Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2011-12. Examen de junio. Teoría

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos.

1. Dar un ejemplo de dos elementos de un dominio que no tengan máximo común divisor.
2. Enunciado del Teorema de Clasificación de Grupos Abelianos Finitamente Generados y esquema de la demostración, sin detalles técnicos.

Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2011-12. Examen de junio. Problemas

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos menos la última que vale 1 punto.

1. Sean $P = 2\mathbb{Z}[X]$, $I = (1+i)\mathbb{Z}[i]$ y $J = I[X]$, o sea J está formado por los polinomios con coeficientes en I. Demostrar que J es un ideal primo de $\mathbb{Z}[i][X]$ y $\mathbb{Z}[i][X]/J \cong \mathbb{Z}[X]/P \cong \mathbb{Z}_2[X] \cong (\mathbb{Z}[i]/I)[X]$.
2. Sean $a = 3+4i$ y $A = \mathbb{Z}[i]/(a)$. Calcular la factorización de a en $\mathbb{Z}[i]$ y la característica, los ideales y cardinal de A.
3. Sea $\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y consideremos el grupo multiplicativo G generado por las matrices
$$a = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   a) Demostrar que a tiene orden 3, b tiene orden 4, $a^b = a^{-1}$ y G tiene orden 12.
   b) Calcular los subgrupos de G.
4. Encontrar un subgrupo H de S_4 isomorfo a D_4. Demostrar que H no es normal en S_4.
5. Demostrar que todo grupo de orden 15 es abeliano y si G es un grupo arbitrario entonces $[G : Z(G)] \neq 15$.