Matrices y Sistemas Lineales

Álvarez S., Caballero M.V. y Sánchez MªM

salvarez@um.es, m.victori@um.es, marvega@um.es

Índice

1. Definiciones

1.1. Matrices

- **Matriz:** una matriz de orden $m \times n$ es un conjunto ordenado de número reales dispuestos en m filas y n columnas de esta manera:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

  donde a_{ij} es el elemento que pertenece a la fila i y a la columna j , llamado elemento general de la matriz A. La matriz se denota $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

- **Matriz cuadrada:** matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas y se escribe $A = (a_{ij})_n$.

  Ejemplo 1.1 *Las siguientes son matrices cuadradas:*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Diagonal principal de una matriz cuadrada:** dada $A = (a_{ij})_n$, la diagonal principal de A está formada por los elementos de A de la forma $a_{ii}, i = 1, 2, ..., n$.

  Ejemplo 1.2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz identidad:** todos los elementos de su diagonal principal son iguales a 1 y el resto son 0. Se denota por I.

  Ejemplo 1.3 *La matriz identidad de orden 2, 3 y 4 son, respectivamente:*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- **Matriz escalonada:** matriz tal que, en caso de existir filas cuyos elementos son todos cero están en la parte inferior de la matriz, y en el resto de filas, el primer elemento no nulo de cada fila, llamado pivote, está a la derecha del pivote de la fila anterior (esto es, todos los elementos debajo de un pivote son 0).

  Ejemplo 1.4 *Las siguientes matrices son escalonadas:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

- **Matriz inversa:** Dada una matriz cuadrada A de orden n, se llama inversa de A a una matriz cuadrada A^{-1} de orden n que verifica:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

  siendo I la matriz identidad.

  Ejemplo 1.5

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ \emph{es la matriz inversa de} } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{\emph{porque}}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = I.$$

- **Matriz traspuesta:** Dada una matriz $A = (a_{ij})_{i=1,2,...m;j=1,2,...,n}$ se llama matriz traspuesta de A y se denota por A' o A^t a la matriz de orden $n \times m$ siguiente $A^t = (a'_{ij})_{i=1,2,..,n;j=1,2,..,m}$ tal que $a'_{ij} = a_{ji}$ $\forall i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., m$.

Ejemplo 1.6

$$A^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es la matriz traspuesta de } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. Sistemas lineales

- **Sistema lineal:** Un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas se escribe:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

donde a_{ij} y x_j, con $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$, representan los coeficientes y las incógnitas del sistema lineal, respectivamente.

La matriz asociada a este sistema lineal es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.7 *El sistema*

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 6 \\ y + 2z &= 3 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

es un sistema lineal y su matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Sistema lineal escalonado:** aquel cuya matriz asociada es escalonada.

- **Solución de un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas:** conjunto de números reales $c_1, c_2, ..., c_n$ que al sustituir cada incógnita x_i por c_i $i = 1, 2, ..., n$, verifica cada una de las m ecuaciones.

- **Sistemas lineales equivalentes:** dos sistemas lineales son equivalentes cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.
- **Sistema lineal compatible determinado:** aquel que tiene una única solución.
- **Sistema lineal compatible indeterminado:** aquel que tiene más de una solución.
- **Sistema lineal incompatible:** aquel que no tiene solución.

2. Herramientas

2.1. Operaciones elementales

Se llaman operaciones elementales entre las filas (o columnas) de una matriz a las siguientes:

- Cambiar entre sí dos filas (columnas): se representa por $F_i \leftrightarrow F_j$, donde F_i y F_j son dos filas de la matriz ($C_i \leftrightarrow C_j$, donde C_i y C_j son dos columnas de la matriz).
- Multiplicar una fila (columna) por un número real distinto de cero: se representa por $F_i \to kF_i$ ($C_i \to kC_i$).
- Sumar a una fila (columna) otra fila (columna) multiplicada por un número real k: se representa por $F_i \to F_i + kF_j$ ($C_i \to C_i + kC_j$).

Importante: Toda matriz se puede trasformar en una matriz escalonada mediante operaciones elementales.

