Ampliación de Modelos de Investigación Operativa 04-05
Procesos estocásticos. Colas

1. Encontrar $N(t)$, τ y W_n para el siguiente sistema de colas determinístico $D/D/1/K-1$: $\frac{1}{\lambda} = \frac{7}{3}$, $\frac{1}{\mu} = \frac{14}{3}$, $K = 7$.

2. Encontrar $N(t)$, τ y W_n para el siguiente sistema de colas determinístico $D/D/1/K-1$: $\frac{1}{\lambda} = \frac{5}{2}$, $\frac{1}{\mu} = \frac{10}{3}$, $K = 6$.

3. Calcular la varianza del número de clientes en cola en el sistema $M/M/1$ (caso estacionario).

4. Encontrar el tiempo medio de espera virtual y su varianza (caso estacionario) en el sistema $M/M/1$.

5. En el modelo $M/G/1$ con $\lambda = 1$ y distribución del tiempo de servicio uniforme entre 0 y 1, encontrar la probabilidad de que tras la n-ésima salida del sistema haya j clientes en él, condicionado a que tras la $(n-1)$-ésima salida haya i.

6. En el sistema $M/M/\infty$ con i clientes en el sistema en el instante $t = 0$, obtener el número medio de clientes en el sistema en el instante de tiempo t.

7. Un mecánico está a cargo de la reparación de m máquinas. Si una máquina funciona en el instante t, la probabilidad de que se rompa antes del instante $t+h$ es $\lambda h + o(h)$. Si la máquina está en reparación en el instante t, la probabilidad de que haya sido reparada antes del instante $t+h$ es $\mu h + o(h)$. Las máquinas funcionan independientemente, el mecánico se pone a trabajar en cuanto se rompe una máquina y no para hasta que las ha reparado todas. Identificar el proceso de nacimiento y muerte subyacente y obtener las probabilidades de los estados en el caso estacionario.

8. Considérese el ejercicio anterior pero con r mecánicos. Supuesto que $\lambda/\mu = 0{,}1$, ¿qué es más eficiente, dedicar 4 mecánicos a reparar 10 máquinas cada uno o reunir las 40 máquinas y dedicar sólo 3 mecánicos?

9. Un circuito eléctrico suministra energía a a soldadores, que usan la corriente sólo en forma intermitente. Si en el instante t un soldador usa corriente, la probabilidad de que deje de usarla antes del instante $t+h$ es $\mu h + o(h)$; si no la está usando, la probabilidad de que comience a usarla es $\lambda h + o(h)$. Los soldadores trabajan por separado e independientemente. Identificar el proceso de nacimiento y muerte subyacente y obtener las probabilidades de los estados en el caso estacionario.

10. En el ejercicio anterior, caso transitorio ¿bajo qué condiciones sobre $A(t)$

$$P_n(t) = \frac{a!}{n!(a-n)!} A(t)^n (1 - A(t))^{a-n}$$

es solución?

11. Un cliente, que llamaremos C, llega en el instante 0 a una cola con un solo servidor con tiempo de servicio exponencial de tasa μ. Las llegadas se producen según un proceso de Poisson de tasa λ. La disciplina de la cola es *primero en llegar, primero en ser servido*. Diremos que el sistema está en el estado 0 si el cliente está siendo servido, en el estado -1 si ya ha sido servido, en el estado $n \geq 1$ si hay $n-1$ clientes en cola que van a ser servidos antes que C. Denotamos con $P_n(t)$ la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado n en el instante t. Demostrar que

$$P'_{-1}(t) = \mu P_0(t)$$

$$P'_n(t) = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), \; n \geq 0$$

12. En el caso anterior, supóngase que $P_r(0) = 1$. Encontrar $P_k(t)$.

13. Generalizar el ejercicio 11 al caso de dos servidores.

14. Un cliente, que llamaremos S, llega en el instante 0 a una cola con un solo servidor con tiempo de servicio exponencial de tasa μ. Las llegadas se producen según un proceso de Poisson de tasa λ. La disciplina de la cola es *cualquier cliente en cola tiene la misma probabilidad de ser atendido*. Diremos que el sistema está en el estado 0 si el cliente está siendo servido, en el estado -1 si ya ha sido servido, en el estado $n \geq 1$ si hay $n-1$ clientes en cola que pueden ser servidos antes que S. Denotamos con $P_n(t)$ la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado n en el instante t. Demostrar que

$$P'_{-1}(t) = \mu P_0(t)$$

$$P'_n(t) = -(\mu + \lambda)P_n(t) + \frac{n\mu}{n+1}P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), \; n \geq 2$$

$$P'_1(t) = -(\mu + \lambda)P_1(t) + \frac{\mu}{2}P_2(t)$$

$$P'_0(t) = -\mu P_0(t) + \mu P_1(t) + \frac{\mu}{2}P_2(t) + \frac{\mu}{3}P_3(t) + \dots$$

15. Un cliente, que llamaremos T, llega en el instante 0 a una cola con un solo servidor con tiempo de servicio exponencial de tasa μ. Las llegadas se producen según un proceso de Poisson de tasa λ. La disciplina de la cola es *último en llegar, primero en ser atendido*. Diremos que el sistema está en el estado 0 si el cliente está siendo servido, en el estado -1 si ya ha sido servido, en el estado $n \geq 1$ si hay $n-1$ clientes en cola que van a ser servidos antes que T. Denotamos con $P_n(t)$ la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado n en el instante t. Demostrar que

$$P'_{-1}(t) = \mu P_0(t)$$

$$P'_n(t) = -(\mu + \lambda)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t), \; n \geq 2$$

$$P'_1(t) = -(\mu + \lambda)P_1(t) + \mu P_2(t)$$

$$P'_0(t) = -\mu P_0(t) + \mu P_1(t)$$

16. El proceso de Polya es de nacimiento puro, no estacionario, donde λ_n depende del tiempo:

$$\lambda_n(t) = \frac{1 + an}{1 + at}.$$

Demuéstrese que la solución con condición inicial $P_0(0) = 1$ es

$$P_0(t) = (1 + at)^{-\frac{1}{a}}$$

$$P_n(t) = \frac{(1 + a)(1 + 2a) \cdots (1 + (n - 1)a)}{n!} t^n (1 + at)^{-\frac{na+1}{a}}$$

17. En el ejercicio anterior, calcular la media.