Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2012-13. Examen de junio. Teoría

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos.

1. Sea D un dominio de ideales principales que no es un cuerpo. Demostrar que un ideal de D es máximal si y sólo si es primo y no nulo si y sólo si está generado por un elemento irreducible. Demostrar también que D es dominio de factorización única.

2. Describir todos los grupos abelianos finito. Incluir demostraciones.

Grupos y Anillos. Grado en Matemáticas. 2012-13. Examen de junio. Problemas

Todas las preguntas tienen un valor de 1.5 puntos menos la última que vale 1 punto.

1. Dar la lista completa de todos los polinomios irreducibles de $\mathbb{Z}_2[X]$ de grado menor que 5. Construir cuerpos con 4, 8 y 16 elementos.

2. Sea p un número primo y sea $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$.
   a) Demostrar que $\mathbb{Z}_{(p)}$ es un subanillo de los números racionales.
   b) Demostrar que los ideales no nulos de $\mathbb{Z}_{(p)}$ son todos de la forma $\mathbb{Z}_{(p)}p^n$ para algún $n \geq 0$.
   c) ¿Cuáles son los elementos invertibles de $\mathbb{Z}_{(p)}$? ¿Y los irreducibles?
   d) ¿Es $\mathbb{Z}_{(p)}$ DFU? ¿Y DIP? ¿Y dominio euclídeo? ¿Cómo serán las factorizaciones en $\mathbb{Z}_{(p)}$?
   e) ¿Cuál es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Z}_{(p)}$?
   f) Demostrar que $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}_{(p)}p^n \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^n$ para todo $n \geq 0$.

3. Sea G un grupo finito y sea H un subgrupo de G. Se llama exponente de G, denotado $\text{Exp}(G)$, al menor entero positivo n tal que $g^n = 1$ para todo $g \in G$. Demostrar
   a) $\text{Exp}(G)$ es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos de G.
   b) $\text{Exp}(H)$ divide a $\text{Exp}(G)$.
   c) Si H es normal en G entonces $\text{Exp}(G/H)$ divide a $\text{Exp}(G)$.
   d) Para todo entero $n \geq 2$,
   $$\text{Exp}(S_n) = \begin{cases} \text{Exp}(S_{n-1}), & \text{si } n \text{ no es potencia de un primo;} \\ p\text{Exp}(S_{n-1}), & \text{si } n \text{ es potencia de un primo } p. \end{cases}$$

4. Sea $A = \mathbb{Z}_{12}[X]/(X^2)$ y si $f \in \mathbb{Z}_{12}[X]$ entonces $\overline{f}$ denota su imagen en A. Demostrar
   a) Todo elemento de A tiene la forma $\overline{a + bx}$ con $a, b \in \mathbb{Z}_{12}$
   b) A tiene 48 unidades (elementos invertibles).
   c) Obtener las descomposiciones primaria e invariante del grupo de unidades de A.

5. Sean $D_n = \langle R, S \rangle$, el grupo diédrico donde R es la rotación de ángulo $2\pi/n$ y S una simetría. Sea $N = \langle R^2 \rangle$. Demostrar que N es el menor subgrupo normal de G tal que G/N es abeliano. Calcular $[G : N]$.