Ejemplo 2.1 *Transformar la matriz A en una matriz escalonada mediante operaciones elementales:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La secuencia de operaciones elementales en las filas son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -6 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.2. Obtención de la matriz inversa

Para obtener la matriz inversa de A, se considera la matriz $(A\,|I\,)$ y se realizan operaciones elementales solo en las filas hasta llegar a la matriz $(I\,|A^{-1})$. También se puede considerar la matriz $\begin{pmatrix} A \\ -- \\ I \end{pmatrix}$ y mediante operaciones elementales sólo en las columnas llegar a $\begin{pmatrix} I \\ -- \\ A^{-1} \end{pmatrix}$.

Ejemplo 2.2 *Calcular la matriz inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
La secuencia de operaciones elementales en las filas son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \to 4F_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{4}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longrightarrow F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \to -F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz inversa de A *es*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.3 *Calcular la matriz inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
La secuencia de operaciones elementales en las columnas son:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to 2C_1} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_2} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1 \to \frac{1}{5}C_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2/5 & 0 \\ 1/5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2/5 & -2/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \to \frac{1}{2}C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

2.3. Suma y producto de matrices

- **Suma de matrices:** Dadas las matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden $m \times n$, se puede realizar la suma $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. La suma de matrices cumple las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro y elemento simétrico.

Ejemplo 2.4 *Dadas*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

calcular $A + B$:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3 & (-3)+6 & 0+4 \\ 1+1 & 0+0 & 2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **Producto de matrices:** Dadas dos matrices A, de orden $m \times p$, y B, de orden $p \times n$, es posible realizar el producto de A por B, AB, de orden $m \times n$. El producto de A por B, AB, está definido si y sólo si el número de columnas de A (la matriz a la izquierda en el producto) coincide con el número de filas de B (la matriz a la derecha en el producto), en este caso se dice que las matrices son conformes para el producto. El producto de matrices (cuando es posible) cumple la propiedad asociativa y la propiedad distributiva respecto de la suma de matrices.

Ejemplo 2.5 *Dadas*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

calcular AB si es posible:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ (-5) \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) & (-5) \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -19 & -18 \end{pmatrix}$$

¡Importante!: El producto de matrices NO cumple, en general, la propiedad conmutativa.

Ejemplo 2.6 *Dadas las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

calcular AB y BA, si es posible:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 13 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 \\ 36 & 8 & -4 \\ -5 & -2 & -19 \end{pmatrix}.$$

2.4. Solución de un sistema lineal por reducción

- Clasificación de un sistema escalonado: Sea un sistema lineal escalonado de m ecuaciones y n incógnitas. Según sea la matriz asociada a este sistema escalonado, el sistema es

  a) Incompatible: si la última fila no nula de la matriz escalonada es de la forma:

  $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{pmatrix}$$

  con $b \neq 0$ (es decir, la matriz escalonada tiene un pivote en la columna de los términos independientes).

b) Compatible indeterminado: si la última fila no nula de la matriz escalonada es

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_i & \cdots & a_n & b \end{pmatrix}$$

con $i \leq n-1$ y $a_i \neq 0$ o bien

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n & b \end{pmatrix}$$

con $a_n \neq 0$ y $m' < n$, siendo m' el número de filas no nulas de la matriz escalonada (es decir, el número de pivotes de la matriz escalonada asociada al sistema es menor que el número de incógnitas).

c) Compatible determinado: si la última fila no nula de la matriz escalonada es

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n & b \end{pmatrix}$$

con $a_n \neq 0$ y $m' = n$ (es decir, el número de pivotes de la matriz asociada es igual al número de incógnitas).

Ejemplo 2.7 *El sistema escalonado*

$$\begin{aligned} x_1 + \tfrac{5}{2}x_4 &= 4 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 &= 1 \end{aligned}$$

es compatible indeterminado porque su matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

- Dado un sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas, su correspondiente matriz, que es de orden $m \times (n+1)$, se puede transformar mediante operaciones elementales en una matriz escalonada, que es la matriz asociada a un sistema lineal escalonado equivalente al de partida.

