UNIVERSIDAD DE MURCIA

Posgrado de Matemáticas

Máster de Matemática Avanzada

TESIS DE MÁSTER

TEOREMAS DE PUNTO FIJO PARA MULTIFUNCIONES Y APLICACIÓN AL EQUILIBRIO WALRASIANO

Sergio Medina Peralta

Curso 2008-2009

Ángel del Río Mateos, Catedrático del Área de Álgebra y Coordinador del Programa de Posgrado de Matemáticas de la Universidad de Murcia,

INFORMA: Que la Tesis de Máster titulada "Teoremas de punto fijo para multifunciones y aplicación al equilibrio walrasiano" ha sido realizada por D. Sergio Medina Peralta, dentro del Máster de Matemática Avanzada.

En Murcia, a 1 de Septiembre de 2009

Fdo: Ángel del Río Mateos

D. Bernardo Cascales Salinas, Catedrático del Área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia y José Rodríguez Ruiz, Profesor Ayudante Doctor del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Murcia,

AUTORIZAN: La presentación de la Tesis de Máster titulada "Teoremas de punto fijo para multifunciones y aplicación al equilibrio walrasiano", realizada por D. Sergio Medina Peralta, bajo nuestra inmediata dirección y supervisión, dentro del Máster de Matemática Avanzada.

En Murcia, a 1 de Septiembre de 2009

Fdo: Bernardo Cascales Salinas   José Rodríguez Ruiz

Dedicatoria

???.

Agradecimientos

???

TEOREMAS DE PUNTO FIJO PARA MULTIFUNCIONES Y APLICACIÓN AL EQUILIBRIO WALRASIANO

Sergio Medina Peralta
dirigida por
Bernardo Cascales Salinas y José Rodríguez Ruiz

1 de Septiembre de 2009

Introducción

Los teoremas de punto fijo juegan un papel muy importante en las matemáticas. Posiblemente los más conocidos sean el Principio de Contracción de Banach y el Teorema de Punto Fijo de Brouwer.

El primer y más sencillo teorema del punto fijo es el teorema de Bolzano, 1817, de los valores intermedios de funciones continuas reales. Cauchy, en un artículo publicado en 1835, utilizó un método de aproximaciones sucesivas para dar un teorema de existencia para algunos tipos generales de ecuaciones diferenciales, para los que no se tenían soluciones explícitas. Picard, en 1890, utilizó métodos de aproximaciones sucesivas para garantizar la existencia de soluciones de algunas ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones frontera. En 1922, Banach demostró, en su tesis doctoral ("Operadores sobre conjuntos abstractos y sus aplicaciones en las ecuaciones integrales"), el teorema del punto fijo que hoy que hoy se conoce como Principio de la Aplicación Contractiva o Principio de Contracción de Banach. Algunos de los resultados sobre existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales, soluciones de sistemas con infinitas ecuaciones e incógnitas, existencia de funciones implícitas, métodos numéricos, existencia de fractales, medidas invariantes, existencia de subespacios invariantes, etc., pueden ser obtenidos como consecuencia de teoremas del punto fijo.

Teorema (Principio de Contracción de Banach)**.** *Sean (M,d) un espacio métrico completo y $T : M \to M$ una contracción. Entonces, T tiene un punto fijo en M, y para cada $x_0 \in M$ la sucesión de iteradas $(T^n x_0)_n$ converge a dicho punto fijo.*

En la tesis doctoral de Banach se utilizaba este resultado para establecer la existencia de una solución en una ecuación integral. Desde entonces, debido a su simplicidad y utilidad, se ha convertido en una herramienta muy común para la resolución de problemas de existencia en muchas ramas del Análisis Matemático. La demostración original de Banach es comunmente conocida.

Teorema (Teorema de Punto Fijo de Brouwer)**.** *Sea $f : B^n \to B^n$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo, es decir existe $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$.*

Existen muchas pruebas de este teorema, en [12] podemos encontrar una utilizando el Lema de Spemer, algunas usan topología algebraica (véase[30]), o geometría diferencial (véase[7]), otras no necesitan más recursos que propiedades básicas de los polinomios y de las funciones diferenciables (véase[14, 27]).

El Teorema de Punto Fijo de Brouwer fue generalizado por S. Kakutani para multifunciones (funciones que llevan puntos a conjuntos). En esta memoria estudiamos el Teorema de Punto Fijo de Kakutani.

Teorema (Teorema de Punto Fijo de Kakutani, 1941)**.** *Sea K un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^m$. Sea $F : K \to \mathscr{P}(K)$ una multifunción de grafo cerrado y con valores convexos. Entonces F tiene un punto fijo, es decir existe $x \in K$ tal que $x \in F(x)$.*

Este teorema es muy útil en ramas como Teoría de Juegos y Economía Matemática como veremos en esta memoria. La demostración del Teorema de Punto Fijo de Kakutani la realizaremos basándonos en el resultado siguiente.

Teorema (Teorema de selección de Michael, 1956)**.** *Sean X un espacio topológico paracompacto e Y un espacio de Banach. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción inferiormente semicontinua cuyos valores son cerrados y convexos. Entonces F tiene una selección continua, es decir una función continua $f : X \to Y$, tal que $f(x) \in F(x)$ para todo $x \in X$.*

Este trabajo lo hemos divido en 3 capítulos.

EL Capítulo 1 se dedica a unas breves reseñas históricas del desarrollo de la economía matemática. Nos ha parecido importante ubicar en su contexto histórico el papel de la matemática en la economía moderna. A la vez, hemos incluido pequeñas biografías de L. E. J. Brouwer y León Walras, quienes con sus trabajos en matemáticas y en economía respectivamente, sentaron las bases de los temas tratados en este trabajo.

EN el Capítulo 2 comenzamos recordando (sección 2.1) algunos conceptos y resultados generales de topología hasta llegar a estudiar los espacios topológicos paracompactos y su relación con las particiones de la unidad. Después estudiamos las propiedades de las multifunciones que nos permitirán demostrar el Teorema de Selección de Michael en la sección 2.3. En esta misma sección veremos algunas aplicaciones de este teorema y terminaremos este capítulo demostrando el Teorema de Punto Fijo de Kakutani utilizando el Teorema de Selección de Michael.

El Capítulo 3 estará dedicado al problema de la existencia del equilibrio walrasiano en una economía de intercambio puro, como una aplicación del Teorema de Punto Fijo de Kakutani. Aquí desarrollaremos un modelo matemático que describirá el problema económico, definiremos el concepto de equilibrio walrasiano y finalmente demostraremos, usando el Teorema de Kakutani, la existencia del equilibrio walrasiano.

La terminología y notación matemática que utilizamos es estándar y es la empleada en la inmensa mayoría de los libros de Análisis Funcional y Topología como [16] y [28], mientras que los conceptos económicos y la terminología empleada para abordar estos conceptos es la utilizada en libros como [1] y [15].

Sergio Medina Peralta
Murcia, a 1 de Septiembre de 2009.

Contenidos

Capítulo 1

Un poco de historia

«CONTENIDOS»

- Pequeña biografía de L. E. J. Brouwer.
- Resumen del desarrollo histórico de la economía matemática.
- Pequeña biografía de León Walras.

EN este trabajo tiene un papel fundamental ha sido la relación entre las matemáticas y la economía. Como se fue desarrollando esta relación y quienes fueron las figuras fundamentales que impulsaron este desarrollo es lo que trataremos de exponer en este capítulo.

Comenzamos con una biografía de L. E. J. Brouwer, quien con su teorema de punto fijo sienta las bases matemáticas sobre las que se realizaran los principales avances en algunos aspectos de la economía matemática. Destacamos aquí el papel que juega la generalización del Teorema de Punto Fijo de Brouwer que realiza S. Kakutani en 1941 para el caso de multifunciones (funciones multivaluadas). Gracias a este teorema se pudo dar una respuesta positiva al problema de la existencia de un equilibrio competitivo o walrasiano para un cierto modelo económico. Terminaremos el capítulo con una biografía de L. Walras, que fue el primero en estudiar el problema del equilibrio económico y es considerado como el padre de la economía matemática.

Importante también en este proceso fueron los aportes en teoría de juegos de J. von Neumann (formulando un teorema de punto fijo que generaliza el de Brouwer) y de J. F. Nash utilizando el teorema de Kakutani.

Cabe señalar que aunque en este trabajo sólo se demuestra una aplicación la utilidad de los teoremas de punto fijo a problemas económicos, el Teorema de punto fijo de Brouwer y sus sucesivas generalizaciones tienen utilidad en infinidad de aplicaciones, tal y como se explica en la sección 1.2.

1.1. L. E. J. Brouwer.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer fue un matemático holandés (27 de febrero de 1881- 2 de diciembre de 1966), graduado en la Universidad de Amsterdam. Sus trabajos ocuparon temas como Lógica, Topología, Teoría de la Medida y Análisis Complejo.

Fue uno de los creadores del movimiento matemático llamado intuicionismo, caracterizado por considerar a la intuición como base de la matemática. Según los intuicionistas, el origen de la matemática es la intuición. Brouwer no admite el infinito más que como devenir, es decir, como posibilidad de, supuesto un conjunto, construir otro con más elementos. Por tanto, las demostraciones para él no podían contar en ningún caso más que con un número finito de pasos, lo que constituye una notable dificultad.

A consecuencia del teorema de Zermelo, que demuestra la equivalencia del axioma de elección y la posibilidad de definir una buena ordenación sobre todo conjunto, Brouwer se dedica a construir una axiomática de la matemática sin incluir el axioma de elección, llegando a adaptar casi toda esta nueva axiomática a sus teorías intuicionistas. No obstante, sin el axioma de elección, una parte considerable de la matemática desaparece completamente, por lo cual la escuela intuicionista posee hoy día pocos adeptos.

Brouwer llevó a cabo casi todo su trabajo en topología entre los años 1909 y 1913. Sus ideas principales fueron expuestas en su libro "Prueba del Teorema de Jordan para n Dimensiones" .

En 1909 realiza una importante visita a París y se encuentra con Poincaré, Hadamard y Borel. Motivado por sus discusiones en París empieza a trabajar en el problema de la invarianza de la dimensión, demostrando el resultado años más tarde.

Como ocurre a veces en matemáticas, Brouwer no fue el primero en demostrar su teorema de punto fijo para aplicaciones $\varphi : B^n \to B^n$. Para $n = 1$, el teorema es una sencilla consecuencia del teorema del valor medio de Bolzano, 1817. Para $n = 2$ y $n = 3$, Brouwer proporcionó una prueba en 1909. Un año más tarde J. Hadamard obtuvo una demostración para n arbitrario; finalmente, en 1912, el propio Brouwer propuso una nueva demostración, en el caso general, distinta de la de Hadamard. El teorema de Punto Fijo de Brouwer cuenta con demostraciones y generalizaciones muy diversas en topología algebraica, geometría diferencial y análisis.

Se sabe que el Teorema del Punto Fijo de Brouwer es equivalente a otros resultados clásicos: S^{n-1} no es un retracto de B^n; no existe un campo de vectores continuo, que no se anule en ningún punto, y sea tangente a la esfera S^{2n} ("teorema de la bola peluda").

Las extensiones al caso infinito dimensional del Teorema de Punto Fijo de Brouwer se deben a Schauder y Tychonoff.

1.2. El papel de la matemática en la economía moderna.

El desarrollo de la economía matemática, según Arrow e Intriligator [3], comienza con las "Investigaciones sobre los Principios Matemáticos de la Teoría de las Riquezas" de Cournot (1938). En una primera etapa se caracterizó por la aplicación del cálculo infinitesimal a la teoría económica. En este período se llegó a una formulación bastante completa del sistema de equilibrio económico general. Esta formulación se debe fundamentalmente a León Walras (1834-1910), cuya obra cumbre "Elementos de Economía Pura" se publicó hace más de un siglo. Además en esta época se estudiaron los problemas de competencia perfecta e imperfecta, de monopolio, de duopolio, la teoría del consumidor y la teoría de la producción basados en los principios de maximización.

Este periodo termina en 1947 con la aparición de la segunda de las dos obras clásicas de esta parte, los "Fundamentos del Análisis Económico" de Samuelson (1947). La primera de las obras con que culmina este período fue "Valor y Capital" de Hicks (1939).

La segunda etapa arranca en el año 1948. Es un período muy breve, que finaliza aproximadamente en 1960. Coincide con la segunda postguerra; durante este período se cambió mucho el enfoque, no tanto de los problemas analizados, sino del tipo de herramientas matemáticas utilizadas. Se le puede asignar el nombre de período de teoría de los conjuntos y de modelos lineales. En este período la obra que juega un papel similar a las obras de Hicks y Samuelson del período anterior es la "Teoría del Valor" de Debreu (1959). Hay un gran desarrollo tanto por el lado de la teoría de los juegos de estrategia y sus aplicaciones al campo económico como el tratamiento de los modelos lineales. Entre los últimos podemos citar especialmente el modelo de insumo-producto de Leontief (1941), los modelos de programación lineal iniciados con los trabajos de Dantzig (1949) y Kantorovich (1942), y el de análisis de actividades en base al trabajo pionero de Koopmans (1951). El logro fundamental de esta época es la demostración de la consistencia del modelo de equilibrio general lograda por Arrow y Debreu en 1952.

En este punto encontramos el nombre de John von Neumann. Nacido en Budapest el 28 de diciembre de 1903, a los 24 años comenzó a enseñar en la Universidad de Berlín, después de haberse doctorado en matemática en Budapest y graduado en química en Zurich.

Al mismo tiempo escribió su artículo sobre la teoría de los juegos de estrategia [22], que marcará el comienzo de su interés por los temas económicos, tema que desarrollaría más tarde en 1944, con el economista austríaco Morgenstern, en el libro “Teoría de juegos y comportamiento económico” que es uno de los pilares sobre los que se basa la teoría económica contemporánea. Es importante notar la similitud formal de la teoría de los juegos de estrategia con el problema de equilibrio económico; tanto que el mismo von Neumann explota dicha relación en 1932 en un trabajo sobre equilibrio en una economía dinámica, dicho trabajo [31] es posiblemente el más importante de economía matemática.

En sus trabajos sobre el equilibrio en una economía dinámica, von Neumann tuvo que elaborar primero un teorema de punto fijo, generalización del teorema de Brouwer. Con ello dio un primer paso en la dirección hacia una matemática propia para economía, que hasta entonces y por mucho tiempo más había adoptado las herramientas propias de otras ciencias como la física. Como la adopción de herramientas a veces también introduce formas de pensamiento propias de otra ciencia, ello en su momento contribuyó a la impopularidad de la matemática entre los economistas.

Von Neumann, que murió el 8 de febrero de 1957 realizó además contribuciones importantes en física cuántica, análisis funcional, teoría de conjuntos, informática, análisis numérico, estadística y muchos otros campos de la matemática. También fue pionero de la computadora digital moderna y trabajó en el Proyecto Manhattan resolviendo pasos fundamentales de la física nuclear involucrada en reacciones termonucleares y la bomba de hidrógeno.

En 1941, Shizuo Kakutani (28 de agosto de 1911 - 17 de agosto de 2004), matemático japonés, utilizando resultados matemáticos desarrollados después de la muerte de Walras, demostró el teorema de punto fijo que lleva su nombre (ver [17]), y que generaliza el teorema de von Neumann ya mencionado. Dicho teorema fue un elemento clave para los adelantos posteriores.

Kakutani estudió en la Universidad Tohoku, en Sendai. Al comienzo de su carrera pasó dos años en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Allí conoció a John von Neumann. Durante la II Guerra Mundial trabajó en la Universidad de Osaka. Más tarde, en 1948, regresó al Instituto de Estudios Avanzados y fue nombrado profesor de la Universidad de Yale en 1949.

En base al teorema de Kakutani se demostraron varias proposiciones esenciales en la teoría de juegos de estrategia. Fundamental fue la demostración de John Forbes Nash Jr [21] (1928 -) de que cada juego finito de n personas tiene un punto de equilibrio.

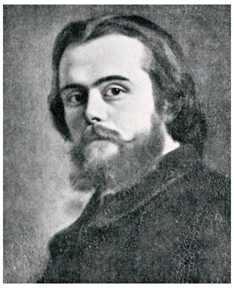
Aun más, usando el teorema de punto fijo de Kakutani, un francés emigrado a los Estados Unidos, Gerard Debreu, pudo demostrar finalmente en 1952 la existencia del equilibrio competitivo en el modelo de Walras. Dicho trabajo fue publicado en 1954, 80 años después de la publicación de los "Elementos de Economía Pura". Este logro coronó la serie de grandes esfuerzos de economistas y matemáticos descriptos anteriormente.

