AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Índice

4 Autovaloes y autofunciones.

- Autovalores y autofunciones.
- Propiedades de autovalores y aufunciones.
- Obtención de la función de Green en serie de autofunciones.
- Dominios infinitos y espectros continuos de autovalores. La condición de radiación.

5 Solución en serie de potencias de ecuaciones diferenciales ordinarias.

- Introducción.
- Ecuaciones de primer orden.
- Ecuaciones de segundo orden.

6 Armónicos esféricos. Función hipergeométrica.

- Función generatriz, $1/|\vec{r} - \vec{r_0}|$.
- Ecuación diferencial.
- Relaciones de recurrencia en el índice n.
- Funciones asociadas o adjuntas de Legendre.
- Representación integral de los polinomios y funciones asociadas de Legendre.
- Relaciones de recurrencia en el índice n de las funciones asociadas de Legendre.
- Integral de normalización de las funciones asociadas de Legendre.
- Serie hipergeométrica e hipergeométrica confluente.
- Funciones de Legendre de segunda clase.

7 Funciones eulerianas.

- Función $\Gamma(z)$.
- Función $B(p,q)$ o función beta.
- Fórmula de Stirling.

8 Funciones de Bessel.

- Funciones de Bessel.
- Funciones de Neumann.
- Funciones de Hankel.
- Representación integral de las funciones de Bessel.
- Fórmulas de recurrencia.
- Otras propiedades.

Bibliografía general del curso:

1. A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics.* Lectures on Theoretical Physics. Vol. VI. Academic Press.
2. G. F. Simmons, *Ecuaciones Diferenciales.* Mc. Graw-Hill/Interamericana de España, S. A. U.
3. G. Stephenson, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales.* Editorial Reverté.
4. A. Casto Figueroa, *Curso Básico de Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Addison-Wesley Iberoamericana.
5. A.N. Tíjonov y A.A. Samarski, *Ecuaciones de la Física Matemática.*
6. G.B. Arfken and H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physics.* Academic Press.
7. F. Ayres, Jr. *Ecuaciones Diferenciales.* Mc. Graw-Hill.
8. J. Mathews, R.L. Walker, *Mathematical Methods of Physics.* W.A. Benjamin.
9. S.L. Sobolev, *Partial Differential Equations in Physcis.* Dover.
10. L. Schwartz, *Métodos Matemáticos para las Ciencias Físicas.* Selecciones Científicas.

Índice

1 Desarrollo en serie de Fourier e integrales. Desarrollo en serie de funciones.

1.1 Series de Fourier.

□ Desarrollo en funciones trigonométricas. □ Minimizar el error de mínimos cuadrados. □ Ortogonalidad de las funciones trigonométricas y determinación de los coeficientes. □ Funciones pares e impares. □ Serie de Fourier infinita. □ Exponencial compleja. □ Forma compleja de la serie de Fourier. □ Relación entre las formas real y compleja de la serie de Fourier. □ Extensión de una función a todo el eje real por la serie de Fourier.

1.2 Relación de completitud.

□ Conjunto completo de funciones. □ Relación de ortonormalidad. □ Determinación de coeficientes. □ Caráter de finalidad de los coeficientes. □ Relación de completitud.

1.3 Desarrollo de Fourier de una función discontinua. Convergencia no uniforme y fenómeno de Gibbs.

□ Función escalón: $f(x) = 1\ x > 0$, $f(x) = -1\ x < 0$. □ Serie de Fourier de la función escalón. □ Representación gráfica de la serie obtenida. □ Comportamiento en $x \to 0$. □ Función *seno integral* $S_i(x)$. □ No conmutatividad de los límites $x \to 0$ y $n \to \infty$. □ Convergencia no uniforme y fenómeno de Gibbs. □ Evaluación de series. Serie de Leibniz. □ Mejora de la convergencia de las series obtenidas tras iteradas integraciones de la serie de Fourier. □ Sumas sobre todos los enteros: Σ_2, Σ_4.

1.4 Convergencia de la serie de Fourier.

□ Teorema de convergencia de la serie de Fourier y comportamiento asintótico de los coeficientes $n \to \infty$. □ Demonstración. □ Corolarios. □ Ilustración del teorema anterior con la función escalón e integrales iterativas de la misma. □ Representación gráfica.

