OPEN COURSEWARE
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Los números reales

Álvarez S., Caballero M.V. y Sánchez MªM

salvarez@um.es, m.victori@um.es, marvega@um.es

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Índice

1. Definiciones

- **Conjunto de los números naturales:** $\mathbb{N}=\{1,\ 2,\ 3,\ldots\}$.
- **Conjunto de los números enteros:** $\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots\}$.
- **Conjunto de los números racionales:** $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}, a, b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$. Incluye a los números enteros y fraccionarios.
- **Conjunto de los números irracionales:** Todos los números que no se pueden escribir como $\frac{a}{b}, a, b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$.
- **Conjunto de los números reales:** $\mathbb{R}$ es la unión de los números racionales e irracionales.
- $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$.
- **Valor absoluto de un número real** a que se denota como $|a|$ es:

$$|a|=\begin{cases} a & \text{si } x\geq 0\\ -a & \text{si } x<0\end{cases}$$

- **Potencia de base** a **y exponente** m**:** Se denota por a^m la potencia de base a y exponente m, con a y $m\in\mathbb{R}$.
- **Logaritmo neperiano del número** a**:** Se define como el exponente al que hay que elevar el número e para obtener a. Es decir:

$$\ln(a)=b\Leftrightarrow e^b=a.$$

- **Fracciones equivalentes:** $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si $a.d=b.c$.
- **Fracción irreducible:** $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible si a y b son primos entre sí.

2. Herramientas

2.1. Propiedades de los números reales

- Propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación:

$$a+b=b+a \qquad ab=ba.$$

- Propiedad asociativa de la suma y la multiplicación:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a(bc) = (ab)c.$$

- Elemento neutro de la suma y de la multiplicación:

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- Elemento opuesto de la suma:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

Consecuencia: La **resta** se define en términos de la suma:

$$a - b \qquad \text{significa} \qquad a + (-b).$$

- Elemento inverso de la multiplicación:

$$\text{para} \quad a \neq 0, \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Consecuencia: La **división** se define en términos de la multiplicación:

$$a/b \qquad \text{significa} \qquad a \cdot b^{-1}.$$

- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ejemplo 2.1 *Las siguientes igualdades resultan de aplicar las propiedades de los números reales:*

a) $2 - 5 = 2 + (-5) = -3.$

b) $2 - (-5) = 2 + 5 = 7.$

c) $3 \cdot (7 + 1) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 21 + 3 = 24.$

d) $8 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) = 8 \cdot (2 - 3) = -8.$

e) $\frac{6}{2} = 6 \cdot 2^{-1} = 3.$

f) $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24.$

g) $(5 + 2) + 1 = 5 + (2 + 1) = 8.$

h) *El elemento opuesto de* 3 *es* (-3) *porque* $3 + (-3) = 0.$

i) *El elemento inverso de* $\frac{4}{5}$ *es* $\frac{5}{4}$ *porque* $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = 1.$

2.2. Propiedades de las potencias

- $a^m > 0$ para todo $a > 0$ y $m \in \mathbb{R}$.
- $a^{-m} = (1/a)^m$, si $a \neq 0$.
- $a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$ cuando $m \in \mathbb{N}$.
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
  Consecuencia: $a^m/a^n = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.
  Consecuencia: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ cuando $n \in \mathbb{N}$.
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.
  Consecuencia: $(a/b)^m = a^m/b^m$.

¡No olvides!: $(a+b)^m \neq a^m + b^m$. Por tanto, $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Ejemplo 2.2 *Las siguientes igualdades resultan de aplicar las propiedades de las potencias:*

a) $3^5 \cdot 3^2 = 3^7$.

b) $4^{-2} \cdot 4^3 \cdot 4^5 = 4^{-2+3+5} = 4^6$.

c) $6^3 \cdot 6^{1/2} = 6^{7/2}$.

d) $\dfrac{3^8}{3^6} = 3^{8-6} = 3^2$.

e) $(2^3)^{-2} = 2^{-6}$.

f) $(5a)^3 = 5^3 a^3$.

f) $(\dfrac{a}{4})^2 = \dfrac{a^2}{4^2}$.

g) $(a-1)^2(a-1)^3 = (a-1)^5$.

h) $\dfrac{3(a+2)^5}{9(a+2)^2} = \dfrac{1}{3}(a+2)^{5-2} = \dfrac{1}{3}(a+2)^3$.