Gerard Debreu (1 de julio de 1921 - 31 de diciembre de 2004) ganó el Premio Nobel de Economía en 1983 por sus trabajos sobre equilibrio general en economías competitivas.

El trabajo de Arrow y Debreu, junto con los casi simultáneos de McKenzie (1955), Gale (1955), y Nikaido (1956), iniciaron un enorme flujo de investigaciones sobre modelos cada vez más complejos.

Por último, un tercer período en el desarrollo histórico de la economía matemática arranca en 1961. Se caracteriza por la integración de las herramientas básicas, el cálculo infinitesimal por un lado y teoría de los conjuntos y modelos lineales por el otro. Esta integración hoy se encuentra muy avanzada. Prácticamente ya no queda campo de la economía que no haya sido tratado en mayor o menor medida desde el punto de vista matemático.

1.3. León Walras.



León Walras (Évreux, Francia, 16 de diciembre de 1834 - Clarens-Montreux, Suiza, 5 de enero de 1910), economista francés de la Escuela de Lausanne.

Es considerado a menudo el fundador de la economía matemática. Walras fue el primero en analizar y describir el equilibrio general de la competencia perfecta. Para Walras, por una parte cada persona, o empresa tiende a maximizar su ganancia y por otra parte la demanda de cada bien debe igualar a su oferta. Concluyó que las funciones de demanda y oferta de un bien dependen tanto de su precio, como de los precios de los demás bienes. Walras construyó un sistema de ecuaciones que definen el equilibrio económico de este sistema. Su teoría se basó en supuestos restringidos -incluyendo la competencia perfecta- pero no explica cómo lograr encontrar los precios de los bienes en un estado de equilibrio económico.

Su trabajo proporcionó los fundamentos para un estudio más importante que amplió la teoría general del equilibrio, el de Kenneth Arrow y Gerard Debreu. Él también desarrolló la teoría marginal del valor con William Stanley Jevons y Carl Menger y ayudó a lanzar la escuela neoclásica en la economía.

En 1860 participó en el Congreso Internacional Tributario reunido en Lausanne y las relaciones académicas que estableció en ese evento lo llevaron diez años después a ocupar la recién creada cátedra de Economía de la Facultad de Derecho, en la Universidad de Lausanne.

En 1869, la facultad de Derecho de la Universidad de Lausanne (en esa época, Academia de Lausanne) decidió establecer la carrera de Economía Política. Recordado por el trabajo presentado en 1860, se le solicita presentarse a un concurso para ser nombrado profesor. Respondió manifestando su intención de crear la Escuela de Matemáticas. Fue nombrado profesor de Economía política, cargo que desempeñó de 1870 a 1892.

La principal contribución de León Walras al desarrollo del análisis económico lo constituye la teoría del equilibrio económico general. Aun cuando el tema de las relaciones entre mercados distintos había sido objeto de estudio por parte de anteriores teóricos, antes de Walras ningún economista había logrado construir un modelo teórico general que sirviera de marco para estudiar las múltiples relaciones que vinculan un mercado con otro.

El impacto de Walras en la evolución de la teoría económica neoclásica fue enorme. Ningún otro economista anterior a él había logrado construir un modelo teórico y un método analítico tan vasto y versátil.

Sin embargo, su obra pasó casi inadvertida en Francia durante los 25 años siguientes a su publicación, y sólo a partir de la década de 1950 la actitud de los estudiosos franceses con respecto a él empezó a cambiar radicalmente. No ocurrió lo mismo con los italianos, entre los cuales Pareto fue gran admirador y ferviente propagandista de la obra walrasiana.

León Walras en el prefacio a la cuarta edición de sus Elementos de "Economía Política Pura o Teoría de la Riqueza Social" en el año 1900 expresaba "En cuanto a aquellos economistas que no saben matemática, que ni siquiera saben qué significa la matemática y que a pesar de ello han tomado la posición de que la matemática no puede servir para elucidar principios económicos, dejadlos ir repitiendo que "la libertad humana jamás permitirá ser volcada a ecuaciones" o que "la matemática ignora las fricciones que lo son todo en la ciencia social" y otras frases de igual fuerza y ampulosidad. Ellos nunca podrán evitar que la teoría de la determinación de los precios bajo competencia libre se convierta en una teoría matemática. Por lo tanto, ellos siempre deberán encarar la alternativa o bien de mantenerse alejados de esta disciplina y en consecuencia elaborar una teoría de economía aplicada sin recurrir a una teoría de economía pura, o bien atacar los problemas de economía pura sin el equipamiento necesario, y con ello producir no sólo una muy mala economía pura sino también una muy mala matemática" (Walras, 1900).

En una publicación póstuma, Walras escribiría "si uno desea cosechar pronto, debe plantar zanahorias y lechuga; si uno tiene la ambición de plantar robles, debe tener el tino para decirse: mis nietos me deberán esta sombra". Como enfatizara Schumpeter [1](1883-1950), Walras elaboró su sistema 'a pesar de saber, a pesar de que debía haber sabido, que no podía esperar éxito o reconocimiento en su propia generación ni entre economistas ni entre matemáticos".

[1]Joseph Alois Schumpeter, economista austriaco, ministro de Finanzas de este país entre 1919 y 1920. Fue profesor de la Universidad de Harvard desde 1932.

Capítulo 2

Teoremas de punto fijo para multifunciones

«CONTENIDOS»

- Estudio de paracompacidad y su relación con particiones de la unidad.
- Estudio de las multifunciones y sus propiedades básicas.
- Demostración del Teorema de Selección de Michael.
- Aplicaciones del Teorema de Selección de Michael.
- Demostración del Teorema de Punto Fijo de Kakutani utilizando el Teorema de Selección de Michael.

EL Teorema de Punto Fijo de Kakutani [17] es una generalización del Teorema de Punto Fijo de Brouwer para multifunciones (funciones que llevan puntos a conjuntos).

Se trata de un resultado con muchos usos en ciencias aplicadas. En particular se cita siempre su utilidad en Economía Matemática y en Teoría de Juegos.

Las multifunciones aparecen de modo natural cuando se consideran imágenes inversas de aplicaciones univaluadas no inyectivas. También cuando se tratan ciertos problemas desde un punto de vista cualitativo y se buscan soluciones comunes a un conjunto de datos que tengan en común ciertas propiedades.

Nuestras referencias básicas para este capítulo son [1, 18].

2.1. Preliminares topológicos.

Definición 2.1.1. *Un espacio topológico X se dice de Hausdorff (o separado) si para cualesquiera dos puntos distintos s y t de X, existen dos abiertos disjuntos S y T de X tales que $s \in S$ y $t \in T$.*

Definición 2.1.2. *Un espacio topológico X se dice regular si para cualquier conjunto cerrado $A \subset X$ y cualquier punto $x \notin A$ existen dos subconjuntos abiertos disjuntos P y Q de X, tales que $A \subset P$ y $x \in Q$.*

Definición 2.1.3. *Un espacio topológico X se dice normal si para cualesquiera dos subconjuntos cerrados y disjuntos A y B de X, existen dos subconjuntos abiertos disjuntos P y Q de X, tales que $A \subset P$ y $B \subset Q$.*

Proposición 2.1.4. *Para un espacio topológico X las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *X es normal.*
ii) *Para cualesquiera dos subconjuntos cerrados disjuntos A y B de X, existe un abierto $G \subset X$ tal que $A \subset G$ y $B \cap \overline{G} = \emptyset$.*
iii) *Para cualquier subconjunto cerrado A contenido en un abierto $U \subset X$ existe un abierto $G \subset X$ tal que $A \subset G \subset \overline{G} \subset U$.*

Demostración. *i) $\Rightarrow$ ii)* Como X es normal, para los cerrados disjuntos A y B, existen dos abiertos G y H tales que $A \subset G$, $B \subset H$ y $G \cap H = \emptyset$. Por lo tanto $G \subset H^c$ y como H^c es cerrado tenemos que $\overline{G} \subset H^c$ o sea $\overline{G} \cap H = \emptyset$ y así $B \cap \overline{G} = \emptyset$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Basta tomar $U = B^c$.

iii) $\Rightarrow$ i) Sean A y B cerrados disjuntos, entonces $A \subset B^c$ y B^c es abierto. Aplicando *iii)* tenemos que existe un abierto G tal que $A \subset G \subset \overline{G} \subset B^c$, por lo tanto tenemos abiertos disjuntos G y $\overline{G}^c$ tales que $A \subset G$ y $B \subset \overline{G}^c$. □

Definición 2.1.5. *Sea X un espacio topológico, decimos que X es compacto si para cualquier cubrimiento por abiertos de X se puede extraer un subcubrimiento finito.*

Considerando los complementos de los abiertos podemos obtener otra formulación equivalente de un espacio topológico compacto. Una familia de conjuntos se dice que tiene la *propiedad de intersección finita* si cada subfamilia finita tiene intersección no vacía. Un espacio topológico X es compacto si, y sólo si, para cada familia $\mathscr{F}$ de conjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de intersección finita, $\mathscr{F}$ tiene intersección no vacía.

Proposición 2.1.6. *Sea A un subconjunto compacto de un espacio topológico de Hausdorff X. Si $x \notin A$ entonces existen abiertos disjuntos V y U de X tales que $A \subset V$ y $x \in U$.*

Demostración. Para cada punto $a \in A$, como el espacio es de Hausdorff, existen abiertos V_a y U_a tales que $a \in V_a$, $x \in U_a$ y $V_a \cap U_a = \emptyset$. Como $\{V_a : a \in A\}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto A podemos extraer un subcubrimiento finito $\{V_{a_1}, V_{a_2}, \ldots, V_{a_n}\}$. Tomemos $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$ y $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}$, entonces V y U son abiertos disjuntos, $A \subset V$ y $x \in U$. $\square$

Corolario 2.1.7. *Sean A y B subconjuntos compactos disjuntos en un espacio de Hausdorff X. Entonces existen subconjuntos abiertos disjuntos P y Q de X tales que $A \subset P$ y $B \subset Q$.*

Demostración. Para cada punto $b \in B$ existen conjuntos abiertos disjuntos G_b y H_b tales que $A \subset G_b$ y $b \in H_b$. La familia de conjuntos $\{H_b : b \in B\}$ es un cubrimiento por abiertos del conjunto B, por lo tanto podemos tomar un subcubrimiento finito $\{H_{b_1}, H_{b_2}, \ldots, H_{b_k}\}$. Tomemos

$$G = \bigcap_{i=1}^{k} G_{b_i}, \qquad H = \bigcup_{i=1}^{k} H_{b_i}.$$

Entonces G y H son abiertos disjuntos que contienen a los conjuntos A y B respectivamente. $\square$

Corolario 2.1.8. *Todo subconjunto compacto A en un espacio topológico de Hausdorff X es cerrado.*

Demostración. Por el contrareciproco vamos a ver que si $x \notin A$ entonces $x \notin \overline{A}$. Si $x \notin A$ entonces por la Proposición 2.1.6 existe una vecindad V del punto x tal que $V \cap A = \emptyset$, por lo tanto $x \notin \overline{A}$. Esto prueba que A es cerrado. $\square$

Proposición 2.1.9. *Un subconjunto cerrado C de un espacio topológico compacto X es compacto.*

Demostración. Tomemos una familia de abiertos $\mathscr{G}$ que cubren al conjunto C. Entonces la familia $\mathscr{G}$ junto con el conjunto C^c forman un cubrimiento por abiertos de X. Podemos cubrir X con el conjunto C^c junto a un número finito de conjuntos $G_1, G_2, \ldots, G_n$ de $\mathscr{G}$. De aquí obtenemos que el cubrimiento finito $G_1, G_2, \ldots, G_n$ cubre al subconjunto C. $\square$

Como consecuencia directa de la Proposición 2.1.9 y el Corolario 2.1.7 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.10. *Todo espacio topológico compacto y Hausdorff es normal.*

Proposición 2.1.11. *Sea (F_n) una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados de un espacio topológico compacto X. Si $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ está contenido en un abierto G de X, entonces existe n_0 tal que para cada $n > n_0$ se tiene que $F_n \subset G$.*

Demostración. Como $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subset G$ tenemos $G^c \subset (\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)^c$. Ahora $(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$ y G^c es compacto por ser un subconjunto cerrado del espacio compacto X. Por lo tanto podemos extraer un subcubrimiento finito tal que $\bigcup_{n=1}^{k} F_n^c \supset G^c$. Así que $\bigcap_{n=1}^{k} F_n \subset G$ y, como la sucesión de conjuntos es decreciente, tenemos además que $\bigcap_{n=1}^{k} F_n = F_k$. Tomando $n_0 = k$ se cumple que para cada $n > n_0$ se tiene que $F_n \subset G$. $\square$

Definición 2.1.12. *Sea X un espacio topológico, dos subconjuntos A y B de X se dicen completamente separados si existe una aplicación continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 0$ para cualquier $x \in A$ y $f(x) = 1$ para cualquier $x \in B$.*

Teorema 2.1.13 (Lema de Urysohn)**.** *Si X es un espacio topológico normal, entonces cualesquiera dos subconjuntos de X disjuntos y cerrados están completamente separados.*

El teorema anterior podemos encontrarlo como Teorema 12.2 en [16].

Una familia de subconjuntos de un espacio topológico se dice *localmente finita* si cada punto del espacio tiene una vecindad que interseca sólo a un número finito de conjuntos de dicha familia. Si $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_2$ son dos cubrimientos de un espacio topológico, $\mathfrak{C}_1$ se dice que es un *refinamiento* de $\mathfrak{C}_2$ si cada elemento de $\mathfrak{C}_1$ es un subconjunto de un elemento de $\mathfrak{C}_2$.

Definición 2.1.14. *Una familia $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ de funciones continuas $f_\alpha : X \to [0,1]$ definidas en un espacio topológico X, se dice que es una partición de la unidad en X si para todo $x \in X$ se cumple que $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$, donde la igualdad anterior significa que para cada $x \in X$ el conjunto $\{\alpha \in A : f_\alpha(x) > 0\} = \{\alpha_j : j \in \mathbb{N}\}$ es numerable y la correspondiente serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\alpha_i}(x)$ converge a 1.*

Dada una partición de la unidad $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ en un espacio topológico X, la familia de los conjuntos abiertos $V_\alpha = \{x \in X : f_\alpha(x) > 0\}$, $\alpha \in A$, es un cubrimiento de X.

Cuando este cubrimiento es localmente finito se dice que la partición de la unidad es *localmente finita*.

Cuando este cubrimiento es un refinamiento de un cubrimiento por abiertos $\{\mathscr{U}_i : i \in I\}$ de X, se dice que la partición de la unidad esta *subordinada* al cubrimiento $\{\mathscr{U}_i : i \in I\}$.

Proposición 2.1.15. *Sea X un espacio topológico normal y $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ un cubrimiento finito por abiertos de X. Entonces existe una partición de la unidad subordinada a este cubrimiento.*

Demostración. Empecemos construyendo un cubrimiento por abiertos $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ de X que cumpla que:

i) $V_i \subset \overline{V_i} \subset G_i$

ii) $\{V_i : i \leq j\} \cup \{G_i : i > j\}$ es un cubrimiento por abiertos de X para cada j.

Construyamos por inducción este nuevo cubrimiento. Tomemos $F_1 = X \setminus \bigcup_{i=2}^{n} G_i$, entonces F_1 es cerrado y $F_1 \subset G_1$ porque $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ es un cubrimiento de X. Como X es normal encontramos un abierto V_1 tal que $F_1 \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset G_1$, por lo que se cumple *i)* y sin problemas se verifica que se cumple *ii)* para $j = 1$.

Supongamos que hemos construido los primeros $k-1$ conjuntos $\{V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}\}$ cumpliendo *i)* y *ii)* para $j = k-1$. Como $\{V_i : i \leq k-1\} \cup \{G_i : i > k-1\}$ es un cubrimiento por abiertos de X, el cerrado

$$F_k = X \setminus ((\bigcup_{i=1}^{k-1} V_i) \bigcup (\bigcup_{i=k+1}^{n} G_i))$$

cumple $F_k \subset G_k$, y de nuevo por la normalidad de X existe un abierto V_k tal que se cumple $F_k \subset V_k \subset \overline{V_k} \subset G_k$. Por construcción se cumple *ii)* para $j = k$.

Como X es normal, por el lema de Urysohn (Teorema 2.1.13)construimos una familia de funciones continuas $\psi_i : X \to [0,1]$ que separan completamente a los conjuntos cerrados $X \setminus G_i$ y $\overline{V_i}$; es decir, $\psi_i(x) = 0$ para cualquier $x \in X \setminus G_i$ y $\psi_i(x) = 1$ para cualquier $x \in \overline{V_i}$.

