Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2011-12. Examen de julio. Teoría

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos.

1. Enunciado y demostración del Tercer Teorema de Isomorfía para anillos.
2. Sean A y B grupos abelianos y sean $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $b_1, \ldots, b_n$. Demostrar que si $a_1, \ldots, a_n$ es una base de A entonces existe un único homomorfismo $f : A \to B$ tal que $f(a_i) = b_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2011-12. Examen de julio. Problemas

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos menos la última que vale 1 punto.

1. Decir cuales de los siguientes números se pueden escribir como suma de dos cuadrados enteros y para los que la respuesta sea positiva encontrar una expresión en suma de dos cuadrados: 2015 y 9594.
2. Demostrar que si p es número primo entonces $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$ son DIPs con un único ideal maximal.
3. Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo de G. Se llama exponente de G, denotado $\text{Exp}(G)$, al menor entero positivo n tal que $g^n = 1$ para todo $g \in G$. Demostrar
   a) $\text{Exp}(G)$ es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos de G.
   b) $\text{Exp}(H)$ divide a $\text{Exp}(G)$.
   c) Si H es normal en G entonces $\text{Exp}(G/H)$ divide a $\text{Exp}(G)$.
   d) Para todo entero $n \geq 2$,
   $$\text{Exp}(S_n) = \begin{cases} \text{Exp}(S_{n-1}), & \text{si } n \text{ no es potencia de un primo;} \\ p\text{Exp}(S_{n-1}), & \text{si } n \text{ es potencia de un primo } p. \end{cases}$$
4. Sea G un grupo y N un subgrupo normal de G. Decimos que N es normal maximal si $N \neq G$ y los únicos subgrupos normales de G que contienen a N son G y N.
   a) Demostrar que N es normal maximal si y sólo si G/N es simple.
   b) Dar un ejemplo de un subgrupo normal maximal que no sea subgrupo maximal.
   c) Demostrar que si H es un subgrupo de G y N es normal maximal en G que no contiene a H entonces $N \cap H$ es un subgrupo normal maximal de H.
5. Dar la lista completa de los grupos abelianos de orden 36 salvo isomorfismos.