una discontinuidad de salto finito.