Finalmente definamos $\phi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \psi_j(x)}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$ es un cubrimiento de X para cualquier $x \in X$ existe por lo menos un V_i tal que $x \in V_i$, así que

$x \in \overline{V_i}$, por lo que la sumatoria $\sum_{j=1}^{n} \psi_j(x) \neq 0$. Las funciones ϕ_i son continuas y además $\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ para todo $x \in X$. Para cada índice i y para cualquier $x \in (G_i)^c$ se cumple que $\phi_i(x) = 0$, luego $\{x \in X : \phi_i(x) > 0\} \subset G_i$. Así que la familia $\{\phi_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ es una partición de la unidad de X subordinada al cubrimiento $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$. $\square$

Definición 2.1.16. *Un espacio topológico X se dice paracompacto si es Hausdorff y si cualquier cubrimiento por abiertos tiene un refinamiento locamente finito.*

De la definición anterior se sigue inmediatamente que un espacio compacto y Hausdorff es paracompacto. También tenemos que *todo espacio métrico es paracompacto*, este resultado se puede ver como Corolario 2a, página 236 en [19].

El concepto de espacio paracompacto fue introducido en 1944 por Dieudonné. Los espacios paracompactos generalizan simultáneamente a los espacios compactos y a los métricos y a pesar de que fueron definidos mucho después que éstos, rápidamente se volvieron populares tanto para los topólogos como para los analistas. En la actualidad son considerados como una de las clases de espacios topológicos más importantes.

Gracias a la introducción de la paracompacidad, se generalizaron muchos teoremas de topología y análisis y se simplificaron muchas demostraciones.

Lema 2.1.17. *Para cada familia de conjuntos localmente finita $\mathbb{A}$ de un espacio topológico X se cumple*

$$\overline{\bigcup\{A : A \in \mathbb{A}\}} = \bigcup\left\{\overline{A} : A \in \mathbb{A}\right\}.$$

Demostración. La inclusión $\overline{\bigcup\{A : A \in \mathbb{A}\}} \supset \bigcup\left\{\overline{A} : A \in \mathbb{A}\right\}$ se verifica siempre, aunque la familia no sea localmente finita, esto es consecuencia del hecho de que $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene al conjunto A .

Por otra parte si $x \in \overline{\bigcup\{A : A \in \mathbb{A}\}}$, entonces por ser la familia $\mathbb{A}$ localmente finita existe una vecindad V_x de x tal que la subfamilia

$$\{A \in \mathbb{A} : A \cap V_x \neq \emptyset\} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$$

es finita.

Afirmamos que existe $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $x \in \overline{A_j}$ y esto termina la prueba pues se tiene que $x \in \bigcup\left\{\overline{A} : A \in \mathbb{A}\right\}$.

Supongamos que no, entonces para cada $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se tiene $x \notin \overline{A_j}$ y podemos tomar una vecindad U_x de x tal que $U_x \cap A_j = \emptyset$ para $1 \leq j \leq m$. Entonces $U_x \cap V_x$ es una vecindad de x y cumple $(U_x \cap V_x) \cap \bigcup\{A : A \in \mathbb{A}\} = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $x \in \overline{\bigcup\{A : A \in \mathbb{A}\}}$. $\square$

Proposición 2.1.18. *Todo espacio topológico paracompacto X es normal.*

Demostración. Tomemos $A, B \subset X$ cerrados y disjuntos. Fijemos $a \in A$. Para cada $x \in B$ existen abiertos disjuntos U_x y V_x tales que $a \in U_x$ y $x \in V_x$. La familia de conjuntos $\{V_x : x \in B\} \cup \{B^c\}$ es un cubrimiento por abiertos de X y, como X es un espacio paracompacto, tiene un refinamiento localmente finito $\{W_s : s \in S\}$.

Sea $S_0 = \{s \in S : W_s \cap B \neq \emptyset\}$. Como $\{W_s : s \in S\}$ es un cubrimiento de X, es claro que $B \subset \widetilde{V_a} := \bigcup_{s \in S_0} W_s$. Además $\{W_s : s \in S\}$ es localmente finito y según el Lema 2.1.17 se cumple

$$\bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s} = \overline{\bigcup_{s \in S_0} W_s},$$

por lo que $\widetilde{U_a} := X \setminus \bigcup_{s \in S_0} \overline{W_s}$ es abierto. Afirmamos que $a \in \widetilde{U_a}$. En efecto, sea $s \in S_0$. Sabemos que W_s está contenido en algún V_x para cierto $x \in B$. Como $U_x \cap V_x = \emptyset$ se tiene $U_x \cap W_s = \emptyset$, luego $\overline{W_s} \cap U_x = \emptyset$, (por ser U_x abierto). Además $a \in U_x$, por tanto $a \notin \overline{W_s}$. Al ser $s \in S_0$ arbitrario, $a \in \widetilde{U_a}$. Observamos que los abiertos $\widetilde{U_a}$ y $\widetilde{V_a}$ son disjuntos y $B \subset \widetilde{V_a}$.

Consideramos ahora el cubrimiento por abiertos $\{\widetilde{U_a} : a \in A\} \cup \{A^c\}$ de X, que tiene un refinamiento localmente finito $\{G_t : t \in T\}$. Ahora se considera $T_0 = \{t \in T : G_t \cap A \neq \emptyset\}$. Es claro que $O_A := \bigcup_{t \in T_0} G_t$ es un abierto que contiene a A. Sea $t \in T_0$. Tenemos $G_t \cap A \neq \emptyset$ y, como $\{G_t : t \in T\}$ refina el cubrimiento $\{\widetilde{U_a} : a \in A\} \cup \{A^c\}$, existe $a \in A$ tal que $G_t \subset \widetilde{U_a}$. Pero $\widetilde{U_a} \cap \widetilde{V_a} = \emptyset$, por tanto $G_t \subset X \setminus \widetilde{V_a}$, así que $\overline{G_t} \subset X \setminus \widetilde{V_a}$ lo que implica que $\overline{G_t} \cap \widetilde{V_a} = \emptyset$. Usando que $B \subset \widetilde{V_a}$ se tiene $B \cap \overline{G_t} = \emptyset$. Como $t \in T_0$ era arbitrario, esto prueba que $B \cap (\bigcup_{t \in T_0} \overline{G_t}) = \emptyset$. De nuevo por el Lema 2.1.17 $\bigcup_{t \in T_0} \overline{G_t}$ es un cerrado y así $O_B := X \setminus \bigcup_{t \in T_0} \overline{G_t}$ es un abierto que contiene a B y verifica que $O_A \cap O_B = \emptyset$. $\square$

Proposición 2.1.19. *Sea X un espacio topológico paracompacto y $\mathscr{G}'$ un cubrimiento por abiertos de X. Entonces existe una partición de la unidad localmente finita subordinada a este cubrimiento.*

Demostración. Como el espacio es paracompacto tomamos un refinamiento localmente finito $\mathscr{G}$ del cubrimiento $\mathscr{G}'$.

El espacio es Hausdorff y por la Proposición 2.1.18 normal. Podemos entonces seleccionar para cada x de X un abierto U_x tal que $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset G$ para algún $G \in \mathscr{G}$. La familia de conjuntos $\{U_x : x \in X\}$ es un cubrimiento por abiertos de X y, como el espacio es paracompacto de este cubrimiento tomamos un refinamiento localmente finito $\mathscr{U}$.

Por construcción podemos tomar para cada $U \in \mathscr{U}$ un conjunto $G_U \in \mathscr{G}$ tal que la clausura de U satisface $\overline{U} \subset G_U$. Denotemos por $\mathscr{W}$ a la familia $\{G_U : U \in \mathscr{U}\}$.

Como $\mathscr{W}$ es una subfamilia de $\mathscr{G}$, también será localmente finita. Para cada $W \in \mathscr{W}$ tomemos $F_W = \cup\left\{\overline{U} : U \in \mathscr{U} \text{ y } G_U = W\right\}$. Como $\mathscr{U}$ es localmente finito, aplicando el Lema 2.1.17 tenemos que F_W es un conjunto cerrado.

Para cada $W \in \mathscr{W}$ se tiene $F_W \subset W$, y así por el Lema de Urysohn (Teorema 2.1.13) podemos encontrar una función continua $g_W : X \to [0,1]$ tal que $g_W(x) = 1$ para $x \in F_W$ y $g_W(x) = 0$ para $x \in X \setminus W$. Al ser la familia $\mathscr{W}$ un cubrimiento localmente finito la función $g = \sum_{W \in \mathscr{W}} g_W$ está bien definida y es continua. Además g es estrictamente positiva, en efecto para cada $x \in X$ existe $U \in \mathscr{U}$ con $x \in U$, así $x \in F_W$ para algún $W \in \mathscr{W}$ y como la familia $\mathscr{U}$ cubre X los conjuntos cerrados F_W cubren X se tiene que $g(x) > 0$.

Tomando la familia de funciones continuas $\{h_W : W \in \mathscr{W}\}$ definidas por la fórmula $h_W(x) = g_W(x)/g(x)$ se tiene que:

i) $\sum_{W \in \mathscr{W}} h_W(x) = 1$ para cualquier $x \in X$.

ii) $h_W(x) = 0$ para cualquier $x \in X \setminus W$.

Además la familia de abiertos $\{x \in X : h_W(x) > 0\}, W \in \mathscr{W}$, es localmente finita, porque $h_W(x) > 0$ sólo si $x \in W$ y $\mathscr{W}$ es localmente finito. Por lo tanto, para cada $x \in X$ el conjunto $\{W \in \mathscr{W} : h_W(x) > 0\}$ es finito y la familia de funciones continuas $\{h_W : W \in \mathscr{W}\}$ es una partición de la unidad localmente finita.

Falta sólo verificar que $\{h_W : W \in \mathscr{W}\}$ está al cubrimiento $\mathscr{G}'$. Por *ii)* tenemos que $V_W = \{x \in X : h_W(x) > 0\} \subset W$ para cada $W \in \mathscr{W}$. Como $\mathscr{W}$ es una subfamilia del cubrimiento $\mathscr{G}$ y éste a su vez es un refinamiento del cubrimiento $\mathscr{G}'$, cada V_W está contenido en algún $G' \in \mathscr{G}'$.

Por lo tanto, la familia de funciones continuas $\{h_W : W \in \mathscr{W}\}$ es la partición de la unidad que queríamos encontrar. $\square$

2.2. Multifunciones y sus propiedades básicas.

Definición 2.2.1. *Una multifunción F del conjunto X al conjunto Y es una función*

$$F : X \to \mathscr{P}(Y)$$

con la propiedad de que $F(x) \neq \emptyset$ para cualquier $x \in X$. Por $\mathscr{P}(Y)$ denotamos la familia de todos los subconjuntos de Y.

Si $y \in Y$, denotamos por $F^{-1}(y)$ al conjunto:

$$F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}.$$

Si $A \subset X$, denotamos por $F(A)$ al conjunto:

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x) = \left\{y \in Y : F^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset\right\}.$$

La preimagen *débil* o *inferior* de un conjunto $B \subset Y$ la denotamos por $F^w(B)$, y la definimos de la siguiente forma:

$$F^w(B) = \bigcup_{y \in B} F^{-1}(y) = \{x \in X : F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

La preimagen *fuerte* o *superior* de un conjunto $B \subset Y$ la denotamos por $F^s(B)$, y se define como:

$$F^s(B) = \{x \in X : F(x) \subset B\}.$$

Definición 2.2.2 (Inferiormente semicontinua)**.** *Sean X e Y espacios topológicos, una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ se dice inferiormente semicontinua si para cualquier abierto G en Y el conjunto $F^w(G) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ es abierto en X.*

Definición 2.2.3 (Superiormente semicontinua)**.** *Sean X e Y espacios topológicos, una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ se dice superiormente semicontinua si para cualquier abierto G en Y el conjunto $F^s(G) = \{x \in X : F(x) \subset G\}$ es abierto en X.*

Si $f : X \to Y$ es una función entre los espacios topológicos X e Y, podemos considerar a f como un caso especial de multifunción, para la que los conceptos de semicontinuidad inferior y superior coinciden con la noción habitual de continuidad que tenemos para funciones.

Proposición 2.2.4. *Sean X e Y espacios topológicos. Una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es inferiormente semicontinua si y sólo si, para cualquier $x_0 \in X$ y cada red $(x_\alpha : \alpha \in A)$ de X que converge a x_0 y cada abierto G en Y tal que $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$, se tiene que existe α_0 tal que $F(x_\alpha) \cap G \neq \emptyset$ para cualquier $\alpha > \alpha_0$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Tenemos que $F^w(G) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ es abierto y contiene a x_0. Como $x_\alpha \to x_0$, existe α_0 tal que para cualquier $\alpha > \alpha_0$ se cumple que x_α está en la vecindad $F^w(G)$ de x_0, es decir $F(x_\alpha) \cap G \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$ Por reducción al absurdo. Supongamos que existe G abierto tal que el conjunto $F^w(G) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ no es abierto. Entonces existe $x_0 \in F^w(G)$ tal que x_0 no es un punto interior de $F^w(G)$.

Consideremos el conjunto dirigido A de todas las vecindades de x_0 ordenadas por inclusión, es decir si $U \in A$ y $V \in A$ se tiene que $U > V$ si y sólo si $V \subset U$.

Como x_0 no es un punto interior de $F^w(G)$ no existe una vecindad V de x_0 de forma que $V \subset F^w(G)$, o sea para cualquier $V \in A$ existe al menos un elemento x_V que está en V y no está en $F^w(G)$. Tomemos la red $(x_V : V \in A)$, que converge a x_0. Además $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$ pues $x_0 \in F^w(G)$. Entonces existe $V_0 \in A$ tal que para cualquier $V \in A$ contenido en V_0 se cumple que $F(x_V) \cap G \neq \emptyset$, es decir $x_V \in F^w(G)$, y esto contradice la propia construcción de la red. $\square$

Proposición 2.2.5. *Sean X e Y espacios topológicos. Una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es superiormente semicontinua si y sólo si, para cualquier $x_0 \in X$ y cada red $(x_\alpha : \alpha \in A)$ de X que converge a x_0 y cada abierto G en Y tal que $F(x_0) \subset G$, se tiene que existe α_0 tal que $F(x_\alpha) \subset G$ para cualquier $\alpha > \alpha_0$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Tenemos que $F^s(G) = \{x \in X : F(x) \subset G\}$ es abierto y contiene a x_0. Como $x_\alpha \to x_0$, existe α_0 tal que para cualquier $\alpha > \alpha_0$ se cumple que x_α está en la vecindad $F^s(G)$ de x_0, es decir $F(x_\alpha) \subset G$.

$\Leftarrow$ Por reducción al absurdo. Supongamos que existe G abierto tal que el conjunto $F^s(G) = \{x \in X : F(x) \subset G\}$ no es abierto. Entonces existe $x_0 \in F^s(G)$ tal que x_0 no es un punto interior de $F^s(G)$.

Consideremos el conjunto dirigido A de todas las vecindades de x_0 ordenadas por inclusión, es decir si $U \in A$ y $V \in A$ se tiene que $U > V$ si y sólo si $U \subset V$.