1.5 Paso a la integral de Fourier.

□ Generalización del intervalo de representación. □ Paso al infinito del intervalo de integración. □ Integral de Fourier en forma compleja. □ Diversas formas reales de la integral de Fourier. □ Funciones pares e impares. □ Relación de reciprocidad entre una función y su transformada de Fourier. □ Generalización a varias variables.

1.6 Desarrollo en serie por polinomios de Legendre.

□ Relación de solicitud como condición necesaria y suficiente de un conjunto completo de funciones. □ Desarrollo de una función en el intervalo $[-1, 1]$ en polinomios. □ Mínimos cuadrados. □ La ortoganlidad de los polinomios es condición necesaria y suficiente para tener el carácter de finalidad de los coeficientes. □ Normalización. □ Determinación de los polinomios. Polinomios de Legendre. □ Representación de los Polinomios de Legendre por derivadas. □ Valor de la integral de normalización. □ Determinación de los coeficientes. □ Serie de Taylor y desarrollo por Polinomios de Legendre.

1.7 Medidas (Densidades). Análisis de Fourier anarmónico. Un ejemplo de coeficientes sin propiedad de finalidad.

□ Medida y desarrollos diferentes en serie de funciones. □ Ejemplos: Polinomios de Hermite, Laguerre y Legendre. □ Análisis de Fourier anarmónico. □ Ejemplo: $\tan \lambda\pi = \alpha\pi$. □ Determinación de coeficientes sin carácter de finalidad. □ Ejemplo: Caso de un espejo metálico con la forma de un cilindro circular. □ Condiciones de contorno. Mínimos cuadrados. □ Fórmula para la determinaciόde los coeficientes.

2 Ecuadiones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden.

2.1 Ecuaciones básicas en derivadas parciales.

□ Ecuaciones de estados en equilibrio. □ Ecuaciones de ondas. □ Ecuaciones de igualación. □ Deducción de la ecuación de propagación del calor. □ Invarianza bajo rotaciones y traslaciones. □ Caso relativista. □ Teoría de campos.

2.2 Teoría de las características. Clasificación de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

□ Forma general no lineal. □ Forma lineal general. □ Curvas características. □ Ecuación de las características. □ Edf. de tipo elíptico. □ Edf. de tipo hiperbólico. □ Edf. de tipo parabólico. □ Forma normal o canónica de las edf. elípticas. □ Forma normal o canónica de las edf. hiperbólicas. □ Forma normal o canónica de las edf. parabólicas. □ Clasificación de las edf. vistas en el punto 1.

2.3 Solución de d'Alambert de las ecuaciones diferenciales de tipo hiperbólico.

□ Solución de d'Alambert. □ Propagación de discontinuidades. □ Condiciones de contorno. □ Condiciones de contorno sobre características. □ Comparación con las edf. de tipo elíptico y parabólico.

3 Teorema de Green.

3.1 Operador Adjunto.

□ Definición. □ Operador adjunto de un operador lineal. □ Operador autoadjunto. □ Condiciones para un operador autoadjunto lineal.

3.2 Teorema de Green (TG).

□ Teorema de Green. Demonstración. □ Presencia de singularidades.

3.3 Integración de las edf. de tipo elíptico.

□ Forma normal. □ Teorema de Green. □ Fuente unidad. □ Solución principal □ Solución de la edf. de tipo elíptico. □ Caracter analítico. □ Condiciones de contorno. □ Funciones de Green. □ Caso autoadjunto. □ Propiedad de simetría de la función de Green. □ Delta de Dirac y reformulación del problema de hallar una función de Green. □ Caso no homogéneo. □ Caso no autoadjunto.

3.4 Integración de Riemann de las edf. de tipo hiperbólico.

□ Forma normal. □ Teorema de Green. □ Condiciones de contorno. □ Solución característica. □ Solución de Riemann de la edf. de tipo hiperbólico. □ Ejemplo.

3.5 Integración de las edf. de tipo parabólico: la ecuación del calor.

□ Teorema de Green. □ Solución principal: Polo de calor de fuerza unidad. □ Barra unidimensional no acotada. □ Transformada de Fourier. □ Carácter estadístico de la ley de conducción del calor. □ Función de error de Gauss. □ Solución general de la ecuación del calor. □ Condiciones de contorno. □ Funciones de Green.

