Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2012-13. Examen de julio. Teoría

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos.

1. Enunciar y demostrar el Teorema Chino de los Restos para Anillos.
2. Enunciar y demostrar el teorema que describe los grupos abelianos finitos indescomponibles.

Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2012-13. Examen de julio. Problemas

Las dos primeras preguntas valen 2 puntos y las dos últimas 1.5.

1. Sea A un anillo. Denotamos por $A[[X]]$ al conjunto de las series en una variable con coeficientes en A, es decir fijamos un símbolo X (indeterminada) y los elementos de $A[[X]]$ son expresiones de la forma
$$\sum_{i\geq 0} a_i X^i = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots$$
con $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$. Definimos en $A[[X]]$ la multiplicación imitando las operaciones de polinomios:
$$\begin{aligned} \sum_{i\geq 0} a_i X^i + \sum_{i\geq 0} b_i X^i &= \sum_{i\geq 0} (a_i + b_i) X^i \\ \left(\sum_{i\geq 0} a_i X^i\right)\left(\sum_{i\geq 0} b_i X^i\right) &= \sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\right) X^i. \end{aligned}$$
(Piense los elementos de $A[[X]]$ como polinomios que pueden tener infinitos coeficientes no nulos.) Demostrar las siguientes afirmaciones:
   a) $A[[X]]$ es un anillo.
   b) Un elemento $a = \sum_{i\geq 0} a_i X^i$ de $A[[X]]$ es invertible en $A[[X]]$ si y sólo si a_0 es invertible en A. Calcula el inverso de $X - 2$ en $\mathbb{Q}[[X]]$.
   c) Si K es un cuerpo entonces todos los ideales de $K[[X]]$ son principales y los no nulos están generados por una potencia de X.
   d) Describir los elementos irreducibles y las factorizaciones de $K[[X]]$, para K un cuerpo.
2. Sea A_4 el grupo alternado en 4 símbolos y sean $a, b \in A_4 \setminus \{1\}$. Supongamos que a es 3-ciclo y b no.
   a) Describir el tipo de b.
   b) Demostrar que $A_4 = \langle a, b\rangle$.
   c) Para cada divisor d de 12, calcular el número de subgrupos de A_4 de orden d.
3. Demostrar que $\delta(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ define una función euclídea en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Encontrar infinitos elementos invertibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. ¿Cómo es posible que se verifique la igualdad $(5 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = (11 - 7\sqrt{2})(2 + \sqrt{2})$ con los cuatro factores irreducibles?
4. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos y sean G_1 y H_1 dos subgrupos normales de G y H, respectivamente, tales que $f(G_1) \subseteq H_1$. Demostrar que existe un único homomorfismo de grupos $\bar{f} : G/G_1 \to H/H_1$ que hace conmutativo el siguiente diagrama,

donde las flechas verticales designan las proyecciones canónicas:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/G_1 & \xrightarrow{\bar{f}} & H/H_1 \end{array}$$

Identificar Ker $(\bar{f})$ e Im $(\bar{f})$ en función de G_1, H_1, Ker (f) e Im (f).