- Clasificar un sistema lineal consiste en clasificar un sistema escalonado equivalente. Por tanto:

  - Si el resultado de la realización de operaciones elementales en la matriz de un sistema lineal es una matriz escalonada correspondiente a un sistema lineal escalonado compatible determinado, el sistema original es compatible determinado.

- Si se ha obtenido un sistema escalonado compatible indeterminado, entonces el sistema de partida es compatible indeterminado.
- Si el sistema escalonado es incompatible, el inicial es incompatible.

- Resolver un sistema lineal consiste en resolver un sistema escalonado equivalente al dado.

Ejemplo 2.8 *Para resolver el sistema lineal*

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -1 \\ 2x + y &= 5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

se realizan operaciones elementales en su correspondiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \to -2F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to -2F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema inicial es compatible determinado porque un sistema escalonado equivalente lo es. Su única solución es $x = 4$ y $y = -3$.

Ejemplo 2.9 *Para resolver el sistema lineal*

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 6 \\ y + 2z &= 3 \\ x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

se realizan operaciones elementales en su correspondiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

El sistema inicial es incompatible porque un sistema escalonado equivalente lo es.

3. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1 *Transformar cada una de las siguientes matrices en una matriz escalonada:*

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\2&-1&-3&2\\4&1&-15&-4\end{pmatrix}$$

$$c)\ C=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\4&3&-1&6\\1&2&11&5\end{pmatrix}\qquad d)\ D=\begin{pmatrix}3&2&-4\\2&-4&-10\\5&6&-3\end{pmatrix}.$$

Solución

a)

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2+F_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3+(1/2)F_2}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3/2\end{pmatrix}.$$

b)

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\2&-1&-3&2\\4&1&-15&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[F_2\to F_2-2F_1]{F_3\to F_3-4F_1}\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\0&3&-9&-8\\0&9&-27&-24\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3-3F_2}\begin{pmatrix}1&-2&3&5\\0&3&-9&-8\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

c)

$$C=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\4&3&-1&6\\1&2&11&5\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to F_3-F_1]{F_2\to F_2-4F_1}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-1&-9&-6\\0&1&9&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3+F_2}\begin{pmatrix}1&1&2&3\\0&-1&-9&-6\\0&0&0&-4\end{pmatrix}.$$

d)

$$D=\begin{pmatrix}3&2&-4\\2&-4&-10\\5&6&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3\to 3F_3-5F_1]{F_2\to 3F_2-2F_1}\begin{pmatrix}3&2&-4\\0&-16&-22\\0&8&11\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + (1/2)F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & -16 & -22 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2 *Calcular la matriz inversa de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Se considera la matriz

$$(A\,|I\,) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se transforma con el objetivo de llegar a $(I\,|A^{-1}\,)$, según la secuencia de operaciones elementales en las filas que se indican:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + 3F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \longrightarrow -F_2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to (1/2)F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 *Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ¿Es B la inversa de A?*

Solución

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, efectivamente, B es la matriz inversa de A.

Ejercicio 4 *Calcular la matriz inversa de la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución

Se considera la matriz

$$(A\,|I\,) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se transforma para llegar a $(I\,|A^{-1})$, según la secuencia de operaciones elementales en las filas que se indican:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + (3/7)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to (-1/7)F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to (-1/6)F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1/7 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/42 & 11/42 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/42 & 11/42 & 1/6 \\ 2/7 & -1/7 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5 *Sean las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz X que verifica la ecuación matricial

$$3X + 2A = 6B - 4A + 3C.$$

Solución

$$3X + 2A = 6B - 4A + 3C$$
$$3X = 6B - 6A + 3C$$
$$X = 2B - 2A + C$$
$$X = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$X = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6 *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

calcular dos números reales x e y tales que se verifique que $A + xA + yI = 0$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

Solución

La ecuación $A + xA + yI = 0$ se escribe

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y realizando las operaciones, se llega a

$$\begin{pmatrix} 2+2x+y & 1+x \\ 2+2x & 3+3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igualando las matrices se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{c} 2+2x+y=0 \\ 1+x=0 \\ 2+2x=0 \\ 3+3x+y=0 \end{array}\right\}$$

que hay que resolver. La segunda y tercera ecuación son equivalentes, pues la tercera es el doble de la segunda, y de ellas se obtiene que $x = -1$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones primera y tercera, se tiene que $y = 0$.

