Problemas Ampliación de Modelos de I.O. 04/05
Simulación

Nota: utilizar en los problemas de esta hoja los siguientes números como valores generados de $U(0,1)$, comenzando desde el primero en cada apartado:
0.082 0.475 0.071 0.841 0.060 0.293 0.917 0.368 0.775 0.328
0.482 0.149 0.874 0.287 0.773 0.976 0.493 0.888 0.827 0.020
0.141 0.144 0.501 0.022 0.593 0.010 0.774 0.651 0.770 0.708

1. Utilizar el método de la transformación inversa para generar 5 valores aleatorios de las siguientes distribuciones:
   a) Uniforme $U(10,15)$.
   b) Exponencial $exp(0{,}3)$.
   c) Weibull $W(1, 0{,}5)$.
   d) Máximo de 5 variables de Cauchy $C(0,1)$ independientes.
   e) Mínimo de 5 variables $U(0,1)$ independientes.
2. Utilizar algún método de aceptación y rechazo para generar 3 valores aleatorios de las siguientes distribuciones:
   a) Beta $Be(2,2)$.
   b) Gamma $\gamma(1, 1{,}5)$.
3. Utilizar un método de cociente de uniformes para generar tres valores aleatorios de las siguientes distribuciones:
   a) Normal $N(0,1)$.
   b) Cauchy $C(0,1)$.
   c) Función de densidad $f(x) = e^{-|x|}/2$.
4. Generar 3 valores aleatorios de las siguientes distribuciones utilizando un método eficiente:
   a) Poisson $P(6)$.
   b) Geométrica $G(0{,}2)$ con valores 0,1,2...
   c) Binomial $B(10, 0{,}4)$.
   d) Hipergeométrica $H(10, 8, 0{,}5)$.
   e) Binomial negativa $BN(0{,}7, 6)$.
   f) F de Snedecor $F_{3,4}$.
5. Utilizar el método del alias para generar 5 valores de la siguiente variable:

$$P(X=1) = \tfrac{1}{8},\ P(X=2) = \tfrac{2}{8},\ P(X=3) = \tfrac{3}{8},\ P(X=4) = \tfrac{2}{8}.$$

6. Comprobar que la función siguiente se puede utilizar para construir un método de aceptación y rechazo para la variable $\gamma(1,\alpha)$ con $\alpha > 1$. Desarrollar el correspondiente algoritmo de forma explícita simplificándolo al máximo:

$$\phi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\alpha}} \left(\frac{\alpha}{e}\right)^{\alpha-1} \qquad x > 0$$

   Generar cinco valores para $\alpha = 2$.

7. Comprobar que la función de densidad normal tipificada está acotada superiormente en todos los puntos $x > 0$ por la función de densidad $exp(1)$. Desarrollar, basado en esta relación, un método de aceptación y rechazo para la variable $N(0,1)$, simplificando al máximo el algoritmo. Comprobar su eficiencia. Generar algunos valores.

8. Dar algoritmos de transformación inversa, composición y aceptación y rechazo para generar valores de la siguiente función de densidad, donde a es una constante $0 < a < \frac{1}{2}$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{a(1-a)} & 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{1-a} & a \leq x \leq 1-a \\ \frac{1-x}{a(1-a)} & 1-a \leq x \leq 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

9. Generar tres valores de una variable exponencial de parámetro 1 utilizando el método de composición para dividir el intervalo $[0,\infty)$ en subintervalos $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)\ldots$

10. Describir algoritmos para las siguientes distribuciones y generar tres valores de cada una:

    a) $f(x,y) = e^{-x-y}$, $x, y \geq 0$

    b) $f(x,y) = \frac{1}{2} y e^{-xy}$, $0 \leq y \leq 2$, $x \geq 0$

    c) $N(\mu, \Sigma)$ con $\mu = (1,2,3)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11. a) Generar una muestra ordenada de tamaño 8 de una distribución $exp(5)$.

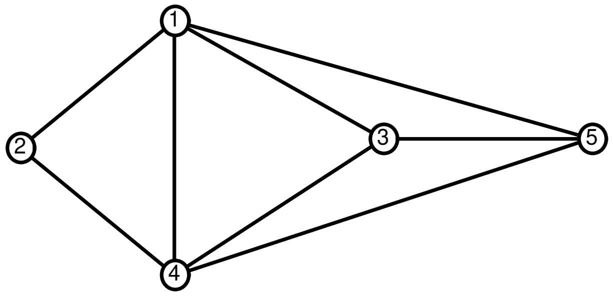
    b) Considérense cinco vv.aa. $B(3, 0{,}5)$ independientes y la v.a. consistente en seleccionar la mediana de estas cinco. Generar una muestra de tal mediana de tamaño 6.

12. Sean $X_1,\ X_2\ldots$ vv.aa. continuas no negativas independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad f y función de distribución F. Diremos que tiene lugar un record en n si $X_n > \max\{X_0, \ldots, X_{n-1}\}$, siendo $X_0 = 0$, y en tal caso diremos que X_n es un valor record. Considérese el proceso estocástico $\{N(t),\ t \geq 0\}$ dado por el número de valores record menores o iguales que t. (Por ejemplo, si $X_0 = 0$, $X_1 = 1{,}1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 0{,}5$, $X_4 = 1{,}2$, $X_5 = 2{,}3$, han tenido lugar sucesos en los momentos $t = 1{,}1$, $t = 2$, $t = 2{,}3$.)

    a) Sean X_i vv.aa.ii. $exp(0{,}1)$. Simular el proceso hasta el quinto suceso.

    b) Sabiendo que un proceso así definido es de Poisson no homogéneo con intensidad $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$, volver a responder al apartado (a).

13. *a*) Simular un paseo aleatorio de diez pasos que parta del nodo 1 sobre el grafo de la figura:



b) Simular un paseo aleatorio de 800 pasos partiendo del nodo A sobre el grafo de la figura siguiente, donde las etiquetas de los arcos indican la probabilidad de que el paseante elija ese arco al salir del nodo y las etiquetas de los nodos indican la probabilidad de que permanezca en el mismo nodo en un paso dado: