Los números reales

Álvarez S., Caballero M.V. y Sánchez MªM
salvarez@um.es, m.victori@um.es, marvega@um.es

Contenidos

Ir Página

Full Screen

Regresar

Imprimir

Salir

Índice

PINCHA AQUÍ para imprimir el archivo .pdf

Contenidos
Ir Página
Full Screen
Regresar
Imprimir
Salir

1. Definiciones

- **Conjunto de los números naturales:** $\mathbb{N}= \{1,\ 2,\ 3, \ldots\}$.
- **Conjunto de los números enteros:** $\mathbb{Z}= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.
- **Conjunto de los números racionales:** $\mathbb{Q}= \left\{ \dfrac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$. Incluye a los números enteros y fraccionarios.
- **Conjunto de los números irracionales:** Todos los números que no se pueden escribir como $\dfrac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
- **Conjunto de los números reales:** $\mathbb{R}$ es la unión de los números racionales e irracionales.
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.
- **Valor absoluto de un número real** a que se denota como $|a|$ es:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } x \geq 0 \\ -a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **Potencia de base a y exponente m:** Se denota por a^m la potencia de base a y exponente m, con a y $m \in \mathbb{R}$.
- **Logaritmo neperiano del número a:** Se define como el exponente al que hay que elevar el número e para obtener a. Es decir:

$$\ln(a) = b \Leftrightarrow e^b = a.$$

- **Fracciones equivalentes:** $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes si y sólo si $a \cdot d = b \cdot c$.
- **Fracción irreducible:** $\frac{a}{b}$ es una fracción irreducible si a y b son primos entre sí.

2. Herramientas

2.1. Propiedades de los números reales

- Propiedad conmutativa de la suma y la multiplicación:

$$a + b = b + a \qquad ab = ba.$$

- Propiedad asociativa de la suma y la multiplicación:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a(bc) = (ab)c.$$

- Elemento neutro de la suma y de la multiplicación:

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

- Elemento opuesto de la suma:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

  Consecuencia: La **resta** se define en términos de la suma:

$$a - b \qquad \text{significa} \qquad a + (-b).$$

- Elemento inverso de la multiplicación:

$$\text{para} \quad a \neq 0, \quad a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

  Consecuencia: La **división** se define en términos de la multiplicación:

$$a/b \qquad \text{significa} \qquad a \cdot b^{-1}.$$

Contenidos
Ir Página
Full Screen
Regresar
Imprimir
Salir

- Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ejemplo 2.1 *Las siguientes igualdades resultan de aplicar las propiedades de los números reales:*

a) $2 - 5 = 2 + (-5) = -3.$

b) $2 - (-5) = 2 + 5 = 7.$

c) $3 \cdot (7+1) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 21 + 3 = 24.$

d) $8 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) = 8 \cdot (2-3) = -8.$

e) $\dfrac{6}{2} = 6 \cdot 2^{-1} = 3.$

f) $2(3 \cdot 4) = (2 \cdot 3) \cdot 4 = 24.$

g) $(5+2) + 1 = 5 + (2+1) = 8.$

h) *El elemento opuesto de* 3 *es* (-3) *porque* $3 + (-3) = 0.$

i) *El elemento inverso de* $\dfrac{4}{5}$ *es* $\dfrac{5}{4}$ *porque* $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{4} = 1.$

2.2. Propiedades de las potencias

- $a^m > 0$ para todo $a > 0$ y $m \in \mathbb{R}$.
- $a^{-m} = (1/a)^m$, si $a \neq 0$.
- $a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$ cuando $m \in \mathbb{N}$.
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

  Consecuencia: $a^m/a^n = a^{m-n}$.
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

  Consecuencia: $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$ cuando $n \in \mathbb{N}$.
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.

  Consecuencia: $(a/b)^m = a^m/b^m$.

¡No olvides!: $(a+b)^m \neq a^m + b^m$. Por tanto, $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

Ejemplo 2.2 *Las siguientes igualdades resultan de aplicar las propiedades de las potencias:*

a) $3^5 \cdot 3^2 = 3^7$.

b) $4^{-2} \cdot 4^3 \cdot 4^5 = 4^{-2+3+5} = 4^6$.

c) $6^3 \cdot 6^{1/2} = 6^{7/2}$.

d) $\dfrac{3^8}{3^6} = 3^{8-6} = 3^2$.