i) $\dfrac{((a+1)^3)^2}{(a+1)^7} = \dfrac{(a+1)^6}{(a+1)^7} = (x+1)^{-1} = \dfrac{1}{x+1}$.

j) $\left(\sqrt[4]{(a-1)^3}\right)^3 = \left((a-1)^{3/4}\right)^3 = (a-1)^{9/4} = \sqrt[4]{(a-1)^9}$.

k) $\sqrt[3]{a-1} \cdot \sqrt[3]{a+1} = (a-1)^{1/3} \cdot (a+1)^{1/3} = ((a-1) \cdot (a+1))^{1/3} =$

$$= (a^2-1)^{1/3} = \sqrt[3]{a^2-1}$$

.

2.3. Identidades útiles de potencias:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (binomio cuadrado).

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ (binomio cuadrado).

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (diferencia de dos cuadrados)

Ejemplo 2.3 *Utilizando las identidades de potencias, se tienen las siguientes igualdades:*

a) $(a+3) \cdot (a-3) = a^2 - 3^2$.

b) $(a+5)^2 = a^2 + 5^2 + 2a5 = a^2 + 5^2 + 10a$.

c) $(3a-4b)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 - 2(3a)(4b) = 9a^2 + 16b^2 - 24ab$.

2.4. Propiedades de los logaritmos neperianos

- Las operaciones *tomar exponencial* y *tomar logaritmo* son operaciones inversas, puesto que $e^{\ln(a)} = a$ y $\ln(e^a) = a$.
  Ejemplos:
  $\ln(1) = 0$ ya que $e^0 = 1$.
  $\ln(e) = 1$ ya que $e^1 = 1$.
  $\ln(1/e) = -1$ ya que $e^{-1} = 1/e$.
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- Signo de $\ln(a)$: $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (0,1)$; $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (1,+\infty)$
- $\ln(a \,.\, b) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln(a^b) = b \,.\, \ln(a)$.

Ejemplo 2.4 *Las siguientes igualdades se obtienen aplicando las propiedades de los logaritmos:*

a) $\ln(56) = \ln(8 \cdot 7) = \ln(8) + \ln(7)$.

b) $\ln(9/2) = \ln(9) - \ln(2)$.

c) $\ln(64) = \ln(8^2) = 2 \cdot \ln(8)$.

d) $\ln(\sqrt{7}) = \ln(7^{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot \ln(7)$.

2.5. Simplificación de fracciones

- Simplificar una fracción es obtener otra equivalente a ella que tenga en el numerador y denominador números más pequeños. Una forma de simplificar una fracción es dividir numerador y denominador por el mismo número.

Ejemplo 2.5 *Simplificar las siguientes fracciones hasta obtener una irreducible:*

a) $\frac{21}{28} = \frac{3 \cdot 7}{2^2 \cdot 7} = \frac{3}{2^2} = \frac{3}{4}$.

b) $\frac{56}{210} = \frac{2^3 \cdot 7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \frac{2^2 \cdot 7}{3^2 \cdot 5} = \frac{28}{45}$.

c) $\frac{435}{786} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 29}{2 \cdot 3 \cdot 131} = \frac{5 \cdot 29}{2 \cdot 131} = \frac{145}{262}$.

2.6. Operaciones con fracciones

- Suma de fracciones:

  i) Para sumar dos fracciones con el mismo denominador se suman los numeradores y se deja el denominador común.

  $$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

  ii) Para sumar dos fracciones con distinto denominador, primero se reducen a común denominador y después se efectúa la suma.

- Multiplicación de fracciones: El producto de dos fracciones es una nueva fracción que tiene por denominador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores de las fracciones que se multiplican.

  $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

- Fracción inversa: La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.
- División de fracciones: Para dividir dos fracciones se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplo 2.6 *Realizar las siguientes operaciones con fracciones:*

a) $\frac{3}{5} + \frac{5}{8} = \frac{24+25}{40} = \frac{49}{40}$.

b) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{25-10+8}{20} = \frac{23}{20}$.

c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 2}{15 \cdot 3} = \frac{16}{45}$.

d) $\frac{32}{21} \div \frac{3}{5} = \frac{32 \cdot 5}{21 \cdot 3} = \frac{160}{63}$.

e) $\frac{1}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$.

f) $(\frac{4}{9})^3 \cdot (\frac{4}{9})^7 = (\frac{4}{9})^{10}$.

g) $(\frac{3}{7})^{-2} = (\frac{7}{3})^2 = \frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9}$.

3. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1 *Utilizar las propiedades de las potencias para reformular las siguientes expresiones:*

a) $\frac{3^7}{3^2}$.

b) $\frac{a^2}{a^5}$.

c) $(\frac{a}{b})^4$.

d) $(3a^2b^3)^5$.

e) $6(a^2)^{-2}$.

f) $\frac{a^{-8}}{a^{-7}}$.

g) $(2^3a^{-4}b^5)^{-2}$.

h) $\dfrac{2a^4(a^2b)^0}{(4a^{-2}b)^2}$.

Solución

a) $\dfrac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$.

b) $\dfrac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$.

c) $(\dfrac{a}{b})^4 = \dfrac{a^4}{b^4}$.

d) $(3a^2b^3)^5 = 3^5(a^2)^5(b^3)^5 = 243a^{10}b^{15}$.

e) $6(a^2)^{-2} = 6a^{-4} = \dfrac{6}{a^4}$.

f) $\dfrac{a^{-8}}{a^{-7}} = a^{-8-(-7)} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

g) $(2^3a^{-4}b^5)^{-2} = 2^{-6}a^8b^{-10} = \dfrac{1}{2^6}a^8\dfrac{1}{b^{10}} = \dfrac{a^8}{64b^{10}}$.

h) $\dfrac{2a^4(a^2b)^0}{(4a^{-2}b)^2} = \dfrac{2a^4 \cdot 1}{4^2a^{-4}b^2} = \dfrac{2}{4^2}\dfrac{a^4}{a^{-4}}\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{a^8}{8b^2}$.

Ejercicio 2 *Escribir las siguientes expresiones sin exponentes:*

a) $(-4)^3$.

b) -5^3.

c) 3^{-2}.

d) $(-6)^{-1}$.

e) $-(\dfrac{2}{5})^{-3}$.

f) $(\dfrac{4}{3})^{-1}$.

Solución

a) $(-4)^3 = [(-4)\cdot(-4)]\cdot(-4) = 16\cdot(-4) = -64.$

b) $-5^3 = -[(5\cdot 5)\cdot 5] = -(25\cdot 5) = -125.$

c) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}.$

d) $(-6)^{-1} = \dfrac{1}{(-6)} = -\dfrac{1}{6}.$

e) $-(\dfrac{2}{5})^{-3} = -(\dfrac{5}{2})^3 = -\dfrac{75}{8}.$

f) $(\dfrac{4}{3})^{-1} = \dfrac{3}{4}.$

Ejercicio 3 *Calcular y simplificar de manera que sólo queden exponentes positivos:*

a) $(-2a^5)^{-2}.$

b) $(3a^{-3}b^2)(2a^5b^{-4}).$

c) $\dfrac{4a^{-2}}{(4a)^2}.$

d) $\dfrac{2^{-1}a^{-3}}{2a^3}.$

e) $(a^{-2}b^{-1}c^{-4})^{-2}.$

f) $\dfrac{(3a^{-3})^{-1}}{3a^3}.$

g) $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-1}b^2}.$

Solución

a) $(-2a^5)^{-2} = (-2)^{-2}a^{-10} = \dfrac{1}{(-2)^2}\dfrac{1}{a^{10}} = \dfrac{1}{4a^{10}}.$

b) $(3a^{-3}b^2)(2a^5b^{-4}) = 6a^{-3+5}b^{2-4} = 6a^2b^{-2} = 6\dfrac{a^2}{b^2}.$

c) $\dfrac{4a^{-2}}{(4a)^2} = \dfrac{4a^{-2}}{4^2a^2} = 4^{1-2}a^{-2-2} = 4^{-1}a^{-4} = \dfrac{1}{4a^4}.$

d) $\dfrac{2^{-1}a^{-3}}{2a^3} = 2^{-1-1}a^{-3-3} = 2^{-2}a^{-6} = \dfrac{1}{2^2a^6} = \dfrac{1}{4}a^6.$

e) $(a^{-2}b^{-1}c^{-4})^{-2} = a^{(-2)\cdot(-2)}b^{(-1)\cdot(-2)}c^{(-4)\cdot(-2)} = a^4b^2c^8.$

f) $\dfrac{(3a^{-3})^{-1}}{3a^3} = \dfrac{3^{-1}a^3}{3a^3} = 3^{-1-1}a^{3-3} = 3^{-2}a^0 = \dfrac{1}{3^2}\cdot 1 = \dfrac{1}{9}.$

g) $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-1}b^{-2}} = 2a^{-2-(-1)}b^2 = 2a^{-1}b^2 = \dfrac{2b^2}{a}.$