4 Autovaloes y autofunciones.

4.1 Autovalores y autofunciones.

□ Definición. □ Ejemplo de la membrana vibrante. □ Separación de variables. □ Autovalores degenerados. □ Nodos y soluciones excitadas. □ Degeneración fundamental. □ Degeneración accidental.

4.2 Propiedades de autovalores y aufunciones.

□ Variable real. □ Carácter real de los autovalores de un operador autoadjunto. □ Propiedades de ortogonalidad de las autofunciones. □ Extensión a variable compleja. □ Operador adjunto. □ Teorema de Green. □ Carácter real de los autovalores de un operador autoadjunto. □ Propieades de ortogonalidad de las autofunciones. □ Principio de completitud. □ Aplicaciones: ecuaciones del calor y de ondas. □ Postulados de la mecánica cuántica. □ Ecuación de Schrödinger.

4.3 Obtención de la función de Green en serie de autofunciones.

□ Caso homogéneo y general. □ Oscilaciones forzadas. □ Función de Green para la ecaución de ondas. □ Relación de completitud para la delta de Dirac. □ Resonancias. □ Ecuaciones de contorno sobre S. □ Función de Green para la ecuación Laplaciana.

4.4 Dominios infinitos y espectros continuos de autovalores. La condición de radiación.

□ Necesidad de la condición de radiación(absorción). □ Condiciones de radiación(absorción) de Sommerfeld. □ Unicidad de la solución. □ Función de Green unidimensional para un espectro continuo. □ Cálculo directo. □ Cálculo mediante el empleo de autofunciones.

5 Solución en serie de potencias de ecuaciones diferenciales ordinarias.

5.1 Introducción.

□ Funciones elementales. □ Funciones especiales o funciones transcendentales superiores. □ Serie de potencias. □ Radio de convergencia. □ Criterio de convergencia del cociente.

5.2 Ecuaciones de primer orden.

□ Resolución por serie de potencias. □ Ejemplo.

5.3 Ecuaciones de segundo orden.

□ Forma general. □ Punto ordinario y punto singular. □ Resolución por serie de potencias alrededor de un punto ordinario. □ Ejemplo. □ Punto singular regular e irregular. □ Serie de Frobenius. □ Resolución por serie de Frobenius alrededor de un punto singular regular. □ Ecuaciones indicial. □ Relación de recurrencia. □ Cuando la relación de recurrencia relaciona a_{n+1} con a_0 y $n \neq 0$. □ Raíces m_1, m_2. □ $m_1 - m_2 \neq n$ con $n = 0, 1, 2, ...$ □ Ejemplo. □ $m_1 = m_2$, raíces iguales. □ Obtención de las dos soluciones linealmente independientes. □ Ejemplo. □ $m_1 - m_2 = n$, $n = 1, 2, 3....$ □ Obtención de las dos soluciones linealmente independientes. □ Ejemplo.

6 Armónicos esféricos. Función hipergeométrica.

6.1 Función generatriz, $1/|\vec{r}-\vec{r_0}|$.

□ Coordenadas esféricas. □ Desarrollos en serie de potencias. □ $r_0 > r \rightarrow (r/r_0)^n P_n(\xi)$. □ $r > r_0 \rightarrow r_0^n/r^{n+1} P_n(\xi)$.

6.2 Ecuación diferencial.

□ Obtención de la ecuación diferencial de Legendre. □ Carácter ortogonal de los polinomios de Legendre $P_n(\xi)$. □ Determinación de $P_n(+1)$. □ Conexión con el desarrollo por polinomios de Legendre introducido en el punto 1.6. □ Fórmula de Rodrigues. □ Integral de normalización. □ Paridad de los armónicos esféricos.

6.3 Relaciones de recurrencia en el índice n.

□ Relación de recurrencia sin involucrar derivadas. □ Relación de recurrencia con derivadas. □ Combinación de las relaciones de recurrencia anteriores.