Ejercicio 7 *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

encontrar una matriz B tal que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

Se escribe la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix}$$

e igualando esta matriz a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{c} a-2c=1 \\ b-2d=0 \\ -a+c=1 \\ -b+d=1 \end{array}\right\}.$$

Se despeja c en la tercera ecuación y se obtiene $c = 1 + a$. Sustituyendo c en la primera ecuación resulta $a - 2(1 + a) = 1$, esto es, $-a - 2 = 1$, de donde $a = -3$ y, en consecuencia, $c = -2$. Por otro lado, despejando d en la cuarta ecuación y sustituyendo en la segunda ecuación, resulta sencillo obtener que $b = -2$ y $d = -1$. Luego la matriz buscada es

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Otra manera de hacerlo es calculando la matriz inversa de A. Despejando la matriz B se obtendrá:

$$B = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular A^{-1} se realizan transformaciones elementales en las filas de la matriz

$$(A\,|I\,) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con el objetivo de llegar a $(I\,|A^{-1})$, según la secuencia de operaciones elementales que se indican:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to -2F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la matriz inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8 *Sean las matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular los valores de a y b para que $AB = BA$.

Solución

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+2 & 2b \end{pmatrix}$$
$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

como $AB = BA$ se tiene que

$$\begin{array}{ccc} a & = & a+2b \\ b & = & b \\ 2a+2 & = & 2 \\ 2b & = & 0 \end{array}$$

de donde, $a = -\dfrac{2}{3}$ *y* $b = 0$.

Ejercicio 9 *Despejar la matriz* X *en la ecuación* $3X - B^t = AX$*, siendo* A *una matriz cuadrada de orden 3 y* B *una matriz de orden* 2×3. *En particular, si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces calcular X.

Solución

Primero se resuelve la ecuación:

$$3X - B^t = AX \Leftrightarrow 3X - AX = B^t \Leftrightarrow (3I - A)X = B^t \Leftrightarrow X = (2I - A)^{-1}B^t.$$

Para las matrices dadas,

$$3I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

y mediante operaciones elementales, se obtiene que

$$(3I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 & -1/7 \\ 2/7 & 1/7 & 2/7 \\ 6/7 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$X = (3I - A)^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 1/7 & 3/7 & -1/7 \\ 2/7 & 1/7 & 2/7 \\ 6/7 & 3/7 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4/7 \\ 4/7 & 1/7 \\ 1 & -1/7 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 10 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

a) $A + \frac{1}{2}C^t$.

b) BA.

c) $2CB + A^t$.

Solución

a)

$$A + \frac{1}{2}C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -3/2 \\ 7/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

c)

$$2CB + A^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 19 \\ -5 & -8 \\ 19 & 25 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 11 *Calcular AB y BA, siendo:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Se pueden encontrar matrices C y D para las que existan los productos ACB y BDA?

Solución

Primero se calculan AB y BA:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El producto ACB se puede realizar si C es una matriz de orden 3×3, pues el número de filas de C debe coincidir con el número de columnas de A, para que sea posible el producto AC ,que será una matriz $3 \times n$, con n el número de columnas de C. El número de sus columnas de C tiene que ser igual al número de filas de B para que sea posible el producto $(AC)B$.

Análogamente, el producto BDA existe si D es de orden 2×2.

Ejercicio 12 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobar:

a) $(A + B)C = AC + BC$.

b) $(AB)^t = B^t A^t$.

c) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$.

d) $(AB + A) = A(B + I)$, *siendo I la matriz identidad de orden 2.*

e) $(BA + A) = (B + I)A$, *siendo I la matriz identidad de orden 2.*

Solución

a) $(A+B)C = AC + BC$.

$$(A+B)C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

b) $(AB)^t = B^t A^t$.

$$(AB)^t = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$.

$$(A-B)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + B^2 - AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 +$$

$$+ \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) $(AB + A) = A(B + I)$.

$$(AB+A) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A(B+I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) $(BA + A) = (B + I)A$.

$$(BA+A) = \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(B+I)A = \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13 *Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema lineal:*

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 5 \\ 2x-y+z & = & 0 \\ -x-y+z & = & -1 \\ 3y-z & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Solución

Se realizan operaciones elementales en la matriz del sistema lineal para obtener la matriz de un sistema escalonado equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

El sistema inicial es incompatible porque un sistema escalonado equivalente lo es.