Contenidos
Ir Página
Full Screen
Regresar
Imprimir
Salir

e) $(2^3)^{-2} = 2^{-6}$.

f) $(5a)^3 = 5^3a^3$.

f) $(\frac{a}{4})^2 = \frac{a^2}{4^2}$.

g) $(a-1)^2(a-1)^3 = (a-1)^5$.

h) $\frac{3(a+2)^5}{9(a+2)^2} = \frac{1}{3}(a+2)^{5-2} = \frac{1}{3}(a+2)^3$.

i) $\frac{((a+1)^3)^2}{(a+1)^7} = \frac{(a+1)^6}{(a+1)^7} = (x+1)^{-1} = \frac{1}{x+1}$.

j) $\left(\sqrt[4]{(a-1)^3}\right)^3 = \left((a-1)^{3/4}\right)^3 = (a-1)^{9/4} = \sqrt[4]{(a-1)^9}$.

k) $\sqrt[3]{a-1} \cdot \sqrt[3]{a+1} = (a-1)^{1/3} \cdot (a+1)^{1/3} = ((a-1)\cdot(a+1))^{1/3} =$

$$= (a^2-1)^{1/3} = \sqrt[3]{a^2-1}$$

.

2.3. Identidades útiles de potencias:

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (binomio cuadrado).

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ (binomio cuadrado).

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (diferencia de dos cuadrados)

Ejemplo 2.3 *Utilizando las identidades de potencias, se tienen las siguientes igualdades:*

a) $(a+3)\cdot(a-3) = a^2 - 3^2$.

b) $(a+5)^2 = a^2 + 5^2 + 2a5 = a^2 + 5^2 + 10a$.

c) $(3a-4b)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 - 2(3a)(4b) = 9a^2 + 16b^2 - 24ab$.

2.4. Propiedades de los logaritmos neperianos

- Las operaciones *tomar exponencial* y *tomar logaritmo* son operaciones inversas, puesto que $e^{\ln(a)} = a$ y $\ln(e^a) = a$.
  Ejemplos:
  $\ln(1) = 0$ ya que $e^0 = 1$.
  $\ln(e) = 1$ ya que $e^1 = 1$.
  $\ln(1/e) = -1$ ya que $e^{-1} = 1/e$.
- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- Signo de $\ln(a)$: $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow a \in (0,1)$; $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a \in (1,+\infty)$
- $\ln(a\,.\,b) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln(a^b) = b\,.\,\ln(a)$.

Ejemplo 2.4 *Las siguientes igualdades se obtienen aplicando las propiedades de los logaritmos:*

a) $\ln(56) = \ln(8 \cdot 7) = \ln(8) + \ln(7)$.

b) $\ln(9/2) = \ln(9) - \ln(2)$.

c) $\ln(64) = \ln(8^2) = 2 \cdot \ln(8)$.

d) $\ln(\sqrt{7}) = \ln(7^{1/2}) = \dfrac{1}{2} \cdot \ln(7)$.

2.5. Simplificación de fracciones

- Simplificar una fracción es obtener otra equivalente a ella que tenga en el numerador y denominador números más pequeños. Una forma de simplificar una fracción es dividir numerador y denominador por el mismo número.

Ejemplo 2.5 *Simplificar las siguientes fracciones hasta obtener una irreducible:*

a) $\dfrac{21}{28} = \dfrac{3 \cdot 7}{2^2 \cdot 7} = \dfrac{3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$.

b) $\dfrac{56}{210} = \dfrac{2^3 \cdot 7}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = \dfrac{2^2 \cdot 7}{3^2 \cdot 5} = \dfrac{28}{45}$.

c) $\dfrac{435}{786} = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 29}{2 \cdot 3 \cdot 131} = \dfrac{5 \cdot 29}{2 \cdot 131} = \dfrac{145}{262}$.

2.6. Operaciones con fracciones

- Suma de fracciones:

  i) Para sumar dos fracciones con el mismo denominador se suman los numeradores y se deja el denominador común.

  $$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

  ii) Para sumar dos fracciones con distinto denominador, primero se reducen a común denominador y después se efectúa la suma.

- Multiplicación de fracciones: El producto de dos fracciones es una nueva fracción que tiene por denominador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores de las fracciones que se multiplican.

  $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

- Fracción inversa: La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$.

