Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2010-11. Examen de junio

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos menos la número 4 que vale 1 punto.

1. Enunciar el Teorema de la Correspondencia para anillos y grupos y demostrarlo en uno de los dos casos.
2. Demostrar que todo grupo cíclico es isomorfo al grupo aditivo del anillo $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ y utilizarlo para demostrar que los subgrupos y grupos cociente de un grupo cíclico son cíclicos.
3. Sean A un anillo e I un ideal de A. Sea $I[X]$ el conjunto de los polinomios con coeficientes en I. Demostrar que $I[X]$ es un ideal primo de $A[X]$ si y sólo si I es un ideal primo de A.
4. Calcular el máximo común divisor y mínimo común múltiplo de $11 + 16i$ y $8 + i$ en $\mathbb{Z}[i]$.
5. Demostrar que $\delta(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$ es una función euclídea en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Encontrar infinitos elementos invertibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
6. Sean G_1 y G_2 dos grupos, $N_1 \trianglelefteq G_1$ y $N_2 \trianglelefteq G_2$. Demostrar que $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong G_1/N_1 \times G_2/N_2$.
7. Calcular los subgrupos de S_4.