Ejercicio 14 *Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema lineal:*

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y + z & = & 5 \\ 2x - y + z & = & 0 \\ -x - y + z & = & -1 \\ 3y - z & = & 6 \end{array}\right\}.$$

Solución

Se realizan operaciones elementales en las filas de la matriz del sistema lineal para obtener la matriz de un sistema escalonado equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_1]{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 \to F_4 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema dado es compatible determinado puesto que un sistema escalonado equivalente es compatible determinado y éste se escribe:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y + z & = & 5 \\ -3y - z & = & -10 \\ -2z & = & -4 \end{array}\right\}$$

cuya solución es $z = 2$, $y = 8/3$ *y* $x = 1/3$, *que es la solución del sistema inicial.*

Ejercicio 15 *Discutir y resolver, si es posible, el siguiente sistema lineal:*

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y + z & = & 5 \\ 2x - y + z & = & 0 \\ x - 2y & = & -5 \end{array}\right\}.$$

Solución

Se realizan operaciones elementales en la matriz del sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ ]{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El sistema es compatible indeterminado por serlo un sistema escalonado equivalente al dado.

Este sistema escalonado se escribe:

$$\left.\begin{array}{rcr} x + y + z & = & 5 \\ -3y - z & = & -10 \end{array}\right\}$$

luego, la solución del sistema dado es: $z = -3y + 10$, $x = 2y - 5$ *con* $y \in \mathbb{R}$.

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 *Dadas las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

a) $A + \frac{1}{2}C^t$.

b) BA.

c) $2CB + A^t$.

Solución

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -3/2 \\ 7/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 18 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 12 & 19 \\ -5 & -8 \\ 19 & 25 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2 *Sean las matrices:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular:

a) $AC + 2B^t$.

b) $4CB + A$.

c) $3C^t - \frac{1}{2}B$.

d) $(BA)C$.

Solución

a) $\begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 9 & 11 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 55 & 71 & 52 \\ -14 & -17 & -11 \\ 24 & 15 & -6 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 15/2 & -4 & 13/2 \\ 23/2 & -9/2 & -2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 35 & 48 \\ 45 & 32 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *Hallar las matrices* $B_{2\times 2}$, *tales que:*

a) $AB = 0$.

b) $AB = BA = 0$.

Solución

a) $\begin{pmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$. *b)* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ -2a & 0 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 *Determinar la inversa de las siguientes matrices:*

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

c) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}.$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & -3/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$

Ejercicio 5 *Decir si los siguientes sistemas son o no lineales:*

a)

$$\begin{aligned} x + 5y - z &= 8 \\ -x + z &= 3 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} e^y x + 4z^2 &= 1 \\ 5x + yz &= 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Solución

a) y c) sí lo son, b) no.

Ejercicio 6 *Resolver los siguientes sistemas lineales (cuando sea posible):*

a)

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 3 \\ -y + z &= -1 \\ x + z &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 12 \\ 2x + y + z &= 9 \\ x + y + z &= 6 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ 4x + 2y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ x - 3y &= -5 \\ 3x + y &= 5 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 2x - z &= 0 \\ 3x - y - z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 10 \\ 4x + 5y - 2z &= 13 \\ x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 20 \\ x + y - 3z &= 0 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= 2 \\ x - 3y + 6z &= 3 \end{aligned}$$

Solución

a) $x = 1,\ y = 0,\ z = -1.$

b) $x = 3,\ y = 2,\ z = 1.$

c) $x = -\dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2},\ z = 0.$

d) $x = 1,\ y = 2.$

e) $x = y$, $z = 2y$.

f) $x = 3z + 2$, $y = 1 - 2z$.

g) $x = 8$, $y = 7$, $z = 5$.

h) *Sistema incompatible.*

i) $x = 3/5$, $y = 4/5$, $z = 0$.