- División de fracciones: Para dividir dos fracciones se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplo 2.6 *Realizar las siguientes operaciones con fracciones:*

a) $\frac{3}{5} + \frac{5}{8} = \frac{24+25}{40} = \frac{49}{40}.$

Contenidos

Ir Página

Full Screen

Regresar

Imprimir

Salir

b) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{25 - 10 + 8}{20} = \frac{23}{20}.$

c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 2}{15 \cdot 3} = \frac{16}{45}.$

d) $\frac{32}{21} \div \frac{3}{5} = \frac{32 \cdot 5}{21 \cdot 3} = \frac{160}{63}.$

e) $\frac{1}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}.$

f) $(\frac{4}{9})^3 \cdot (\frac{4}{9})^7 = (\frac{4}{9})^{10}.$

g) $(\frac{3}{7})^{-2} = (\frac{7}{3})^2 = \frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9}.$

3. Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1 *Utilizar las propiedades de las potencias para reformular las siguientes expresiones:*

a) $\dfrac{3^7}{3^2}$.

b) $\dfrac{a^2}{a^5}$.

c) $(\dfrac{a}{b})^4$.

d) $(3a^2b^3)^5$.

e) $6(a^2)^{-2}$.

f) $\dfrac{a^{-8}}{a^{-7}}$.

g) $(2^3a^{-4}b^5)^{-2}$.

h) $\dfrac{2a^4(a^2b)^0}{(4a^{-2}b)^2}$.

Solución

a) $\dfrac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$.

Contenidos
Ir Página
Full Screen
Regresar
Imprimir
Salir

b) $\dfrac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}.$

c) $(\dfrac{a}{b})^4 = \dfrac{a^4}{b^4}.$

d) $(3a^2b^3)^5 = 3^5(a^2)^5(b^3)^5 = 243a^{10}b^{15}.$

e) $6(a^2)^{-2} = 6a^{-4} = \dfrac{6}{a^4}.$

f) $\dfrac{a^{-8}}{a^{-7}} = a^{-8-(-7)} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}.$

g) $(2^3a^{-4}b^5)^{-2} = 2^{-6}a^8b^{-10} = \dfrac{1}{2^6}a^8\dfrac{1}{b^{10}} = \dfrac{a^8}{64b^{10}}.$

h) $\dfrac{2a^4(a^2b)^0}{(4a^{-2}b)^2} = \dfrac{2a^4 \cdot 1}{4^2a^{-4}b^2} = \dfrac{2}{4^2}\dfrac{a^4}{a^{-4}}\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{a^8}{8b^2}.$

Ejercicio 2 *Escribir las siguientes expresiones sin exponentes:*

a) $(-4)^3.$

b) $-5^3.$

c) $3^{-2}.$

d) $(-6)^{-1}.$

e) $-(\dfrac{2}{5})^{-3}.$

f) $(\frac{4}{3})^{-1}$.

Solución

a) $(-4)^3 = [(-4)\cdot(-4)]\cdot(-4) = 16\cdot(-4) = -64.$

b) $-5^3 = -[(5\cdot 5)\cdot 5] = -(25\cdot 5) = -125.$

c) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$

d) $(-6)^{-1} = \frac{1}{(-6)} = -\frac{1}{6}.$

e) $-(\frac{2}{5})^{-3} = -(\frac{5}{2})^3 = -\frac{75}{8}.$

f) $(\frac{4}{3})^{-1} = \frac{3}{4}.$

Ejercicio 3 *Calcular y simplificar de manera que sólo queden exponentes positivos:*

a) $(-2a^5)^{-2}$.

b) $(3a^{-3}b^2)(2a^5b^{-4})$.

c) $\dfrac{4a^{-2}}{(4a)^2}$.

d) $\dfrac{2^{-1}a^{-3}}{2a^3}$.

e) $(a^{-2}b^{-1}c^{-4})^{-2}$.

f) $\dfrac{(3a^{-3})^{-1}}{3a^3}$.

g) $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-1}b^2}$.

Solución

a) $(-2a^5)^{-2} = (-2)^{-2}a^{-10} = \dfrac{1}{(-2)^2}\dfrac{1}{a^{10}} = \dfrac{1}{4a^{10}}$.

b) $(3a^{-3}b^2)(2a^5b^{-4}) = 6a^{-3+5}b^{2-4} = 6a^2b^{-2} = 6\dfrac{a^2}{b^2}$.

c) $\dfrac{4a^{-2}}{(4a)^2} = \dfrac{4a^{-2}}{4^2a^2} = 4^{1-2}a^{-2-2} = 4^{-1}a^{-4} = \dfrac{1}{4a^4}$.