Como x_0 no es un punto interior de $F^s(G)$ no existe una vecindad V de x_0 de forma que $V \subset F^s(G)$, o sea para cualquier $V \in A$ existe al menos un elemento x_V que está en V

y no está en $F^s(G)$. Tomemos la red $(x_V : V \in A)$ que converge a x_0. Además $F(x_0) \subset G$ pues $x_0 \in F^s(G)$. Entonces existe $V_0 \in A$ tal que para cualquier $V \in A$ contenido en V_0 se cumple que $F(x_V) \subset G$, es decir $x_V \in F^s(G)$, y esto contradice la propia construcción de la red. □

Proposición 2.2.6. *Sean X e Y espacios topológicos. Si f es una función sobreyectiva de X a Y, entonces la multifunción $f^{-1} : Y \to \mathscr{P}(X)$ es inferiormente semicontinua si y sólo si f es una aplicación abierta.*

Demostración. Se deduce de la igualdad

$$(f^{-1})^w(G) = \left\{y \in Y : f^{-1}(y) \cap G \neq \emptyset\right\} = f(G),$$

válida para todo abierto G en X. □

Definición 2.2.7. *Si X es un conjunto e Y un espacio topológico y $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción, denotamos por $\mathrm{cl}\,F$ (y llamaremos clausura de F) a la multifunción $\mathrm{cl}\,F : X \to \mathscr{P}(Y)$ definida por $\mathrm{cl}\,F(x) = \overline{F(x)}$ para todo $x \in X$.*

Proposición 2.2.8. *Sean X e Y espacios topológicos. Una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es inferiormente semicontinua si y sólo si $\mathrm{cl}\,F$ es inferiormente semicontinua.*

Demostración. Si G es un abierto de Y, para cualquier $x \in X$ se tiene que $F(x) \cap G \neq \emptyset$ si y sólo si $\overline{F(x)} \cap G \neq \emptyset$. Así que

$$F^w(G) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \left\{x \in X : \overline{F(x)} \cap G \neq \emptyset\right\} = (\mathrm{cl}\,F)^w(G).$$

Por lo que F es inferiormente semicontinua si y sólo si $\mathrm{cl}\,F$ es inferiormente semicontinua. □

Proposición 2.2.9. *Si X e Y son espacios topológicos y $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es una multifunción superiormente semicontinua cuyos valores son compactos en Y, entonces la imagen $F(K)$ de un subconjunto compacto K de X es compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ un cubrimiento por abiertos de $F(K)$. Como para todo $x \in K$ el conjunto $F(x)$ es compacto y $F(x) \subset F(K)$, existe una subfamilia finita $\mathscr{U}_x$ de $\mathscr{U}$ cuya unión cubre $F(x)$. Para cada $x \in K$, sea $V_x = \bigcup \mathscr{U}_x$. Como F es superiormente semicontinua, $W_x = F^s(V_x) = \{x' \in X : F(x') \subset V_x\}$ es un abierto que contiene a x. Por lo tanto la familia $\{W_x : x \in K\}$ es un cubrimiento por abiertos de K, del cual podemos extraer un subcubrimiento finito $\{W_{x_1}, W_{x_2}, \dots, W_{x_n}\}$. Los elementos de la familia $\mathscr{U}$ contenidos en las subfamilias finitas $\mathscr{U}_{x_1}, \mathscr{U}_{x_2}, \dots, \mathscr{U}_{x_n}$ forman el subcubrimiento por abiertos finito de $F(K)$ que necesitábamos.

En efecto, se sigue de las inclusiones:

$$F(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(W_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \cup \mathscr{U}_{x_i}.$$

$\square$

Definición 2.2.10. *Si F es una multifunción de X a Y, el grafo de F se denota por* $\operatorname{Gr} F$ *y se define como*

$$\operatorname{Gr} F = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Si X e Y son espacios topológicos y $\operatorname{Gr} F$ *es un conjunto cerrado en la topología producto, entonces diremos que F es cerrada.*

Una multifunción F que tiene grafo cerrado siempre tiene valores cerrados. Sin embargo la implicación contraria no siempre se cumple, como muestra el siguiente ejemplo: tomamos $X = Y = [0,1]$ con la topología usual y la multifunción

$$F : X \to \mathscr{P}(Y)$$

definida por:

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } x \text{ es racional,} \\ [0,1/2] & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

Proposición 2.2.11. *Sean X e Y espacios topológicos, Y regular. Si $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es una multifunción superiormente semicontinua cuyos valores son cerrados, entonces F tiene grafo cerrado.*

Demostración. Vamos a ver que si $(x,y) \notin \operatorname{Gr} F$ entonces $(x,y) \notin \overline{\operatorname{Gr} F}$.

Si $(x,y) \notin \operatorname{Gr} F$ tenemos que $y \notin F(x)$. Como $F(x)$ es cerrado e Y es regular existen abiertos disjuntos U y V tales que $y \in U$ y $F(x) \subset V$. Utilizando la semicontinuidad superior de F, el conjunto $W = F^s(V) = \{x' \in X : F(x') \subset V\}$ es abierto. Entonces $W \times U$ es una vecindad abierta de (x,y) tal que $(W \times U) \cap \operatorname{Gr} F = \emptyset$, por lo tanto $(x,y) \notin \overline{\operatorname{Gr} F}$. $\square$

Proposición 2.2.12. *Sean X e Y espacios topológicos, Y compacto. Si $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ es una multifunción de grafo cerrado, entonces F es superiormente semicontinua.*

Demostración. Vamos a probar el contrarrecíproco, si una multifunción $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ no es superiormente semicontinua con Y compacto, entonces F no tiene grafo cerrado.

Si F no es superiormente semicontinua, entonces existen $x \in X$ y un abierto $V \supset F(x)$ tales que para cualquier vecindad U de x existen $x_U \in U$ e $y_U \in F(x_U)$ con $y_U \notin V$. Ahora (y_U) es una red en V^c (considerando como conjunto dirigido las vecindades de x ordenadas por la inclusión). Como Y es compacto, existe una subred de (y_U) convergente a un punto $y \in Y$. Al ser V^c cerrado, $y \in V^c$, luego $y \notin F(x)$. Entonces (x_U, y_U) es una red contenida en $\operatorname{Gr} F$ que tiene una subred convergente a $(x,y) \notin \operatorname{Gr} F$. Por lo tanto, el grafo de la multifunción F no es cerrado. □

Como todo espacio topológico compacto y Hausdorff es regular de las dos proposiciones anteriores obtenemos inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 2.2.13. *Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff. Para una multifunción $F : K \to \mathscr{P}(K)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) F es superiormente semicontinua y sus valores son cerrados.

ii) F tiene grafo cerrado.

Definición 2.2.14. *Un espacio topológico X se dice que satisface el primer axioma de numerabilidad o que es $1A\mathbb{N}$ si todo punto $x \in X$ tiene una base de vecindades numerable.*

Proposición 2.2.15. *Sean X un espacio topológico que es $1A\mathbb{N}$ e Y un espacio métrico. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción cuyos valores son compactos. Entonces F es superiormente semicontinua si y sólo si para todo $x \in X$, toda sucesión (x_n) en X que converge a x y toda sucesión (y_n) con $y_n \in F(x_n)$, existe una subsucesión convergente (y_{n_k}) cuyo límite pertenece a $F(x)$.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea (x_n) una sucesión en X que converge a x. Tomemos el conjunto compacto $A = \{x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Entonces por la Proposición 2.2.9 el conjunto

$$F(A) = F(x) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F(x_n)$$

es compacto. Sea (y_n) una sucesión con $y_n \in F(x_n)$. Como cada $F(x_n)$ está contenido en $F(A)$, y $F(A)$ es un compacto métrico, existe una subsucesión (y_{n_k}) convergente a un punto $y \in F(A)$.

Supongamos por reducción al absurdo que $y \notin F(x)$. Como $F(x)$ es compacto, en particular cerrado, y además Y es regular, podemos encontrar abiertos disjuntos A y B tales que $y \in A$ y $F(x) \subset B$. Ahora utilizando que F es superiormente semicontinua, el conjunto $\{x' \in X : F(x') \subset B\}$ es abierto, por lo tanto existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se tiene que $F(x_n) \subset B$. Así que $y_{n_k} \in B \subset A^c$ para k suficientemente grande, por lo que el límite y de la subsucesión (y_{n_k}) pertenece al cerrado A^c, y esto contradice que $y \in A$. Por lo tanto $y \in F(x)$.

$\Leftarrow$ Supongamos por reducción al absurdo que F no es superiormente semicontinua. Entonces existe $x \in X$ y un abierto G con $F(x) \subset G$ tal que para toda vecindad V de x existe $x' \in V$ tal que $F(x') \nsubseteq G$.

Como x tiene una base de vecindades numerable, encontramos una sucesión (x_n) que converge a x con $F(x_n) \nsubseteq G$, por lo que podemos tomar una sucesión $y_n \in F(x_n)$ tal que $y_n \notin G$, es decir, y_n pertenece al cerrado G^c. Por hipótesis sabemos que la sucesión (y_n) tiene una subsucesión convergente (y_{n_k}) tal que su límite pertenece a $F(x) \subset G$. Pero esto es una contradicción, porque el límite de cualquier subsucesión convergente de (y_n) tiene que pertenecer al cerrado G^c. $\square$

Recordemos que si E es un espacio vectorial y $A, B \subset E$, la suma de Minkowski $A+B$ se define como $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$.

Utilizando la caracterización anterior obtenemos fácilmente los siguientes resultados.

Proposición 2.2.16. *Sean X un espacio topológico que es $1\mathrm{A}\mathbb{N}$ e Y un espacio normado. Sean las multifunciones $F_i : X \to \mathscr{P}(Y)$ superiormente semicontinuas con valores compactos para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces la multifunción suma $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ definida como $F(x) = \sum_{i=1}^{k} F_i(x)$ (donde $\sum_{i=1}^{k} F_i(x)$ es la suma de Minkowski de los conjuntos $F_i(x)$) toma valores compactos y es superiormente semicontinua.*

Demostración. Que la multifunción F tiene valores compactos se deduce del hecho que si A y B son subconjuntos compactos de Y, el conjunto $A+B$ es compacto.

Sea (x_n) una sucesión en X que converge a x, y sea

$$y_n \in F(x_n) = F_1(x_n) + F_2(x_n) + \ldots + F_k(x_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Siendo y_n un vector de la forma $y_n = y_n^1 + y_n^2 + \ldots + y_n^k$, donde $y_n^i \in F_i(x_n)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$.

Como la multifunción F_1 es superiormente semicontinua, por la Proposición 2.2.15 la sucesión (y_n^1) tiene una subsucesión convergente $(y_{n_{q1}}^1)$ cuyo límite y^1 pertenece a $F_1(x)$. Ahora, aplicando de nuevo la Proposición 2.2.15 a la multifunción F_2 y a la sucesión $(y_{n_{q1}}^2)$, tenemos que existe una subsucesión convergente $(y_{n_{q2}}^2)$ cuyo límite y^2 pertenece a $F_2(x)$. Es claro además que la subsucesión $(y_{n_{q2}}^1)$ converge al punto y^1. Repitiendo el mismo razonamiento encontramos para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ unas subsucesiones $(y_{n_q}^i)$ de (y_n^i) que convergen a un punto $y^i \in F_i(x)$.

Entonces tenemos que

$$\text{lím}\, y_{n_q} = \text{lím}\,(y_{n_q}^1 + y_{n_q}^2 + \ldots + y_{n_q}^k) = y^1 + y^2 + \ldots + y^k \in F_1(x) + F_2(x) + \ldots + F_k(x) = F(x).$$

Por tanto, la multifunción F es superiormente semicontinua (Proposición 2.2.15). $\square$

Proposición 2.2.17. *Sean X un espacio topológico que es $1A\mathbb{N}$ e Y un espacio métrico. Sean las multifunciones $F_i : X \to \mathscr{P}(Y)$ superiormente semicontinuas con valores compactos para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Entonces la multifunción producto $F : X \to \mathscr{P}(Y^k)$, definida por $F(x) = F_1(x) \times F_2(x) \times \ldots \times F_k(x)$ toma valores compactos y es superiormente semicontinua.*

Demostración. Que la multifunción F tiene valores compactos es evidente, si tomamos como punto de partida que el producto finito de compactos es compacto.

Para demostrar que es superiormente semicontinua tenemos que demostrar que: para toda sucesión (x_n) en X que converja a x y para toda sucesión $y_n = (y_n^1, y_n^2, \ldots, y_n^k)$ con $y_n^i \in F_i(x_n)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, existe una subsucesión convergente de (y_n) cuyo límite pertenece a $F(x) = F_1(x) \times F_2(x) \times \ldots \times F_k(x)$.

Aplicando sucesivamente la Proposición 2.2.15 a cada coordenada tenemos que existe una subsucesión (y_{n_k}) de (y_n) convergente a un punto $y = (y^1, y^2, \ldots, y^k)$ con $y^i \in F_i(x)$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Por lo tanto $y \in F(x)$. $\square$

2.3. Teorema de Michael y aplicaciones.

El concepto de función de elección aparece en el *axioma de elección*: si tenemos un conjunto I y una aplicación que asigna a cada i en I un conjunto no vacío $A(i)$, existe una función de elección σ definida en I tal que para cualquier $i \in I$ se cumple que $\sigma(i) \in A(i)$. Como sabemos, la existencia de dicha función es independiente del resto de los axiomas de Zermelo-Fraenkel de la teoría de conjuntos. En presencia de más estructuras matemáticas tiene sentido a veces añadir condiciones a esta función de elección. Cuando I es un espacio topológico y los conjuntos $A(i)$ están contenidos en otro espacio topológico Y, una función continua $\sigma : I \to Y$ que cumple la condición anterior la llamamos *selección continua*.

Los dos teoremas siguientes, que aseguran bajo ciertas hipótesis la existencia selecciones continuas, fueron probados en [8] y [20] respectivamente.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Selección de Browder, 1968)**.** *Sean X un espacio topológico compacto y Hausdorff, Y un espacio vectorial topológico y sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción con valores convexos. Supongamos que $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ es abierto para cada $y \in Y$. Entonces existe una selección continua de F.*

Demostración. La familia $\{F^{-1}(y) : y \in Y\}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Por la compacidad de X existe un conjunto finito $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset Y$ tal que los conjuntos abiertos $\{F^{-1}(y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ son un cubrimiento finito de X. Como X es un espacio compacto y Hausdorff, entonces X es normal. Por la Proposición 2.1.15 existe una familia finita $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots, n\}$ de funciones continuas de X en $[0, 1]$ tales que $\sum_{j=1}^n \phi_j = 1$ y $G_j = \{x \in X : \phi_j(x) > 0\}$, está contenido en $F^{-1}(y_j)$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Es decir, tenemos entonces que $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots, n\}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{F^{-1}(y_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$.

Tomemos ahora la función $\sigma : X \to Y$ definida por $\sigma(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) y_j$. Está claro que σ es una función continua. Fijamos $x \in X$. Observamos que si $\phi_j(x) > 0$ entonces $x \in F^{-1}(y_j)$ por lo que $y_j \in F(x)$. Como $\sum_{j=1}^n \phi_j(x) = 1$, se deduce que $\sigma(x)$ es una combinación convexa de puntos de $F(x)$. Utilizando ahora el hecho de que F toma valores convexos tenemos que $\sigma(x) \in F(x)$. Por lo tanto σ es una selección continua de F. $\square$

Teorema 2.3.2 (Teorema de Selección de Michael, 1956)**.** *Sean X un espacio topológico paracompacto e Y un espacio de Banach. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción inferiormente semicontinua cuyos valores son cerrados y convexos. Entonces F tiene una selección continua.*

Para demostrar este teorema, enunciaremos y probaremos primero varios resultados auxiliares.

Fijemos la siguiente notación: si A es un subconjunto de un espacio métrico (X,d) y β un número positivo, denotaremos por $B(A,\beta)$ al conjunto:

$$B(A,\beta) = \{x \in X : d(x,A) < \beta\}.$$

donde $d(x,A) = \text{ínf}_{a\in A} d(x,a)$.

Lema 2.3.3. *Si X es un espacio normado, $x \in X$ y $B(x,\eta) \subset B(0,\beta)$ para $\eta > 0$ y $\beta > 0$, entonces $\|x\| \leq \beta - \eta$.*

Demostración. Supongamos que $x \neq 0$(el caso $x = 0$ es trivial). Tomemos $z = \lambda x$ con $\lambda \in \left(1, 1 + \frac{\eta}{\|x\|}\right)$. Entonces $z \in B(x,\eta)$, pues:

$$\|z - x\| = \|\lambda x - x\| = \|(\lambda - 1)x\| = (\lambda - 1)\|x\| < \eta.$$

Así que $z \in B(0,\beta)$, es decir $\|z\| < \beta$.

Fijamos $\varepsilon \in \left(0, \frac{\eta}{\|x\|}\right)$ arbitrario y definimos $z = \left(1 + \frac{\eta}{\|x\|} - \varepsilon\right)x$. Los cálculos anteriores garantizan que $\|z\| < \beta$.