6.4 Funciones asociadas o adjuntas de Legendre.

□ Introducción de una dependencia con el ángulo ϕ. □ Ecuación diferencial resultante. □ Carácter entero del nuevo índice m. □ Separación de variables en el operador Laplaciana en coordenadas esféricas. □ Funciones asociadas de Legendre $P_n^m(\xi)$. □ Carácter ortogonal de las funciones asociadas de Legendre respecto del subíndice n para igual supraíndice m. □ Fórmula de Rodrigues para $P_n^m(\xi)$. □ Funciones asociadas de Legendre de índice m negativo. □ Utilización de la fórmula de Rodrigues para su definición. □ Relación entre $P_n^m(\xi)$ y $P_n^{-m}(\xi)$.

6.5 Representación integral de los polinomios y funciones asociadas de Legendre.

□ Obtención de la representación integral para los polinomios de Legendre. □ Obtención de la representación integral para las funciones asociadas de Legendre. □ Nueva representación integral para los polinomios de Legendre.

6.6 Relaciones de recurrencia en el índice n de las funciones asociadas de Legendre.

□ Obtención de la relación de recurrencia.

6.7 Integral de normalización de las funciones asociadas de Legendre.

□ Cálculo de la integral $\int_{-1}^{+1} P_n^m(\xi) P_n^{-m}(\xi) d\xi$. □ Obtención de la integral $\int_{-1}^{+1} P_n^m(\xi) P_n^m(\xi) d\xi$.

6.8 Armónicos esféricos.

□ Definición. □ Normalización. □ Ecuación diferencial asociada. □ Ecuación de autovalores. □ Desarrollo en serie de armónicos esféricos de una función $f(cos\theta, \phi)$. □ Funciones $\Pi_n^m(\xi)$. □ El teorema de adición de los armónicos esféricos. □ Demonstración.

6.9 Serie hipergeométrica e hipergeométrica confluente.

□ Ecuación diferencial. □ Obtención de las dos soluciones linealmente independientes por desarrollo en serie de potencias. □ La función hipergeométrica confluente. □ Serie hipergeométrica confluente. □ Ecuación diferencial. □ Representación de los polinomios de Legendre por la función hipergeométrica. □ Representación de las funciones asociadas de Legendre por la función hipergeométrica. □ Expresión explíta de los polinomios de Legendre en serie de ξ^m, $0 \leq m \leq n$.

6.10 Funciones de Legendre de segunda clase.

□ Segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Legendre. □ Carácter singular de dicha solución en $\eta = \pm 1$. □ Función generatriz. □ Obtención de los polinomios de Legendre de segunda clase. □ Representación integral: fórmula de Neumann. □ Demonstración de que $Q_n(\xi)$ satisface la ecuación de Legendre. □ Fórmula de Christoffel. □ Funciones $Q_n^m(\eta)$.

7 Funciones eulerianas.

7.1 Función $\Gamma(z)$.

□ Definición. Representación integral. □ Relación funcional. □ Extensión del dominio de definición de $\Gamma(z)$ mediante la relación funcional. □ Polos de $\Gamma(z)$. □ Constante de Euler γ. □ Integral de Gauss. $\Gamma(\frac{1}{2})$. □ Curva de la función $\Gamma(z)$.

7.2 Función $B(p, q)$ o función beta.

□ Definición. Represntación Integral. □ Conexión con la función $\Gamma(z)$. □ Aplicaciones al cálculo de integrales definidas. □ Fórmula de los complementos. □ Generalización de la función beta a un número arbitario de argumentos. □ Representación integral. □ Volumen de la esfera unidad en un número arbitrario de dimensiones. □ Momentos del cuadrante esférico.

7.3 Fórmula de Stirling.

□ Demonstración. □ Desarrollo de $1/\Gamma(z)$ en producto infinito. □ La función $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ □ Representación integral de $\Psi(z)$. □ Aplicación al cálculo de derivadas de $\Gamma(z)$. □ Desarrollo de $\Psi(z)$ en doble serie.

8 Funciones de Bessel.

8.1 Funciones de Bessel.

8.2 Funciones de Neumann.

8.3 Funciones de Hankel.

8.4 Representación integral de las funciones de Bessel.

8.5 Fórmulas de recurrencia.

8.6 Otras propiedades.