d) $\dfrac{2^{-1}a^{-3}}{2a^3} = 2^{-1-1}a^{-3-3} = 2^{-2}a^{-6} = \dfrac{1}{2^2a^6} = \dfrac{1}{4}a^6$.

e) $(a^{-2}b^{-1}c^{-4})^{-2} = a^{(-2)\cdot(-2)}b^{(-1)\cdot(-2)}c^{(-4)\cdot(-2)} = a^4b^2c^8$.

f) $\dfrac{(3a^{-3})^{-1}}{3a^3} = \dfrac{3^{-1}a^3}{3a^3} = 3^{-1-1}a^{3-3} = 3^{-2}a^0 = \dfrac{1}{3^2}\cdot 1 = \dfrac{1}{9}$.

g) $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-1}b^{-2}} = 2a^{-2-(-1)}b^2 = 2a^{-1}b^2 = \dfrac{2b^2}{a}$.

Ejercicio 4 *Escribir las siguientes expresiones como potencias:*

a) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a}$.

b) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt{a}}$.

c) $\sqrt[3]{(a^3b)^2}$.

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$.

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$.

Solución

a) $\sqrt{a}\sqrt[3]{a} = a^{1/2}a^{1/3} = a^{1/2+1/3} = a^{5/6}$.

b) $\dfrac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^{2/5}}{a^{1/2}} = a^{2/5-1/2} = a^{-1/10} = \dfrac{1}{a^{1/10}}$.

c) $\sqrt[3]{(a^3b)^2} = (a^3b)^{2/3} = a^2b^{2/3}$.

d) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}} = a^{-3/4}a^{-1/4} = a^{-3/4-1/4} = a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

e) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = (a^{2/3})^{1/2} = a^{2/3\cdot 1/2} = a^{1/3}$.

Ejercicio 5 *Despejar b en términos de logaritmos neperianos:*

Contenidos
Ir Página
Full Screen
Regresar
Imprimir
Salir

a) $e^{2b} = 5.$

b) $0{,}1e^{b} = 0{,}3.$

c) $e^{2b-6} - 1 = 2.$

d) $4e^{3b} = \dfrac{1}{2}.$

Solución

a) $\ln(e^{2b}) = \ln(5) \Leftrightarrow 2b = 5 \Leftrightarrow b = 5/2.$

b) $\ln(0{,}1e^{b}) = \ln(0{,}3) \Leftrightarrow \ln(0{,}1) + \ln(e^{b}) = \ln(0{,}3) \Leftrightarrow \ln(0{,}1) + b = \ln(0{,}3) \Leftrightarrow b = \ln(0{,}3/0{,}1) = \ln(3).$

c) $e^{2b-6} + 1 = 2 \Leftrightarrow e^{2b-6} = 1 \Leftrightarrow \ln(e^{2b-6}) = 0 \Leftrightarrow 2b - 6 = 0 \Leftrightarrow b = 3.$

d) $\ln(4e^{3b}) = \ln(1/2) \Leftrightarrow \ln(4) + \ln(e^{3b}) = \ln(1/2) \Leftrightarrow \ln(4) + 3b = \ln(1/2) \Leftrightarrow 3b = \ln(1/2) - \ln(4) \Leftrightarrow 3b = \ln(1/8) \Leftrightarrow 3b = \ln(1) - \ln(8) \Leftrightarrow b = -\ln(8)/3.$

Ejercicio 6 *Expresar como un sólo logaritmo neperiano:*

a) $\ln(7) + \ln(5).$

b) $\ln(3a) - \ln(a + 2).$

c) $5\ln(a) + 3\ln(2).$

d) $\dfrac{1}{2}[\ln(5 + a) - 2\ln(a - 1)].$

Solución

a) $\ln(7) + \ln(5) = \ln(7 \cdot 5) = \ln(35)$.

b) $\ln(3a) - \ln(a+2) = \ln(\dfrac{3a}{a+2})$.

c) $5\ln(a) + 3\ln(2) = \ln(a^5) + \ln(2^3) = \ln(a^5) + \ln(8) = \ln(8 \cdot a^5)$.

d) $\dfrac{1}{2}[\ln(5+a) - 2\ln(a-1)] = \dfrac{1}{2}\ln((5+a)/(a-1)^2) = \ln(\dfrac{(5+a)}{(a-1)^2})^{1/2} = \ln\dfrac{(5+a)^{1/2}}{a-1}$.