Calculemos la norma de z:

$$\|z\| = \left\|\left(1 + \frac{\eta}{\|x\|} - \varepsilon\right)x\right\| = \left(1 + \frac{\eta}{\|x\|} - \varepsilon\right)\|x\| = \|x\| + \eta - \varepsilon\|x\|.$$

Como $\|z\| < \beta$, tenemos que $\|x\| + \eta - \varepsilon\|x\| < \beta$, por lo que $\|x\| - (\beta - \eta) < \varepsilon\|x\|$. Esta desigualdad vale para cualquier $\varepsilon \in \left(0, \frac{\eta}{\|x\|}\right)$, así que $\|x\| - (\beta - \eta) \leq 0$. $\square$

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.3.4. *Si X es un espacio normado, x e y son puntos de X y $B(x,\eta) \subset B(y,\beta)$ para $\eta > 0$ y $\beta > 0$, entonces $\|x - y\| \leq \beta - \eta$.*

Demostración. $B(x,\eta) \subset B(y,\beta)$ si y sólo si $B(x - y,\eta) \subset B(0,\beta)$. Por el Lema 2.3.3 se tiene $\|x - y\| \leq \beta - \eta$. $\square$

Lema 2.3.5. *Sean X un espacio topológico e Y un espacio normado. Sea $G : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción definida por $G(x) = B(\phi(x),\beta)$, donde ϕ es una función continua de X en Y y $\beta > 0$. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción inferiormente semicontinua tal que $F(x) \cap G(x) \neq \emptyset$ para cada $x \in X$. Entonces la multifunción $F \cap G : X \to \mathscr{P}(Y)$ definida por $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$ es inferiormente semicontinua.*

Demostración. Utilizaremos la Proposición 2.2.4. Vamos a demostrar que para cualquier $x_0 \in X$ y cada red $(x_\alpha : \alpha \in A)$ en X que converge a x_0 y cada abierto Ω en Y tal que $(F \cap G)(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$, se tiene que existe α_0 tal que para cualquier $\alpha > \alpha_0$ se cumple que $(F \cap G)(x_\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset$.

Como $(F \cap G)(x_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ podemos tomar $y \in (F \cap G)(x_0) \cap \Omega$, en particular tenemos que $y \in G(x_0) \cap \Omega$.

Ahora $G(x_0) = B(\phi(x_0), \beta)$ es abierto y Ω es abierto, por lo que $G(x_0) \cap \Omega$ es abierto y entonces existe un número positivo η tal que $B(y, 2\eta) \subset G(x_0) \cap \Omega$. De aquí tenemos $B(y, \eta) \subset B(y, 2\eta) \subset \Omega$. Utilizando que ϕ es una función continua y que $(x_\alpha : \alpha \in A)$ converge a x_0, podemos encontrar $\alpha_1 \in A$ tal que $\|\phi(x_0) - \phi(x_\alpha)\| < \eta$ para todo $\alpha > \alpha_1$.

Veamos que $B(y, \eta) \subset G(x_\alpha) \cap \Omega$ para $\alpha > \alpha_1$.

Por el Corolario 2.3.4 aplicado a la inclusión $B(y, 2\eta) \subset G(x_0) = B(\phi(x_0), \beta)$, tenemos que $\|\phi(x_0) - y\| \leq \beta - 2\eta$. Sea $x \in B(y, \eta)$. Entonces para cualquier $\alpha > \alpha_1$ tenemos

$$\|x - \phi(x_\alpha)\| \leq \|x - y\| + \|y - \phi(x_0)\| + \|\phi(x_0) - \phi(x_\alpha)\| < \eta + \beta - 2\eta + \eta = \beta.$$

Así que para $\alpha > \alpha_1$ tenemos $B(y, \eta) \subset G(x_\alpha) \cap \Omega$.

Por otra parte, como F es inferiormente semicontinua y $F(x_0) \cap B(y, \eta) \neq \emptyset$ (porque habíamos elegido $y \in F(x_0)$), se tiene que existe $\alpha_2 \in A$ tal que $F(x_\alpha) \cap B(y, \eta) \neq \emptyset$ para cualquier $\alpha > \alpha_2$.

Por lo tanto, tomando $\alpha_0 \in A$ con $\alpha_0 > \alpha_1$ y $\alpha_0 > \alpha_2$, tenemos que para cualquier $\alpha > \alpha_0$ se cumple que $(F \cap G)(x_\alpha) \cap \Omega \neq \emptyset$, porque

$$\emptyset \neq F(x_\alpha) \cap B(y, \eta) \subset (F \cap G)(x_\alpha) \cap \Omega,$$

ya que $B(y, \eta) \subset G(x_\alpha) \cap \Omega$. □

Lema 2.3.6. *Sean A un subconjunto convexo de un espacio normado X y β un número positivo. Entonces el conjunto $B(A, \beta)$ es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in B(A, \beta)$. Tomemos $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$ para $\lambda \in [0, 1]$ arbitrario. Veamos que $z \in B(A, \beta)$, es decir, que existe un $z_1 \in A$ tal que $\|z - z_1\| < \beta$.

Como $x, y \in B(A, \beta)$ existen $x_1, y_1 \in A$ tales que $\|x - x_1\| < \beta$ y $\|y - y_1\| < \beta$. Además $z_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1 \in A$. Ahora

$$\|z - z_1\| \leq \lambda \|x - x_1\| + (1 - \lambda) \|y - y_1\| < \beta.$$

Así que $z \in B(A, \beta)$. □

Lema 2.3.7. *Sean X un espacio topológico paracompacto e Y un espacio de normado. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción inferiormente semicontinua con valores convexos. Entonces para cada número positivo $\beta > 0$ existe una función continua $\phi_\beta : X \to Y$ tal que*

$$\phi_\beta(x) \in B(F(x), \beta) \text{ para cada } x \in X.$$

Demostración. Para cada $y \in Y$ tomemos

$$U_y = F^w(B(y,\beta)) = \{x \in X : F(x) \cap B(y,\beta) \neq \emptyset\}.$$

Como F es inferiormente semicontinua y $B(y,\beta)$ es abierto en Y, el conjunto U_y es abierto en X. Además, como cada $x \in X$ esta en algún U_y, la familia $\{U_y : y \in Y\}$ es un cubrimiento por abiertos de X. Como X es paracompacto, por la Proposición 2.1.19 existe una partición de la unidad $\{\pi_i : i \in I\}$ localmente finita subordinada al cubrimiento $\{U_y : y \in Y\}$. Tomemos los conjuntos $G_i = \{x \in X : \pi_i(x) > 0\}$, $i \in I$ como la partición de la unidad $\{\pi_i : i \in I\}$ está subordinada al cubrimiento $\{U_y : y \in Y\}$, para cada $i \in I$ existe un $y_i \in Y$ tal que $G_i \subset U_{y_i}$.

Sea $\phi : X \to Y$ la función definida por la fórmula $\phi_\beta(x) = \sum_{i\in I} \pi_i(x) y_i$. Como cada $x \in X$ tiene una vecindad que interseca sólo a un número finito de los conjuntos G_i, en dicha vecindad ϕ_β es la suma de un número finito de funciones continuas. Esto demuestra que ϕ_β está bien definida y es una función continua de X a Y.

Fijamos $x \in X$. Si $\pi_i(x) > 0$ entonces $x \in G_i \subset U_{y_i}$, así que $F(x) \cap B(y_i,\beta) \neq \emptyset$, luego $y_i \in B(F(x),\beta)$. Así que $\phi_\beta(x)$ es una combinación convexa de puntos y_i que están en el conjunto $B(F(x),\beta)$, que es convexo por el Lema 2.3.6, por lo que $\phi_\beta(x) \in B(F(x),\beta)$. □

Lema 2.3.8. *Sean X un espacio topológico e Y un espacio métrico completo. Sea una sucesión de funciones continuas $f_n : X \to Y$ con la siguiente propiedad: para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m > n_\varepsilon$ se tiene $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in X$. Entonces (f_n) converge uniformemente a una función continua $f : X \to Y$.*

Demostración. Definamos $f : X \to Y$ como $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in X$. Este límite existe porque para todo $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))$ es de Cauchy en el espacio métrico completo Y. Además, está claro que (f_n) converge uniformente a f. Como cada f_n es una función continua, f también lo será. □

Demostración del Teorema de Selección de Michael 2.3.2. Construimos ahora una sucesión de funciones continuas $\phi_j : X \to Y$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

i) $\phi_j(x) \in B(\phi_{j-1}(x), 2^{-j+2})$ para todo $x \in X$, $j = 2,3,4,\dots$

ii) $\phi_j(x) \in B(F(x), 2^{-j})$ para todo $x \in X$, $j = 1,2,3,\dots$

Construimos por inducción ϕ_1 de acuerdo al Lema 2.3.7 tomando $\beta = 2^{-1}$. Ahora supongamos que $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ han sido construidas cumpliendo *i)* y *ii)*. Definimos una nueva multifunción $F_{n+1} : X \to \mathscr{P}(Y)$ mediante la formula $F_{n+1}(x) = F(x) \cap B(\phi_n(x), 2^{-n})$. Cada $F_{n+1}(x)$ es no vacío por *ii)* aplicado a ϕ_n, y es convexo por ser intersección de dos convexos. Por el Lema 2.3.5, F_{n+1} es inferiormente semicontinua. El Lema 2.3.7 aplicado a $\beta = 2^{-n-1}$ y F_{n+1} garantiza que existe una función continua $\phi_{n+1} : X \to Y$ con la propiedad de que $\phi_{n+1}(x) \in B(F_{n+1}(x), 2^{-n-1})$ para todo $x \in X$. Como $F_{n+1}(x) \subset F(x)$, la condición *ii)* se cumple para ϕ_{n+1}. Además $F_{n+1}(x) \subset B(\phi_n(x), 2^{-n})$, luego

$$\phi_{n+1}(x) \in B(\phi_n(x), 2^{-n} + 2^{-n-1}) \subset B(\phi_n(x), 2^{-n+1})$$

lo que significa que se cumple *i)* para $j = n+1$. Esto completa la construcción de las funciones ϕ_j.

Por *i)* tenemos que $\|\phi_{n+1}(x) - \phi_n(x)\| < 2^{-n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$, luego

$$\|\phi_m(x) - \phi_n(x)\| \le \sum_{k=n}^{m-1} \|\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\| \le \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k+1} < 2^{-n+2}$$

y, por tanto $\sup_{x\in X} \|\phi_m(x) - \phi_n(x)\| < 2^{-n+2}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$. Por el Lema 2.3.8 la sucesión de funciones (ϕ_n) converge uniformemente a una función continua $\phi : X \to Y$.

Dado $x \in X$, afirmamos que $\phi(x) \in \overline{F(x)}$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Tenemos entonces que existe n_1 tal que $\|\phi_n(x) - \phi(x)\| < \varepsilon/3$ para todo $n > n_1$. Utilizando *ii)* garantizamos que podemos encontrar n_2 tal que $d(\phi_n(x), F(x)) < \varepsilon/3$ para para todo $n > n_2$, es decir podemos encontrar $x_n \in F(x)$ de forma que $\|x_n - \phi_n(x)\| < \varepsilon/3$. Ahora para $n > n_1$ y $n > n_2$ se cumple

$$\|x_n - \phi(x)\| \le \|x_n - \phi_n(x)\| + \|\phi_n(x) - \phi(x)\| < \varepsilon.$$

Por tanto $B(\phi(x), \varepsilon) \cap F(x) \neq \emptyset$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario $\phi(x) \in \overline{F(x)}$.

Utilizamos ahora que F toma valores cerrados, tenemos entonces que $\overline{F(x)} = F(x)$, así que $\phi(x) \in F(x)$. Esto demuestra que ϕ es una selección continua de F. $\square$

Como aplicación del Teorema de Selección de Michael podemos encontrar el siguiente resultado, probado originalmente en [4].

Teorema 2.3.9 (Teorema de Bartle-Graves, 1952)**.** *Sean X e Y espacios de Banach. Sea $\psi : Y \to X$ una aplicación lineal continua y sobreyectiva. Entonces existe una función continua, no necesariamente lineal, $\psi' : X \to Y$ tal que $\psi \circ \psi'$ es la identidad en X.*

Primero enunciaremos el Teorema de la Aplicación Abierta, que se utilizará en la demostración del teorema anterior.

Teorema 2.3.10 (Teorema de la Aplicación Abierta)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal continua y sobreyectiva. Entonces T es una aplicación abierta.*

Este resultado podemos encontrarlo, por ejemplo, como Proposición 22.8 en [16].

Demostración del Teorema de Bartle-Graves 2.3.9. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ la multifunción definida como $F(x) = \psi^{-1}(x)$ para cualquier $x \in X$. Claramente, F es una multifunción cuyos valores son cerrados y convexos. El Teorema de la Aplicación Abierta 2.3.10 y la Proposición 2.2.6 garantizan que F es una multifunción inferiormente semicontinua. Además X es un espacio métrico, por lo tanto es paracompacto. Ahora por el Teorema de Selección de Michael 2.3.2 existe una selección continua ψ' de F, que evidentemente satisface que $\psi \circ \psi'$ es la identidad en X. $\square$

Definición 2.3.11. *Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama inferiormente semicontinua si para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) > c\}$ es abierto (o equivalentemente si el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ es cerrado).*

Definición 2.3.12. *Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ se llama superiormente semicontinua si para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) < c\}$ es abierto (o equivalentemente si el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq c\}$ es cerrado).*

De las definiciones anteriores se sigue que una función $f : X \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua si y sólo si $-f$ es superiormente semicontinua. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es a la vez superiormente e inferiormente semicontinua.

Notar que estas nociones no corresponden a la particularizaciones de los conceptos de multifunción superiormente semicontinua y multifunción inferiormente semicontinua a funciones con valores en $\mathbb{R}$, ambas particularizaciones en este caso conducen al concepto de función continua.

Proposición 2.3.13. *Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es inferiormente semicontinua si y sólo si la multifunción $F : X \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ definida por $F(x) = (-\infty, f(x)]$ es inferiormente semicontinua.*

Demostración. $\Rightarrow$ Tenemos que probar que para cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$ el conjunto $F^w(G) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ es abierto. Tomemos un abierto arbitrario $G \subset \mathbb{R}$, que escribimos como unión de intervalos abiertos $G = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$.

Dado $x \in X$ se tiene que $F(x) \cap G \neq \emptyset$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que

$$F(x) \cap (a_i, b_i) = (-\infty, f(x)] \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset,$$

lo que equivale a $f(x) > a_i$. Ahora

$$F^w(G) = \{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I}\{x \in X : f(x) > a_i\}.$$

Por la definición de función inferiormente semicontinua, los conjuntos $\{x \in X : f(x) > a_i\}$ son abiertos. Así $F^w(G)$ es abierto (al ser unión de abiertos).

$\Leftarrow$ F es inferiormente semicontinua, así que para cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$ se cumple que $F^w(G)$ es abierto. Dado cualquier $c \in \mathbb{R}$, tomemos el abierto $G = (c, +\infty)$. Entonces $F^w(G)$ es un abierto. Pero

$$F^w(G) = \{x \in X : (-\infty, f(x)] \cap (c, \infty) \neq \emptyset\} = \{x \in X : f(x) > c\},$$

así que la función f es inferiormente semicontinua. $\square$

Proposición 2.3.14. *Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to \mathbb{R}$ es superiormente semicontinua si y sólo si la multifunción $F : X \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ definida por $F(x) = (-\infty, f(x)]$ es superiormente semicontinua.*

Demostración. $\Rightarrow$ Tenemos que probar que para cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$ el conjunto $F^s(G) = \{x \in X : F(x) \subset G\} = \{x \in X : (-\infty, f(x)] \subset G\}$ es abierto. Fijamos $x \in F^s(G)$.

En particular $f(x) \in G$, es decir, $f(x)$ es un punto interior de G, esto es existen a y b con $a < f(x) < b$ tales que $(a, b) \subset G$. Por lo tanto, el intervalo $(-\infty, b)$ está contenido G.

Denotemos por W al conjunto $\{x' \in X : f(x') < b\}$. Por la definición de función superiormente semicontinua, el conjunto W es abierto, y claramente $x \in W$. Además tenemos que $W \subset F^s(G)$, porque si $x' \in W$ entonces $F(x) = (-\infty, f(x')] \subset (-\infty, b) \subset G$. Así que x es un punto interior de $F^s(G)$. Esto demuestra que $F^s(G)$ es abierto.