Ejercicio 4 *Escribir las siguientes expresiones como potencias:*

a) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}.$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt{a}}.$

c) $\sqrt[3]{(a^3b)^2}.$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}.$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}.$

Solución

a) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a} = a^{1/2}a^{1/3} = a^{1/2+1/3} = a^{5/6}.$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^{2/5}}{a^{1/2}} = a^{2/5-1/2} = a^{-1/10} = \dfrac{1}{a^{1/10}}.$

c) $\sqrt[3]{(a^3b)^2} = (a^3b)^{2/3} = a^2b^{2/3}.$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}} = a^{-3/4}a^{-1/4} = a^{-3/4-1/4} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}.$

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = (a^{2/3})^{1/2} = a^{2/3\cdot 1/2} = a^{1/3}.$

Ejercicio 5 *Despejar b en términos de logaritmos neperianos:*

a) $e^{2b} = 5.$

b) $0{,}1e^b = 0{,}3.$

c) $e^{2b-6} - 1 = 2.$

d) $4e^{3b} = \dfrac{1}{2}.$

Solución

a) $\ln(e^{2b}) = \ln(5) \Leftrightarrow 2b = 5 \Leftrightarrow b = 5/2$.

b) $\ln(0{,}1e^b) = \ln(0{,}3) \Leftrightarrow \ln(0{,}1) + \ln(e^b) = \ln(0{,}3) \Leftrightarrow \ln(0{,}1) + b = \ln(0{,}3) \Leftrightarrow b = \ln(0{,}3/0{,}1) = \ln(3)$.

c) $e^{2b-6} + 1 = 2 \Leftrightarrow e^{2b-6} = 1 \Leftrightarrow \ln(e^{2b-6}) = 0 \Leftrightarrow 2b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = 3$.

d) $\ln(4e^{3b}) = \ln(1/2) \Leftrightarrow \ln(4)+\ln(e^{3b}) = \ln(1/2) \Leftrightarrow \ln(4)+3b = \ln(1/2) \Leftrightarrow 3b = \ln(1/2) - \ln(4) \Leftrightarrow 3b = \ln(1/8) \Leftrightarrow 3b = \ln(1) - \ln(8) \Leftrightarrow b = -\ln(8)/3$.

Ejercicio 6 *Expresar como un sólo logaritmo neperiano:*

a) $\ln(7) + \ln(5)$.

b) $\ln(3a) - \ln(a + 2)$.

c) $5\ln(a) + 3\ln(2)$.

d) $\frac{1}{2}[\ln(5 + a) - 2\ln(a - 1)]$.

Solución

a) $\ln(7) + \ln(5) = \ln(7 \cdot 5) = \ln(35)$.

b) $\ln(3a) - \ln(a + 2) = \ln(\frac{3a}{a+2})$.

c) $5\ln(a) + 3\ln(2) = \ln(a^5) + \ln(2^3) = \ln(a^5) + \ln(8) = \ln(8 \cdot a^5)$.

d) $\frac{1}{2}[\ln(5 + a) - 2\ln(a - 1)] = \frac{1}{2}\ln((5 + a)/(a - 1)^2) = \ln(\frac{(5+a)}{(a-1)^2})^{1/2} = \ln\frac{(5+a)^{1/2}}{a-1}$.

Ejercicio 7 *Escribir las siguientes expresiones en términos de* $\ln(a)$ *y* $\ln(a+1)$*:*

a) $\ln(a(a + 1)^5)$.

b) $\ln\frac{\sqrt{a+1}}{a}$.

c) $\ln\frac{a^3}{(a+1)^2}$.

d) $\ln(a(a + 1)^2)^3$.