Ejercicio 7 *Escribir las siguientes expresiones en términos de* $\ln(a)$ *y* $\ln(a+1)$*:*

a) $\ln(a(a+1)^5)$.

b) $\ln\dfrac{\sqrt{a+1}}{a}$.

c) $\ln\dfrac{a^3}{(a+1)^2}$.

d) $\ln(a(a+1)^2)^3$.

Solución

a) $\ln(a(a+1)^5) = \ln(a) + \ln(a+1)^5 = \ln(a) + 5\ln(a+1)$.

b) $\ln\dfrac{\sqrt{a+1}}{a} = \ln(\sqrt{a+1}) - \ln(a) = \ln((a+1)^{1/2}) - \ln(a) = \dfrac{1}{2}\ln(a+1) - \ln(a)$.

c) $\ln \dfrac{a^3}{(a+1)^2} = \ln(a^3) - \ln(a+1)^2 = 3\ln(a) - 2\ln(a+1)$.

d) $\ln(a(a+1)^2)^3 = 3\ln(a(a+1)^2) = 3[\ln(a) + \ln((a+1)^2)] = 3[\ln(a) + 2\ln(a+1)] = 3\ln(a) + 6\ln(a+1)$.

Ejercicio 8 *Realizar las siguientes operaciones, simplificando el resultado:*

a) $\dfrac{|6-2| - |-5|}{|6-2|}$.

b) $\dfrac{|3 - |4-10||}{-|5^2 - 2^2|}$.

c) $(\dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{5}) - \dfrac{2}{3}$.

d) $\dfrac{5}{2} \cdot (\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2})$.

e) $(\dfrac{1}{4})^2 - (\dfrac{3}{2})^3$.

f) $(\dfrac{1}{2} - \dfrac{5}{4}) \cdot (-\dfrac{3}{10})$.

g) $\dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{11}{5}}$.

h) $\dfrac{3}{4+\dfrac{1}{5}}$.

i) $\dfrac{6}{1+\dfrac{2}{5}}+\dfrac{1}{2-\dfrac{4}{3}}$.

j) $-9+\dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}$.

k) $\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{6}$.

l) $\dfrac{5}{1+\dfrac{2}{3}}\cdot\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{2}$.

Solución

a) $\dfrac{|6-2|-|-5|}{|6-2|}=\dfrac{|4|-|-5|}{|4|}=\dfrac{4-5}{4}=\dfrac{-1}{4}$.

b) $\dfrac{|3-|4-10||}{-|5^2-2^2|}=\dfrac{|3-|-6||}{-|25-4|}=\dfrac{|3-6|}{-|21|}=\dfrac{|-3|}{-|21|}=\dfrac{3}{-21}=\dfrac{3}{-3\cdot 7}=-\dfrac{1}{7}$.

c) $(\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{5})-\dfrac{2}{3}=\dfrac{15+10}{50}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{25}{50}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{-25}{150}=\dfrac{-5^2}{2\cdot 3\cdot 5^2}=\dfrac{-1}{6}$.

Contenidos
Ir Página
Full Screen
Regresar
Imprimir
Salir

d) $$\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{2+3}{6}=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5\cdot 5}{2\cdot 6}=\frac{25}{12}.$$

e) $$\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{1}{4^2}-\frac{3^3}{2^3}=\frac{1}{16}-\frac{9}{8}=\frac{1-18}{16}=\frac{-17}{16}.$$

f) $$\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{2-5}{4}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{9}{40}.$$

g) $$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{5}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{44}{9}}=\frac{1\cdot 9}{6\cdot 44}=\frac{3^2}{2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 11}=\frac{3}{2^3\cdot 11}=\frac{3}{88}.$$

h) $$\frac{3}{4+\frac{1}{5}}=\frac{3}{\frac{20+1}{5}}=\frac{3}{\frac{21}{5}}=\frac{15}{21}=\frac{3\cdot 5}{3\cdot 7}=\frac{5}{7}.$$

i) $$\frac{6}{1+\frac{2}{5}}+\frac{1}{2-\frac{4}{3}}=\frac{6}{\frac{5+2}{5}}+\frac{1}{\frac{6-4}{3}}=\frac{6}{\frac{7}{5}}+\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{30}{7}+\frac{3}{2}=\frac{60+21}{14}=\frac{81}{14}.$$

j) $$-9+\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}=-9+\frac{1}{\frac{-2+3}{4}}=-9+\frac{1}{\frac{1}{4}}=-9+4=-5.$$

k) $$\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{7}{6}=\frac{15}{8}-\frac{7}{6}=\frac{90-56}{48}=\frac{34}{48}=\frac{2\cdot 17}{2^4\cdot 3}=\frac{17}{2^3\cdot 3}=\frac{17}{24}.$$