$\Leftarrow$ F es superiormente semicontinua, así que para cualquier abierto $G \subset \mathbb{R}$ se cumple que $F^s(G)$ es abierto. Dado cualquier $c \in \mathbb{R}$, tomemos el abierto $G = (-\infty, c)$. Entonces $F^s(G)$ es abierto, pero

$$F^s(G) = \{x \in X : (-\infty, f(x)] \subset (-\infty, c)\} = \{x \in X : f(x) < c\},$$

así que la función f es superiormente semicontinua. □

Teorema 2.3.15. *Sea X un espacio topológico paracompacto. Sean $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in X$. Si f_1 es superiormente semicontinua y f_2 es inferiormente semicontinua, entonces existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) \leq h(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Consideramos la multifunción $H : X \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ definida por

$$H(x) = [f_1(x), f_2(x)].$$

Vamos a verificar que H es inferiormente semicontinua. Tomamos un abierto arbitrario $G \subset \mathbb{R}$, que escribimos como unión de intervalos abiertos $G = \bigcup_{i \in I}(a_i, b_i)$. Dado cualquier $x \in X$, entonces $H(x) \cap G \neq \emptyset$ si y sólo si existe $i \in I$ tal que $[f_1(x), f_2(x)] \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$, lo cual es equivalente a que $f_1(x) < b_i$ y $f_2(x) > a_i$. Por tanto:

$$\{x \in X : H(x) \cap G \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} (\{x \in X : f_1(x) < b_i\} \cap \{x \in X : f_2(x) > a_i\}).$$

Para cada $i \in I$ los conjuntos $\{x \in X : f_1(x) < b_i\}$ y $\{x \in X : f_2(x) > a_i\}$ son abiertos, porque f_1 es superiormente semicontinua y f_2 es inferiormente semicontinua. Así que para cualquier $i \in I$ el conjunto

$$\{x \in X : f_1(x) < b_i\} \cap \{x \in X : f_2(x) > a_i\}$$

es abierto al ser intersección de dos abiertos. Por lo tanto, $\{x \in X : H(x) \cap G \neq \emptyset\}$ es abierto (por ser unión arbitraria de abiertos). Esto demuestra que la multifunción H es inferiormente semicontinua. Además H toma valores cerrados y convexos. Aplicando el Teorema de Selección de Michael 2.3.2 concluimos que existe una función continua $h : X \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) \in [f_1(x), f_2(x)]$ para todo $x \in X$ (ver Figura 2.1). □

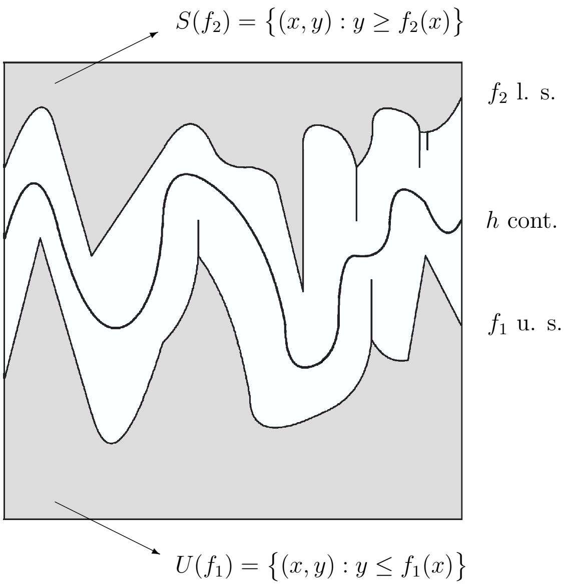


Figura 2.1: Existencia de funciones continuas entre funciones semicontinuas.

La existencia de una función continua $h(x) \in [f_1(x), f_2(x)]$ para todo $x \in X$, f_2 inferiormente semicontinua y f_1 superiormente semicontinua es válido para un espacio normal; esto de hecho caracteriza la normalidad. Una demostración de este hecho puede encontrarse en [2].

Sea X un espacio topológico. Se define la *oscilación* de una función $f : X \to \mathbb{R}$ en el punto $x \in X$ como:

$$osc(f)(x) = \inf_U \sup_{y,z \in U} |f(y) - f(z)|$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las vecindades abiertas U del punto x.

Si X es un espacio topológico por $l_\infty(X)$ denotamos al espacio de las funciones reales acotadas en X dotado de la norma del supremo (recordemos que $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$) y por $C_b(X)$ al espacio de las funciones reales acotadas y continuas en X dotadas igualmente con la norma del supremo.

Teorema 2.3.16. *Sea X un espacio topológico paracompacto y $f \in l_\infty(X)$ entonces*

$$d\left(f, C_b(X)\right) = \frac{1}{2} \sup\left\{osc(f)(x) : x \in X\right\}.$$

Además esta distancia se alcanza en cierta función $g \in C_b(X)$.

Demostración. Si $\delta = 0$ la igualdad está clara. Si $\delta > 0$ la demostración la hacemos en dos pasos.

$\boxed{\textbf{Paso } 1}$

Definimos $\delta = \frac{1}{2} \sup\left\{osc(f)(x) : x \in X\right\}$. Vamos a ver que $d\left(f, C_b(X)\right) \geq \delta$.

Fijamos $\varepsilon, \varepsilon' > 0$. Existe $x_0 \in X$ tal que $osc(f)(x_0) > 2\delta - 2\varepsilon$. Sea $g \in C_b(X)$ arbitraria. Fijamos una vecindad U de x_0 tal que

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon'$$

para todo $y \in U$. Ahora existen $y, z \in U$ tales que $|f(y) - f(z)| > 2\delta - 2\varepsilon$, luego

$$(\delta - \varepsilon) + (\delta - \varepsilon) = 2(\delta - \varepsilon) < |f(y) - f(z)| \leq |f(y) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(z)|,$$

y por lo tanto se tiene que cumplir al menos una de las dos desigualdades siguientes:

$$\delta - \varepsilon < |f(y) - g(x_0)|, \tag{1}$$

$$\delta - \varepsilon < |g(x_0) - f(z)|. \tag{2}$$

Asumamos sin pérdida de generalidad que se cumple (1), entonces

$$\delta - \varepsilon < |f(y) - g(x_0)| \leq |f(y) - g(y)| + |g(y) - g(x_0)| < |f(y) - g(y)| + \varepsilon',$$

así que $\delta - \varepsilon - \varepsilon' < |f(y) - g(y)|$, por tanto

$$\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| > \delta - \varepsilon - \varepsilon'.$$

Como ε y ε' son arbitrarios, se sigue que $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \geq \delta$. Así, $d(f, C_b(X)) \geq \delta$ como se quería demostrar.

$\boxed{\textbf{Paso } 2}$

Veamos que existe una función continua y acotada $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| \leq \delta$ para todo $x \in X$.

Sean $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f_1(x) = \inf_U \sup\{f(y) : y \in U\} - \delta,$$

$$f_2(x) = \sup_U \inf\{f(y) : y \in U\} + \delta,$$

donde el ínfimo y el supremo se toman sobre todas las vecindades U de x. De la definición tenemos que $f_2(x) - \delta \le f(x) \le f_1(x) + \delta$ para todo $x \in X$.

Demostremos ahora que $f_1(x) \le f_2(x)$ para todo $x \in X$.
Para cada $x \in X$, se tiene

$$2\delta \ge osc(f)(x) = \inf_{U_x} \sup_{y,z \in U_x} |f(y) - f(z)| \ge \inf_{U_x} \sup_{y \in U_x} |f(y)| - \sup_{U_x} \inf_{z \in U_x} |f(z)|,$$

donde por U_x denotamos una vecindad abierta arbitraria de x. De la desigualdad anterior se deduce que

$$f_2(x) = \sup_U \inf\{f(y) : y \in U\} + \delta \ge \inf_U \sup\{f(y) : y \in U\} - \delta = f_1(x).$$

Demostremos ahora que $f_1(x) \le f_2(x)$ para todo $x \in X$ Fijemos $x \in X$, entonces para cualquier vecindad U_x de x tenemos

$$\inf_U \sup\{f(y) : y \in U\} - \sup_U \inf\{f(y) : y \in U\} \le \sup\{f(y) : y \in U_x\} - \inf\{f(y) : y \in U_x\}$$

y además

$$\sup\{f(y) : y \in U_x\} - \inf\{f(y) : y \in U_x\} = \sup_{y,z \in U_x} |f(y) - f(z)|.$$

Por lo tanto, tomando ínfimos sobre todas las vecindades U_x de x, tenemos

$$\inf_U \sup\{f(y) : y \in U\} - \sup_U \inf\{f(y) : y \in U\} \le \inf_U \sup_{y,z \in U} |f(y) - f(z)| = osc(f)(x) \le 2\delta$$

De la desigualdad anterior se deduce que

$$f_1(x) = \inf_U \sup\{f(y) : y \in U\} - \delta \le \sup_U \inf\{f(y) : y \in U\} + \delta = f_2(x)$$

para todo $x \in X$ como se quería probar.

Vamos a comprobar que f_1 *es superiormente semicontinua*. Dado $c \in \mathbb{R}$, veamos que el conjunto $\{x \in X : f_1(x) < c\}$ es abierto. Tomemos $x_0 \in \{x \in X : f_1(x) < c\}$. Entonces existe una vecindad abierta $\widetilde{U}$ del punto x_0 tal que $\sup\{f(y) : y \in \widetilde{U}\} < c + \delta$.

Afirmamos que $\widetilde{U} \subset \{x \in X : f_1(x) < c\}$. En efecto, sea $z \in \widetilde{U}$. Como $\widetilde{U}$ es también una vecindad abierta del punto z, tenemos $f_1(z) + \delta \leq \sup\{f(y) : y \in \widetilde{U}\} < c + \delta$ con lo cual $f_1(z) < c$. Por tanto $\widetilde{U} \subset \{x \in X : f_1(x) < c\}$ y x_0 es un punto interior de este conjunto. Como c es arbitrario, f_1 es una función superiormente semicontinua.

El razonamiento anterior aplicado a $-f$ asegura que la función $w : X \to \mathbb{R}$, definida por

$$w(x) = \inf_U \sup\{-f(y) : y \in U\} - \delta,$$

es superiormente semicontinua. Pero

$$\sup\{-f(y) : y \in U\} = -\inf\{f(y) : y \in U\}$$

y por tanto

$$\inf_U \sup\{-f(y) : y \in U\} = -\sup_U \inf\{f(y) : y \in U\}.$$

Así que $w = -f_2$ y se deduce que f_2 *es inferiormente semicontinua*.

Utilizando el Teorema 2.3.15 garantizamos que existe una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) \in [f_1(x), f_2(x)]$ para todo $x \in X$. Por tanto, para cualquier $x \in X$ se cumplen las siguientes desigualdades:

$$g(x) - \delta \leq f_2(x) - \delta \leq f(x) \leq f_1(x) + \delta \leq g(x) + \delta.$$

Como f_1 y f_2 están acotadas, lo mismo ocurre con g. Tenemos entonces una función $g \in C_b(X)$ tal que $\sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \delta$.

Esto demuestra que la distancia en $l_\infty(X)$ de f al subespacio $C_b(X)$ es precisamente δ y esta distancia se alcanza en la función g. (ver Figura 2.2). $\square$

Notamos que más en general, este resultado es cierto para X un espacio normal: en este caso hay que usar la versión mejorada del Teorema 2.3.15 que se ha comentado tras la demostración de este, veáse en [2] el Teorema 2.2. Notamos también que es posible dar una estimación de distancias a espacios de funciones vectoriales $\mathbb{C}(X, E)$, para X paracompacto, veáse [9].

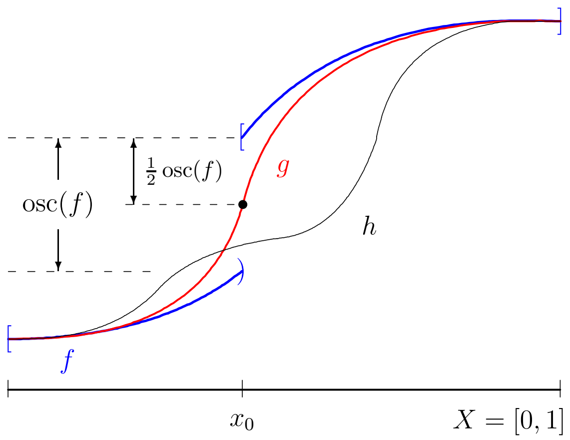


Figura 2.2: Distancia a funciones continuas y oscilación.

2.4. Teoremas de Punto Fijo.

Definición 2.4.1. *Sean S un conjunto y $f : S \to S$ una función. Llamaremos punto fijo de f a un punto $s_0 \in S$ tal que $s_0 = f(s_0)$.*

Por B^n denotaremos a la bola unidad cerrada en el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$,

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Teorema 2.4.2 (Teorema de Punto Fijo de Brouwer)**.** *Sea $f : B^n \to B^n$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo.*

Una prueba de este teorema podemos verla, por ejemplo en [27]. En la introducción hacemos referencias a otras bibliografías donde también podemos encontrar este resultado.

Recordemos que si X e Y son espacios topológicos, una función $f : X \to Y$ la llamamos homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa también es continua. Si tal función existe, diremos que X e Y son homeomorfos.

Corolario 2.4.3. *Sea D un espacio topológico homeomorfo a B^n y sea $f : D \to D$ una función continua. Entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea h un homeomorfismo entre B^n y D. Definimos la función $g : B^n \to B^n$ como $g(x) = h^{-1}(f(h(x)))$, que es continua porque h^{-1}, f y h son continuas. Usando el Teorema de Punto Fijo de Brouwer 2.4.2 obtenemos un punto fijo $x_0 \in B^n$ de g, es decir:

$$g(x_0) = h^{-1}(f(h(x_0))) = x_0.$$

Aplicando h en la ecuación anterior obtenemos $f(h(x_0)) = h(x_0)$. Se sigue que $c = h(x_0)$ es un punto fijo de f. $\square$

Lema 2.4.4. *Toda bola cerrada* $\overline{B(c,r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-c\|_2 \leq r\}$ *es homeomorfa a* B^n.

Demostración. La función $h_1 : B^n \to \overline{B(0,r)}$ definida por $h_1(x) = rx$ es un homeomorfismo entre B^n y la bola centrada en el origen $\overline{B(0,r)}$.

Por otro lada la función $h_2 : \overline{B(0,r)} \to \overline{B(c,r)}$ definida por $h_2(x) = x + c$ es un homeomorfismo entre $\overline{B(0,r)}$ y $\overline{B(c,r)}$. Por lo tanto, la función $h_2 \circ h_1$ es un homeomorfismo entre B^n y $\overline{B(c,r)}$. $\square$

En lo que sigue la distancia euclídea en $\mathbb{R}^n$ se detona por d.

Lema 2.4.5. *Sea* $K \subset \mathbb{R}^n$ *compacto y convexo,* $x \in \mathbb{R}^n$. *Entonces existe un único* $y \in K$ *tal que* $d(x,y) = \min_{z \in K} d(x,z)$.

Demostración. La función $f : K \to \mathbb{R}$ definida por la expresión $f(z) = d(x,z)$ es continua y, como K es compacto, existe un punto $y \in K$ tal que $d(x,y) = \min_{z \in K} d(x,z)$.

Veamos que este punto es único. Por reducción al absurdo supongamos que existen dos puntos distintos $y_1, y_2 \in K$ tales que

$$d(x,y_1) = d(x,y_2) = \min_{z \in K} d(x,z).$$

Como K es convexo, $\frac{y_1+y_2}{2} \in K$. Tenemos entonces

$$\boxed{d\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left\| x - \frac{y_1+y_2}{2} \right\|_2 \leq \frac{1}{2}\|x-y_1\|_2 + \frac{1}{2}\|x-y_2\|_2 = \|x-y_1\|_2 = \|x-y_2\|_2.} \tag{*}$$

Si esta desigualdad fuera estricta, entonces

$$d(x,y_1) > d\left(x, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \geq \min_{z \in K} d(x,z),$$

lo que contradice que $d(x,y_1) = \text{mín}_{z\in K} d(x,z)$.

Si se alcanzara la igualdad en (*) existiría $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x - y_1 = \alpha(x - y_2)$ (este resultado se puede encontrar en [10]). Pero $\|x-y_1\|_2 = \|x-y_2\|_2$ lo que implica que $\alpha = 1$ ó $\alpha = -1$. Si $\alpha = -1$ tenemos que $x = \frac{y_1+y_2}{2} \in K$ y $d(x,y_1) > \text{mín}_{z\in K} d(x,z) = 0$, contradicción. Por otra parte, si $\alpha = 1$ entonces $y_1 = y_2$ e igualmente tenemos una contradicción. Por tanto el punto $y \in K$ tal que $d(x,y) = \text{mín}_{z\in K} d(x,z)$ es único y la prueba finaliza. $\square$

Teorema 2.4.6. *Sea K un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : K \to K$ una función continua de K. Entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Como K es acotado, existe una bola $\overline{B(0,r)}$, de radio r suficientemente grande, que contiene a K. Consideramos la función $g : \overline{B(0,r)} \to K$ definida por $g(x) = y$, donde y es el único punto de K que satisface:

$$d(x,y) = \min_{z\in K} d(x,z)$$

(aplicamos el Lema 2.4.5).

