Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2010-11. Examen de septiembre

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos menos las número 3 y 6 que valen 2 puntos.

1. Enunciar el Tercer Teorema de Isomorfía para anillos y grupos y demostrarlo en uno de los dos casos.
2. Enunciar y demostrar el Teorema de Lagrange.
3. Sean K un cuerpo, F un subcuerpo de K y α un elemento de K.
   a) Demostrar que existe un único homomorfismo de anillos $f : F[X] \to K$ para el que $f(X) = \alpha$ y $f(a) = a$ para todo $a \in F$.
   b) Demostrar que la imagen A de f es el menor subanillo de K que contiene a F y a α.
   c) Demostrar que si α no es raíz de un polinomio con coeficientes en F entonces A es isomorfo a $F[X]$ y en caso contrario A es un cuerpo.
4. Escribir los números 259, 371 y 96089 como suma de dos cuadrados, si es posible, y para los que no lo sea explicar por qué. Factorizar los tres números en $\mathbb{Z}[i]$.
5. Sea H un subgrupo de un grupo G. Demostrar que $\bigcap_{g\in G} g^{-1}Hg$ es el mayor subgrupo normal de G contenido en H y el subgrupo generado por $\bigcup_{g\in G} g^{-1}Hg$ es el menor subgrupo normal de G que contiene a H.
6. Sea A_4 el grupo alternado en 4 símbolos y sean $a, b \in A_4 \setminus \{1\}$. Supongamos que a es 3-ciclo y b no. el otro no.
   a) Describir el tipo (longitud de los ciclos de la descomposición en producto de ciclos disjuntos) de b.
   b) Demostrar que $A_4 = \langle a, b\rangle$.
   c) Para cada divisor d de 12, calcular el número de subgrupos de A_4 de orden d.