Solución

a) $\ln(a(a+1)^5) = \ln(a) + \ln(a+1)^5 = \ln(a) + 5\ln(a+1)$.

b) $\ln\dfrac{\sqrt{a+1}}{a} = \ln(\sqrt{a+1}) - \ln(a) = \ln((a+1)^{1/2}) - \ln(a) = \dfrac{1}{2}\ln(a+1) - \ln(a)$.

c) $\ln\dfrac{a^3}{(a+1)^2} = \ln(a^3) - \ln(a+1)^2 = 3\ln(a) - 2\ln(a+1)$.

d) $\ln(a(a+1)^2)^3 = 3\ln(a(a+1)^2) = 3[\ln(a) + \ln((a+1)^2)] = 3[\ln(a) + 2\ln(a+1)] = 3\ln(a) + 6\ln(a+1)$.

Ejercicio 8 *Realizar las siguientes operaciones, simplificando el resultado:*

a) $\dfrac{|6-2| - |-5|}{|6-2|}$.

b) $\dfrac{|3-|4-10||}{-|5^2-2^2|}$.

c) $(\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{5}) - \dfrac{2}{3}$.

d) $\dfrac{5}{2} \cdot (\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2})$.

e) $(\dfrac{1}{4})^2 - (\dfrac{3}{2})^3$.

f) $(\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4}) \cdot (-\dfrac{3}{10})$.

g) $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{11}{5}}$.

h) $\dfrac{3}{4 + \frac{1}{5}}$.

i) $\dfrac{6}{1 + \frac{2}{5}} + \dfrac{1}{2 - \frac{4}{3}}$.

j) $-9+\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}.$

k) $\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{6}.$

l) $\dfrac{5}{1+\dfrac{2}{3}}\cdot\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{2}.$

Solución

a) $\dfrac{|6-2|-|-5|}{|6-2|}=\dfrac{|4|-|-5|}{|4|}=\dfrac{4-5}{4}=\dfrac{-1}{4}.$

b) $\dfrac{|3-|4-10||}{-|5^2-2^2|}=\dfrac{|3-|-6||}{-|25-4|}=\dfrac{|3-6|}{-|21|}=\dfrac{|-3|}{-|21|}=\dfrac{3}{-21}=\dfrac{3}{-3\cdot 7}=-\dfrac{1}{7}.$

c) $(\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{5})-\dfrac{2}{3}=\dfrac{15+10}{50}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{25}{50}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{-25}{150}=\dfrac{-5^2}{2\cdot 3\cdot 5^2}=\dfrac{-1}{6}.$

d) $\dfrac{5}{2}\cdot(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2})=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{2+3}{6}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{5}{6}=\dfrac{5\cdot 5}{2\cdot 6}=\dfrac{25}{12}.$

e) $(\dfrac{1}{4})^2-(\dfrac{3}{2})^3=\dfrac{1}{4^2}-\dfrac{3^3}{2^3}=\dfrac{1}{16}-\dfrac{9}{8}=\dfrac{1-18}{16}=\dfrac{-17}{16}.$

f) $(\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{4})\cdot(-\dfrac{3}{10})=\dfrac{2-5}{4}\cdot(-\dfrac{3}{10})=(-\dfrac{3}{4})\cdot(-\dfrac{3}{10})=\dfrac{9}{40}.$

g) $\dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{11}{5}}=\dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{44}{9}}=\dfrac{1\cdot 9}{6\cdot 44}=\dfrac{3^2}{2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 11}=\dfrac{3}{2^3\cdot 11}=\dfrac{3}{88}.$

h) $\dfrac{3}{4+\dfrac{1}{5}}=\dfrac{3}{\dfrac{20+1}{5}}=\dfrac{3}{\dfrac{21}{5}}=\dfrac{15}{21}=\dfrac{3\cdot 5}{3\cdot 7}=\dfrac{5}{7}.$

i) $\dfrac{6}{1+\dfrac{2}{5}}+\dfrac{1}{2-\dfrac{4}{3}}=\dfrac{6}{\dfrac{5+2}{5}}+\dfrac{1}{\dfrac{6-4}{3}}=\dfrac{6}{\dfrac{7}{5}}+\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{30}{7}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{60+21}{14}=\dfrac{81}{14}.$

j) $-9+\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}=-9+\dfrac{1}{\dfrac{-2+3}{4}}=-9+\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}}=-9+4=-5.$

k) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{7}{6} = \frac{15}{8} - \frac{7}{6} = \frac{90-56}{48} = \frac{34}{48} = \frac{2 \cdot 17}{2^4 \cdot 3} = \frac{17}{2^3 \cdot 3} = \frac{17}{24}$.

l) $\frac{5}{1+\frac{2}{3}} \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{\frac{3+2}{3}} \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{\frac{5}{3}} \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 3}{5} \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{8}{3} - \frac{1}{2} =$
$8 - \frac{1}{2} = \frac{16-1}{2} = \frac{15}{2}$.

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 *¿Qué propiedad de los números se ilustra en cada caso?*

a) $3 + 7 = 7 + 3$.

b) $2(8 + 5) = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5$.

c) $(-4) \cdot 1 = -4$.

d) $3 \cdot (9 \cdot 6) = (3 \cdot 9) \cdot 6$.

e) $-12 + 0 = -12$.

f) $\frac{7}{11} \cdot \frac{11}{7} = 1$.

Solución

a) Propiedad conmutativa de la suma.

b) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

c) Elemento neutro de la multiplicación.

d) Propiedad asociativa de la multiplicación.

e) Elemento neutro de la suma.

f) Elemento inverso de la multiplicación.

Ejercicio 2 *Indicar a qué conjunto numérico pertenecen los siguientes números :*

a) -9.

b) e.

c) $\dfrac{-3}{12}$.

d) 23.

e) π.

f) 1,414.

g) $\dfrac{0}{7}$.

Solución

a) Conjunto de los números enteros, conjunto de números racionales y conjunto de nḿeros reales .

b) Conjunto de nḿeros irracionales y conjunto de números reales.

c) Conjunto de números racionales y conjunto de números reales.

d) Conjunto de números naturales, conjunto de números enteros, conjunto de números racionales y conjunto de números reales.

e) Conjunto de números irracionales y conjunto de números reales

f) Conjunto de números racionales y conjunto de números reales.

g) Conjunto de números enteros, conjunto de números racionales y conjunto de nḿeros reales

Ejercicio 3 *Insertar el signo apropiado $<$, $>$ ó $=$:*

a) $-10 \quad \square \quad -4$.

b) $\pi \quad \square \quad 3{,}14$.

c) $0{,}25 \quad \square \quad \dfrac{1}{4}$.

d) $|-2| + |6| \quad \square \quad |-2+6|$.

e) $|-3-4| \quad \square \quad |-3| + |-4|$.

f) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \quad \square \quad \dfrac{5}{6}$.

Solución

a) $<$. *b)* y *d)* $>$. *c)*, *e)* y *f)* $=$.

Ejercicio 4 *Escribir las expresiones siguientes sin exponentes:*

a) $4 \cdot 3^0$.

b) 6^{-2}.

c) 3^{-1}.

d) $(-5)^{-2}$.

e) $-(\frac{2}{3})^{-4}$.

Solución

a) *4*. *b)* $\frac{1}{36}$. *c)* $\frac{1}{3}$. *d)* $\frac{1}{25}$. *e)* $\frac{-81}{16}$.

Ejercicio 5 *Completar las siguientes expresiones:*

a) $a \cdot a^{1/3} \cdot a^3 = a^?$.

b) $\frac{a^2}{a^{1/2}} = a^?$.

c) $(a^{-2/3})^{-3} = a^?$.

d) $a^{-3/2} \cdot a^{1/2} = a^?$.

Solución

a) $\frac{13}{3}$. *b)* $\frac{3}{2}$. *c)* *2*. *d)* *-1*.

Ejercicio 6 *Escribir las siguientes expresiones como potencias:*

a) $\sqrt{a^3}$.

b) $\frac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$.

c) $\sqrt[4]{(ab)^4}$.

d) $\sqrt[3]{(a^3b)^2}$.

e) $\frac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$.

Solución

a) $a^{3/2}$. $a^{-2/5}$. ab. $a^2b^{2/3}$. $a^{1/6}$.

Ejercicio 7 *Calcular las siguientes expresiones:*

a) $(a+5)^2$.

b) $(3a-4b)^2$.

c) $(a-2)(a+2)$.

d) $(a^2-b^3)^2$.

Solución

a) $a^2+10a+25$.

b) $9a^2-24ab+16b^2$.

c) a^2-4.

d) $a^4-2a^2b^3+b^6$.