Veamos que *g es continua*. Sea (x_n) una sucesión en $\overline{B(0,r)}$ que converge a un punto $x \in \overline{B(0,r)}$. Fijamos $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se tiene:

$$d(x_n,x) < \varepsilon/2.$$

Fijamos ahora $n > n_0$. De la definición de g tenemos que $d(x_n, g(x_n)) \leq d(x_n, g(x))$ y $d(x, g(x)) \leq d(x, g(x_n))$, así

$$d(x_n, g(x_n)) \leq d(x_n, g(x)) \leq d(x_n,x) + d(x, g(x)) < \varepsilon/2 + d(x, g(x)).$$

Por tanto, teniendo presente que $d(x, g(x)) \leq d(x, g(x_n))$ (por la definición de g) concluimos que

$$d(x, g(x)) \leq d(x, g(x_n)) \leq d(x, x_n) + d(x_n, g(x_n)) < \varepsilon/2 + d(x_n, g(x_n)) < \varepsilon + d(x, g(x)).$$

Así

$$d(x, g(x)) \leq d(x, g(x_n)) < d(x, g(x)) + \varepsilon.$$

Esto demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} d(x, g(x_n)) = d(x, g(x)).$$

Afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x).$$

En efecto, $(g(x_n))$ es una sucesión contenida en K, que es un compacto métrico. Para ver que $g(x_n) \to g(x)$, sólo hay que ver que si $(g(x_{n_k}))$ es una subsucesión convergente hacia un punto $z \in K$, entonces necesariamente $z = g(x)$. Y esto se cumple porque si $(g(x_{n_k})) \to z$ entonces $d(x, g(x_{n_k})) \to d(x,z)$, por lo tanto $d(x, g(x)) = d(x,z)$. Utilizando ahora el Lema 2.4.5 se tiene que $g(x) = z$.

Esto demuestra que g es continua.

La composición $f \circ g : \overline{B(0,r)} \to K$ es continua por ser composición de funciones continuas, y la podemos considerar como función de $\overline{B(0,r)}$ en sí misma porque $K \subset \overline{B(0,r)}$. Por el Lema 2.4.4 y el Corolario 2.4.3, existe un punto $x_0 \in \overline{B(0,r)}$ tal que $f(g(x_0)) = x_0$. Como la imagen de $f \circ g$ está contenida en K, entonces $x_0 \in K$. Por la definición de g se tiene $g(x_0) = x_0$, obtenemos $f(x_0) = x_0$. □

Estudiaremos ahora varios teoremas de punto fijo para multifunciones. El primero de ellos podemos encontrarlo en [6].

Teorema 2.4.7 (Strother, 1955)**.** *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Sea $F : X \to \mathscr{P}(X)$ una multifunción superiormente semicontinua con valores cerrados. Entonces existe un subconjunto compacto C de X tal que $F(C) = C$.*

Demostración. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$X_1 = F(X),\ X_2 = F(X_1),\ \ldots,\ X_{n+1} = F(X_n),\ \ldots$$

Tenemos que $X_{n+1} \subset X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto

$$X_2 = F(X_1) \subset F(X) = X_1 \text{ porque } X_1 \subset X.$$

Además si $X_n \subset X_{n-1}$, entonces

$$X_{n+1} = F(X_n) \subset F(X_{n-1}) = X_n.$$

Por la Proposición 2.2.9 cada X_n es compacto. Sea $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Como X es compacto y la familia de conjuntos compactos, en particular cerrados, $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de intersección finita, se tiene que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$. Además C es cerrado, por lo tanto es compacto.

Veamos que $C = F(C)$. Por construcción se verifica que

$$F(C) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F(X_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{n+1} = C.$$

La otra inclusión la vamos a probar por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x_0 \in C \setminus F(C)$. Observemos que $F(C)$ es compacto en particular cerrado (aplicamos de nuevo la Proposición 2.2.9). Al ser X normal (X es compacto y Hausdorff), para los conjuntos cerrados $F(C)$ y $\{x_0\}$ existen abiertos disjuntos G_1 y G_2 tales que $F(C) \subset G_1$ y $x_0 \in G_2$. Como F es superiormente semicontinua, $F^s(G_1) = \{x \in X : F(x) \subset G_1\}$ es un abierto que contiene a $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Por la Proposición 2.1.11 existe n_0 tal que para cualquier $n > n_0$ se tiene que $X_n \subset F^s(G_1)$, así que $X_{n+1} = F(X_n) \subset G_1$. Por tanto $C \subset G_1$ y, en particular, $x_0 \in G_1$. Pero por otro lado $x_0 \in G_2$, lo que contradice el hecho de que G_1 y G_2 son disjuntos. Así que $F(C) = C$. □

Definición 2.4.8. *Sean X un conjunto y $F : X \to \mathscr{P}(X)$ una multifunción. Llamaremos punto fijo de F a un punto $x_0 \in X$ tal que $x_0 \in F(x_0)$.*

Teorema 2.4.9 (Browder, 1968)**.** *Sea K un subconjunto compacto y convexo de un espacio vectorial topológico Y y sea $F : K \to \mathscr{P}(K)$ una multifunción que toma valores convexos. Supongamos además que para cada $y \in K$ el conjunto $F^{-1}(y) = \{x \in X : y \in F(x)\}$ es abierto. Entonces F tiene un punto fijo.*

Demostración. Por el Teorema de Selección de Browder 2.3.1, la multifunción F tiene una selección continua $\sigma : K \to K$. Por la forma de construir σ en la demostración del Teorema 2.3.1, existen $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \in K$ tales que $\sigma(y)$ es combinación convexa de $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ para todo $y \in K$. Así que $L = \mathrm{co}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ cumple $\sigma(L) \subset L$. Claramente L es convexo y compacto[1]. Además L está contenido en un subespacio finito dimensional de Y, que es necesariamente isomorfo a $\mathbb{R}^k$ para cierto $k \in \mathbb{N}$. Así L es homeomorfo a un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^k$. Por el Teorema 2.4.6 (consecuencia del Teorema de Punto Fijo de Brouwer) σ tiene un punto fijo $y_0 \in L$. Como σ es una selección

[1]El conjunto $B = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^n\}$ es compacto, la función $f : B \to L$ definida como $f(y_1, y_2, \ldots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ es continua y $L = f(B)$ por tanto L es compacto.

de F, se sigue que $y_0 = \sigma(y_0) \in F(y_0)$, es decir, y_0 es un punto fijo de la multifunción F. $\square$

Definición 2.4.10. *Si A es un subconjunto de un espacio vectorial, llamamos envoltura convexa de A, y lo denotamos por $\operatorname{co} A$, al conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de A.*

Teorema 2.4.11 (Carathéodory)**.** *Si X es un espacio lineal $n-$dimensional sobre $\mathbb{R}$, y A es un subconjunto de X, entonces cada punto de $\operatorname{co} A$ puede ser expresado como una combinación convexa de no más de $n+1$ puntos de A.*

Este resultado y su prueba se pueden encontrar como Proposición 21.5 en [16].

Lema 2.4.12. *Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^m$, X compacto e Y compacto y convexo. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción de grafo cerrado y con valores convexos. Entonces para cada $\beta > 0$ existe una multifunción $G : X \to \mathscr{P}(Y)$ inferiormente semicontinua con valores convexos tal que $\operatorname{Gr} G \subset B(\operatorname{Gr} F, \beta)$.*

Demostración. $\boxed{\textbf{Paso } 1}$
Fijamos $\varepsilon > 0$ y definimos la multifunción $G'_\varepsilon : X \to \mathscr{P}(Y)$ como:

$$G'_\varepsilon(x) = \bigcup \left\{F(x') : x' \in B(x,\varepsilon) \cap X\right\}.$$

Veamos que G'_ε es inferiormente semicontinua.

Sean $G \subset Y$ un abierto arbitrario y x un punto de $(G'_\varepsilon)^w(G) = \{x \in X : G'_\varepsilon(x) \cap G \neq \emptyset\}$. Demostremos que x es un punto interior de $(G'_\varepsilon)^w(G)$.

Como $G'_\varepsilon(x) \cap G \neq \emptyset$, existe $x_0 \in B(x,\varepsilon) \cap X$ tal que $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$. Tomemos η con $0 < \eta < \varepsilon - \|x_0 - x\|$. Dado cualquier $x' \in B(x,\eta)$ se tiene $G'_\varepsilon(x') \cap G \neq \emptyset$ (porque $x_0 \in B(x',\varepsilon) \cap X$ y $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$), así que $B(x,\eta) \cap X \subset (G'_\varepsilon)^w(G)$.

$\boxed{\textbf{Paso } 2}$
Fijamos $\varepsilon > 0$ y definimos la multifunción $G_\varepsilon : X \to \mathscr{P}(Y)$ como

$$G_\varepsilon(x) = \operatorname{co} G'_\varepsilon(x), \quad x \in X.$$

Veamos que G_ε es inferiormente semicontinua. Por la Proposición 2.2.4 basta con demostrar que: para cualquier abierto $G \subset Y$, para cada $x \in X$ de forma que $G_\varepsilon(x) \cap G \neq \emptyset$

y para cada red $(x_\alpha : \alpha \in A)$ en X convergente a x, existe un α_0 tal que para cualquier $\alpha > \alpha_0$ se cumple que $G_\varepsilon(x_\alpha) \cap G \neq \emptyset$.

Fijamos un punto $y \in G_\varepsilon(x) \cap G$. Por el Teorema de Carathéodory 2.4.11, existen $\{y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}\} \in G'_\varepsilon(x)$ tales que $G_\varepsilon(x) = \mathrm{co}\{y_1, y_2, \ldots, y_{m+1}\}$. Entonces podemos escribir $y = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_i$ con $\lambda_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$. Como y pertenece al abierto G, existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \cap Y \subset G$.

Dado $1 \leq i \leq m+1$, utilizando que G'_ε es inferiormente semicontinua y observando que $y_i \in G'_\varepsilon(x) \cap B(y_i, r) \neq \emptyset$, concluimos que existe un $\alpha_i \in A$ tal que para cualquier $\alpha > \alpha_i$ se cumple que $G'_\varepsilon(x_\alpha) \cap B(y_i, r) \neq \emptyset$, así que existe $y_{(i,\alpha)} \in G'_\varepsilon(x_\alpha) \cap B(y_i, r)$.

Tomemos $\alpha_0 \in A$ con $\alpha_0 > \alpha_i$ para $i = 1, 2, \ldots, m+1$. Dado cualquier $\alpha > \alpha_0$, el punto $y_\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_{(i,\alpha)}$ cumple $y_\alpha \in G_\varepsilon(x_\alpha) = \mathrm{co}\, G'_\varepsilon(x_\alpha)$ e $y_\alpha \in B(y, r) \cap Y \subset G$ (porque $\|y_\alpha - y\| \leq \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \left\|y_{(i,\alpha)} - y_i\right\| < \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i r = r$). Por lo tanto $G_\varepsilon(x_\alpha) \cap G \neq \emptyset$ para todo $\alpha > \alpha_0$. Esto demuestra que la multifunción G_ε es inferiormente semicontinua.

Paso 3

Vamos a demostrar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathrm{Gr}\, G_\varepsilon \subset B(GrF, \beta)$. Por reducción al absurdo supongamos que tenemos que $\mathrm{Gr}\, G_{1/n} \not\subseteq B(\mathrm{Gr} F, \beta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una sucesión (x_n, y_n) en $X \times Y$ de forma que $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}\, G_{1/n}$ y $d((x_n, y_n), \mathrm{Gr} F) \geq \beta$ (en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $(x_n, y_n) \in \mathrm{Gr}\, G_{1/n}$, tenemos $y_n \in G_{1/n}(x_n)$, así que por el Teorema de Carathéodory 2.4.11 podemos escribir $y_n = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} y_{(i,n)}$, para ciertos $y_{(i,n)} \in G'_{1/n}(x_n)$ y ciertos $\lambda_{(i,n)} \geq 0$ cumpliendo $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} = 1$. Por la definición de $G'_{1/n}$ tenemos que cada $y'_{(i,n)} \in F(x'_{(i,n)})$ para algún $x'_{(i,n)} \in B(x_n, 1/n) \cap X$.

Como X, Y y $[0,1]$ son espacios métricos compactos podemos asumir (pasando a subsucesiones si es necesario) que todas las sucesiones anteriores convergen, es decir, que cuando $n \to \infty$:

$$x_n \to x \in X,$$

$$y_n \to y \in Y,$$

$$\lambda_{(i,n)} \to \lambda_i \in [0,1] \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m+1,$$

$$y_{(i,n)} \to y_i \in Y \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m+1,$$

$$x'_{(i,n)} \to x'_i \in X \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m+1.$$

Dado cualquier $i = 1,2,\ldots,m+1$, como $\|x'_{(i,n)} - x_n\| < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x = x'_i$. Además los puntos $(x'_{(i,n)}, y_{(i,n)}) \in \mathrm{Gr}\,F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, usando que el grafo de F es cerrado, deducimos que $(x, y_i) \in \mathrm{Gr}\,F$, esto es $y_i \in F(x)$.

Como

$$\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{m+1} \lim_{n\to\infty} \lambda_{(i,n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)}$$

y $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, también se cumple $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$. Además

$$y_n = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_{(i,n)} y_{(i,n)} \to y = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i y_i \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Como $F(x)$ es convexo, se sigue que $y \in F(x)$, es decir $(x,y) \in \mathrm{Gr}\,F$. Esto es una contradicción, porque $(x_n, y_n) \to (x,y)$ cuando $n \to \infty$ mientras que $d((x_n,y_n), \mathrm{Gr}\,F) \geq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esto prueba que para cada $\beta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que la multifunción G_ε es inferiormente semicontinua y toma valores convexos y cumple que $\mathrm{Gr}\,G_\varepsilon \subset B(\mathrm{Gr}\,F, \beta)$. □

Corolario 2.4.13. *Sean X e Y subconjuntos de $\mathbb{R}^m$, X compacto e Y compacto y convexo. Sea $F : X \to \mathscr{P}(Y)$ una multifunción de grafo cerrado y con valores convexos. Entonces para cada $\beta > 0$ existe una multifunción $G : X \to \mathscr{P}(Y)$ inferiormente semicontinua con valores convexos y <u>cerrados</u> tal que* $\mathrm{Gr}\,G \subset B(\mathrm{Gr}\,F, \beta)$.

Demostración. Por el lema anterior, existe $\widetilde{G} : X \to \mathscr{P}(Y)$ inferiormente semicontinua y con valores convexos tal que $\mathrm{Gr}\,\widetilde{G} \subset B(\mathrm{Gr}\,F, \beta/2)$. Por la Proposición 2.2.8, la multifunción $G = \mathrm{cl}\,\widetilde{G} : X \to \mathscr{P}(Y)$ es inferiormente semicontinua y toma valores convexos y cumple que $\mathrm{Gr}\,G \subset B(\mathrm{Gr}\,F, \beta)$.

En efecto, $(x,y) \in \mathrm{Gr}\,G$ si y sólo si $y \in G(x)$, es decir $y \in \overline{\widetilde{G}(x)}$. Entonces existe una sucesión (y_n) en $\widetilde{G}(x)$ que converge a y. La sucesión $(x, y_n) \in \mathrm{Gr}\,\widetilde{G}$ y converge a (x,y). Por lo tanto para $\beta/4$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que se tiene que $d((x,y_m)(x,y)) < \beta/4$. Como $(x,y_m) \in \mathrm{Gr}\,\widetilde{G} \subset B(\mathrm{Gr}\,F, \beta/2)$ existe $(x_1,y_1) \in \mathrm{Gr}\,F$ tal que $d((x,y_m),(x_1,y_1)) < \beta/2$. Tenemos ahora que $(x_1,y_1) \in \mathrm{Gr}\,F$ y

$$d((x,y),(x_1,y_1)) \leq d((x,y),(x,y_m)) + d((x,y_m),(x_1,y_1)) < \beta.$$

Por tanto $(x,y) \in B(\mathrm{Gr}\,F, \beta/2)$. □

Teorema 2.4.14 (Teorema de Punto Fijo de Kakutani, 1941)**.** *Sea K un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^m$. Sea $F : K \to \mathscr{P}(K)$ una multifunción de grafo cerrado (superiormente semicontinua y con valores cerrados) y con valores convexos. Entonces F tiene un punto fijo.*

Demostración. Por el Lema 2.4.12 y el Corolario 2.4.13 para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una multifunción inferiormente semicontinua $G_n : K \to \mathscr{P}(K)$ con valores cerrados y convexos tal que $\operatorname{Gr} G_n \subset B(\operatorname{Gr} F, 1/n)$. Fijamos $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Selección de Michael 2.3.2 existe una selección continua $\phi_n : K \to K$ para G_n. El Teorema 2.4.6 (que utiliza Teorema del punto fijo de Brouwer) existe $x_n \in K$ tal que $x_n = \phi_n(x_n)$.