1) $$\frac{5}{1+\frac{2}{3}}\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{\frac{3+2}{3}}\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{\frac{5}{3}}\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5\cdot 3}{5}\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=3\cdot\frac{8}{3}-\frac{1}{2}=8-\frac{1}{2}=\frac{16-1}{2}=\frac{15}{2}.$$

4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1 *¿Qué propiedad de los números se ilustra en cada caso?*

a) $3 + 7 = 7 + 3$.

b) $2(8 + 5) = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 5$.

c) $(-4) \cdot 1 = -4$.

d) $3 \cdot (9 \cdot 6) = (3 \cdot 9) \cdot 6$.

e) $-12 + 0 = -12$.

f) $\dfrac{7}{11} \cdot \dfrac{11}{7} = 1$.

Solución

a) *Propiedad conmutativa de la suma.*

b) *Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.*

c) *Elemento neutro de la multiplicación.*

d) *Propiedad asociativa de la multiplicación.*

e) *Elemento neutro de la suma.*

f) *Elemento inverso de la multiplicación.*

Ejercicio 2 *Indicar a qué conjunto numérico pertenecen los siguientes números :*

a) -9.

b) e.

c) $\dfrac{-3}{12}$.

d) 23.

e) π.

f) $1{,}414$.

g) $\dfrac{0}{7}$.

Solución

a) *Conjunto de los números enteros, conjunto de números racionales y conjunto de nḿeros reales .*

b) *Conjunto de nḿeros irracionales y conjunto de números reales.*

c) *Conjunto de números racionales y conjunto de números reales.*

d) *Conjunto de números naturales, conjunto de números enteros, conjunto de números racionales y conjunto de números reales.*

e) *Conjunto de números irracionales y conjunto de números reales* *f)* *Conjunto de números racionales y conjunto de números reales.*

g) *Conjunto de números enteros, conjunto de números racionales y conjunto de nḿeros reales*

Ejercicio 3 *Insertar el signo apropiado $<$, $>$ ó $=$:*

a) $-10 \quad \square \quad -4$.

b) $\pi \quad \square \quad 3{,}14$.

c) $0{,}25 \quad \square \quad \dfrac{1}{4}$.

d) $|-2|+|6| \quad \square \quad |-2+6|$.

e) $|-3-4| \quad \square \quad |-3|+|-4|$.

f) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} \quad \square \quad \dfrac{5}{6}$.

Solución

a) $<$. *b) y d)* $>$. *c), e) y f)* $=$.

Ejercicio 4 *Escribir las expresiones siguientes sin exponentes:*

a) $4 \cdot 3^0$.

b) 6^{-2}.

c) 3^{-1}.

d) $(-5)^{-2}$.

e) $-(\frac{2}{3})^{-4}$.

Solución

a) 4. *b)* $\frac{1}{36}$. *c)* $\frac{1}{3}$. *d)* $\frac{1}{25}$. *e)* $\frac{-81}{16}$.

Ejercicio 5 *Completar las siguientes expresiones:*

a) $a \cdot a^{1/3} \cdot a^3 = a^?$.

b) $\frac{a^2}{a^{1/2}} = a^?$.

c) $(a^{-2/3})^{-3} = a^?$.

d) $a^{-3/2} \cdot a^{1/2} = a^?$.

Solución

a) $\frac{13}{3}$. *b)* $\frac{3}{2}$. *c)* 2. *d)* -1.

Ejercicio 6 *Escribir las siguientes expresiones como potencias:*

a) $\sqrt{a^3}$.

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^2}}$.

c) $\sqrt[4]{(ab)^4}$.

d) $\sqrt[3]{(a^3b)^2}$.

e) $\dfrac{\sqrt[4]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$.

Solución

a) $a^{3/2}$. $a^{-2/5}$. ab. $a^2b^{2/3}$. $a^{1/6}$.

Ejercicio 7 *Calcular las siguientes expresiones:*

a) $(a+5)^2$.

b) $(3a-4b)^2$.

c) $(a-2)(a+2)$.

d) $(a^2-b^3)^2$.

Solución

a) $a^2+10a+25$.

b) $9a^2-24ab+16b^2$.

c) $a^2 - 4$.

d) $a^4 - 2a^2b^3 + b^6$.