Utilizando la compacidad de K se puede tomar una subsucesión (x_{n_k}) que converge a un punto $x \in K$. Como $x_{n_k} = \phi_{n_k}(x_{n_k}) \in G_{n_k}(x_{n_k})$ se tiene que

$$(x_{n_k}, x_{n_k}) \in B(\operatorname{Gr} G_{n_k}) \subset B(\operatorname{Gr} F, 1/n_k) \text{ para todo } k$$

y por tanto $(x, x) \in \overline{\operatorname{Gr} F} = \operatorname{Gr} F$. Esto significa que $x \in F(x)$, es decir, x es un punto fijo de F. □

El Lema 2.4.12 y esta prueba del Teorema de Punto Fijo de Kakutani se deben a Celina [11].

Capítulo 3

Existencia de equilibrio walrasiano

«CONTENIDOS»

- Modelización matemática de una economía de intercambio puro.
- Definición de equilibrio walrasiano en una economía de intercambio puro.
- Propiedades matemáticas de los elementos del modelo matemático de una economía de intercambio puro.
- Demostración, usando el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, de la existencia de un equilibrio walrasiano.

En este capítulo estudiaremos uno de los problemas más antiguos en la economía, el del intercambio de bienes y servicios entre un número finito de agentes. El problema que analizaremos es el siguiente: un grupo de agentes posee ciertas cantidades de ciertos bienes y desea intercambiarlos entre sus miembros con el fin de aumentar su bienestar. Estaremos, por tanto, involucrados en la búsqueda de soluciones que "satisfagan" este problema fundamental.

Demostraremos la existencia de este tipo de solución para el problema planteado anteriormente, que es un caso particular de un modelo económico mucho más general.

Las primeras soluciones a este problema fueron obtenidas por León Walras (1834-1910) [32] y Vilfredo Pareto (1848-1923) [23, 24, 25, 26] respectivamente, pero ni los maestros de la Escuela de Lausanne [1] ni sus discípulos ofrecieron, por varias décadas, una

[1]Escuela económica surgida en la segunda mitad del siglo XIX en la Universidad de Lausanne, Suiza, que recurrió extensamente al uso de las matemáticas en la ciencia económica para explicar, fundamental-

presentación muy rigurosa de sus ideas. Hubo que esperar hasta 1935-1936 para que el matemático húngaro Abraham Wald (1902-1950) publicara el primer análisis riguroso del problema del equilibrio demostrando su existencia, aunque en un modelo económico que difiere un tanto del planteado por Walras. Nuestras referencias básicas para este capítulo son [13, 15, 18].

3.1. El modelo matemático de una economía de intercambio puro.

Como hemos comentado antes, el problema que estudiaremos es el del intercambio de bienes y servicios entre un número *finito* de agentes. Un grupo de agentes que poseen ciertas cantidades de ciertos bienes, desea redistribuirlos entre sus miembros con el fin de aumentar su bienestar. Hasta ahora hemos empleado dos conceptos básicos, *bienes* y los *agentes* que poseen dichos bienes y los intercambian.

Un bien o mercancía es cualquier cosa susceptible de ser usada o consumida. Puede ser un bien físico como el pan, o un servicio como el desprendido por el uso de algunos objetos. En nuestro modelo nos ocuparemos solamente del intercambio de bienes que ya existen, y en el mismo no se considerará ningún tipo de producción. Supondremos además que hay solamente un número finito l de bienes. Las cantidades de los bienes estarán dadas por números reales no negativos. Considerando además una asignación de los bienes como l números reales no negativos, podemos describir dicha asignación con un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l_+$. Resumiendo:

- El espacio de los bienes o mercancías es $\mathbb{R}^l_+$.
- Una asignación de bienes es un vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l_+$.

Por A denotaremos el conjunto de todos los *agentes*.

mente, el modo en que se establecen los complejos equilibrios de una economía de mercado. El logro principal de León Walras y Vilfredo Pareto fue estudiar cómo se alcanza el equilibrio general en una economía donde compradores y vendedores interactúan definiendo un conjunto de precios y de cantidades producidas. La moderna teoría del equilibrio general, desarrollada posteriormente por Hicks, Arrow y Hahn, debe mucho al sólido trabajo de la Escuela de Lausanne; de esta misma fuente, aunque con un sesgo distinto, parten también los trabajos de la denominada Economía del Bienestar.

En nuestro modelo económico de intercambio puro un agente se fijará, a la hora de hacer sus planes, únicamente en las asignaciones de bienes $x \in \mathbb{R}^l_+$. El agente $a \in A$ estará interesado en un subconjunto $X(a)$ de $\mathbb{R}^l_+$. Un posible *plan de consumo* del agente a es cualquier asignación de bienes en su conjunto de consumo, esto es, cualquier $x \in X(a)$. Por lo tanto, tendremos que:

- El conjunto de consumo $X(a)$ de un agente a es un subconjunto de $\mathbb{R}^l_+$.
- El plan de consumo de un agente a es un elemento $x \in X(a)$.

En particular, para el análisis de nuestra problemática consideraremos que para todo agente a su conjunto de consumo es $X(a) = \mathbb{R}^l_+$.

Un agente está totalmente definido por tres elementos, su *conjunto de consumo*, sus *preferencias* y sus *recursos iniciales*. Un agente posee unos recursos iniciales y se espera que haga elecciones. Sus elecciones dependen de sus preferencias. Al considerar un agente dos planes de consumo, tendrá que decidir si "prefiere" uno de los planes más que el otro o si le es "indiferente" tomar tal decisión.

Definición 3.1.1. *Una relación binaria $\succcurlyeq$ en un conjunto X se dice que es:*

i) Reflexiva si $x \succcurlyeq x$ para todo $x \in X$.

ii) Total si para todo $x, y \in X$ se tiene que $x \succcurlyeq y$ y/o $y \succcurlyeq x$.

iii) Transitiva si para todo $x, y, z \in X$ con $x \succcurlyeq y$ e $y \succcurlyeq z$, se tiene que $x \succcurlyeq z$.

iv) Continua si X es un espacio topológico y los conjuntos

$$\{x \in X : y \succcurlyeq x\} \text{ y } \{x \in X : x \succcurlyeq y\}$$

son cerrados para todo $y \in X$.

Una relación de preferencia en un espacio topológico X es una relación binaria que cumple las condiciones anteriores i)-iv).

Denotaremos por $x \succ y$ el caso en que $x \succcurlyeq y$ y además no se cumple que $y \succcurlyeq x$.

Cada agente a tiene asociada una relación de preferencia $\succcurlyeq_a$ en $\mathbb{R}^l_+$. Escribiremos $x \succcurlyeq_a y$ si el plan de consumo x es *preferido o indiferente* al plan de consumo y para el agente a. En caso que x sea *preferido* a y por el agente a escribiremos $x \succ_a y$.

Proposición 3.1.2. *Sea $\succcurlyeq$ una relación binaria reflexiva, total y transitiva en un espacio topológico X. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

i) *Para cualesquiera* $x, y \in X$ *con* $x \succ y$ *existen una vecindad* U_x *de* x *y una vecindad* U_y *de* y *tales que* $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ *para todo* $\tilde{x} \in U_x$ *y todo* $\tilde{y} \in U_y$.

ii) $\{(x,y) \in X \times X : x \succcurlyeq y\}$ *es un subconjunto cerrado de* $X \times X$.

iii) $\succcurlyeq$ *es continua.*

Demostración. i) $\Rightarrow$ *ii)* Escribimos $D = \{(x,y) \in X \times X : x \succcurlyeq y\}$. Veamos que $D = \overline{D}$. Dado cualquier $(x,y) \in \overline{D}$, tenemos que para cualquier vecindad V de (x,y) en $X \times X$ existe un punto $(x_1, y_1) \in V$ con $(x_1, y_1) \in D$, es decir, $x_1 \succcurlyeq y_1$.

Supongamos que $(x,y) \notin D$, esto es $y \succ x$ (utilizamos que $\succcurlyeq$ es una relación total). Por *i)* existe una vecindad $U_x \times U_y$ de (x,y) en $X \times X$ tal que $\tilde{y} \succ \tilde{x}$ para todo $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in U_x \times U_y$. Esto contradice el hecho de que $(x,y) \in \overline{D}$. Así que $\overline{D} = D$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Fijamos $y \in X$. La función $f : X \to X \times X$ definida por $f(x) = (x,y)$ es continua. Por tanto, el conjunto

$$f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in D\} = \{x \in X : x \succcurlyeq y\}$$

es cerrado. De la misma forma, la función $g : X \to X \times X$ definida por $g(x) = (y,x)$ es continua. Por tanto, el conjunto

$$g^{-1}(D) = \{x \in X : g(x) \in D\} = \{x \in D : y \succcurlyeq x\}$$

es cerrado.

iii) $\Rightarrow$ *i)* $\boxed{\textbf{Caso } 1}$

Supongamos que existe un $z \in X$ tal que $x \succ z \succ y$. Tomemos $U_x = \{u \in X : u \succ z\}$ y $U_y = \{u \in X : z \succ u\}$. Entonces $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Además, por la continuidad de $\succcurlyeq$, los conjuntos U_x y U_y son abiertos (sus respectivos complementos son los conjuntos cerrados $\{u \in X : z \succcurlyeq u\}$ y $\{u \in X : u \succcurlyeq z\}$).

$\boxed{\textbf{Caso } 2}$

Supongamos ahora que el conjunto $\{z \in X : x \succ z \succ y\}$ es vacío. Definimos los conjuntos $U_x = \{u \in X : u \succcurlyeq x\}$ y $U_y = \{u \in X : y \succcurlyeq u\}$. Entonces $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Ambos conjuntos son cerrados por la continuidad de $\succcurlyeq$, pero a la vez también son abiertos porque $U_x = U_y^c$ y $U_y = U_x^c$.

Claramente, en ambos casos se tiene que $\tilde{x} \succ \tilde{y}$ para todo $\tilde{x} \in U_x$ y todo $\tilde{y} \in U_y$. $\square$

Si $x, y \in \mathbb{R}^l$, escribimos $x \geqq y$ si $x_i \geq y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$ y escribimos $x \gg y$ si $x_i > y_i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$.

Definición 3.1.3. *Una relación de preferencia $\succcurlyeq$ en $\mathbb{R}^l_+$ es monótona si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^l_+$ distintos con $x \geqq y$ se cumple $x \succ y$.*

Proposición 3.1.4. *Sea C un subconjunto no vacío y compacto de un espacio topológico X y sea $\succcurlyeq$ una relación de preferencia en X. Entonces el conjunto*

$$C_{\succcurlyeq} = \{x \in C : x \succcurlyeq z \text{ para todo } z \in C\}$$

es no vacío y compacto.

Demostración. Consideremos, para todo $z \in C$, el conjunto $C_z = \{x \in C : x \succcurlyeq z\}$ que claramente es no vacío pues $z \in C_z$. Por la continuidad de $\succcurlyeq$, el conjunto C_z es cerrado en C. Entonces $C_{\succcurlyeq} = \bigcap_{z \in C} C_z$ es cerrado en C por ser intersección de cerrados. Además $C_{\succcurlyeq}$ es compacto, al ser un subconjunto cerrado de un compacto.

Veamos que para cualquier conjunto finito de puntos $\{z_1, z_2, \ldots, z_q\} \subset C$ tenemos $\bigcap_{n=1}^{q} C_{z_n} \neq \emptyset$. Como $\succcurlyeq$ es total y transitiva, un proceso inductivo asegura que podemos encontrar $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ tal que $z_i \succcurlyeq z_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots, q$. Entonces $C_{z_i} \subset C_{z_n}$ para todo $n = 1, 2, \ldots, q$, así que $z_i \in C_{z_i} \subset \bigcap_{n=1}^{q} C_{z_n}$, por lo que $\bigcap_{n=1}^{q} C_{z_n} \neq \emptyset$.

Como C es compacto y la familia de cerrados $\{C_z : z \in C\}$ cumple la propiedad de intersección finita, tenemos que $C_{\succcurlyeq} \neq \emptyset$. □

Definición 3.1.5. *Una relación binaria $\succcurlyeq$ en un subconjunto X de un espacio vectorial es convexa si para todo $x \in X$ el conjunto $\{y \in X : y \succcurlyeq x\}$ es convexo.*

Definición 3.1.6. *Al conjunto de todas las relaciones de preferencia en $\mathbb{R}^l_+$ que son monótonas y convexas lo denotaremos por $\mathbb{P}$.*

Para terminar con los aspectos que definen a un agente sólo nos queda referirnos a los recursos iniciales. Partiremos del supuesto de que todos los agentes poseen al menos alguna cantidad de algún bien. Los recursos iniciales de un agente a vienen dados por un vector $e(a) \in \mathbb{R}^l_+$. Un agente a está por tanto definido por:

i) su conjunto de consumo, en nuestro caso $X(a) = \mathbb{R}^l_+$,
ii) sus preferencias: $\succcurlyeq_a \in \mathbb{P}$,
iii) sus recursos iniciales: $e(a) \in \mathbb{R}^l_+$.

El estado inicial de una economía de intercambio puro estará definido entonces al especificar las preferencias y los recursos iniciales de los agentes implicados, es decir, con la asignación de un elemento de $\mathbb{P} \times \mathbb{R}^l_+$ a cada agente $a \in A$.

Definición 3.1.7. *Llamaremos recursos totales al vector de $\mathbb{R}^l_+$ definido por:*

$$r = \sum_{a \in A} e(a).$$

Definición 3.1.8. *Una redistribución es una función $f : A \to \mathbb{R}^l_+$ de forma que:*

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} e(a) = r.$$

Definición 3.1.9. *Una economía de intercambio puro es una multifunción $\mathscr{E}$ del conjunto de agentes A en el espacio $\mathbb{P} \times \mathbb{R}^l_+$ (que llamaremos espacio de características de los agentes). Es decir una multifunción $\mathscr{E} : A \to \mathscr{P}(\mathbb{P} \times \mathbb{R}^l_+)$ definida como:*

$$\mathscr{E}(a) = (\succcurlyeq_a, X(a)).$$

En nuestro modelo particular:

$$\mathscr{E}(a) = (\succcurlyeq_a, \mathbb{R}^l_+).$$

Un *precio* del bien o mercancía i-ésimo es un número real p_i, que en este trabajo asumiremos no negativo. Un *sistema de precios* es un vector de precios de todas las mercancías, es decir, un vector $p = (p_1, p_2, \ldots, p_l) \in \mathbb{R}^l_+$. Los precios sirven para explicar la razón a la que pueden ser intercambiados los bienes. Por tanto, p_i/p_j da la cantidad del bien j que puede ser intercambiada por una unidad del bien i. Si no se consideran préstamos ni regalos, dos asignaciones de bienes $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ pueden intercambiarse si:

$$px = \sum_{i=1}^{l} p_i x_i = \sum_{i=1}^{l} p_i y_i = py.$$

Con frecuencia es conveniente normalizar los precios y considerar sólo sistemas de precios $p \in \mathbb{R}^l_+$ tales que $\sum_{i=1}^{l} p_i = 1$.

Definición 3.1.10. *Denotaremos por Δ al conjunto:*

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}^l_+ : p_i > 0 \; para \; i = 1, 2, \ldots, l \; y \; \sum_{i=1}^{l} p_i = 1\},$$

cuya clausura es

$$\overline{\Delta} = \{p \in \mathbb{R}^l_+ : \sum_{i=1}^{l} p_i = 1\}.$$

Las preguntas *¿de dónde provienen los precios? ¿cómo se establecen o quién los determina?* quedarán sin responder en este trabajo. Los precios los supondremos determinados de alguna forma arbitraria y aceptados por los agentes como dados por un vector $p \in \mathbb{R}^l_+$. Esto es posiblemente razonable tratándose de consumidores en economías grandes. Aunque podamos creer que la demanda afecta a los precios en economías grandes, es difícil que la acción de algún agente pueda ser capaz de cambiar los precios. En otras palabras, la aceptación de los precios es plausible en grandes economías en las que los individuos son "insignificantes".

Definición 3.1.11. *Sea $p \in \mathbb{R}^l_+$ un sistema de precios. Para un agente $a \in A$ con unos recursos iniciales $e(a) \in \mathbb{R}^l_+$, se define su conjunto presupuestario como:*

$$\beta(e(a), p) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : px \leq pe(a)\}.$$

Notemos que $0 \in \beta(e(a), p)$ y que $\beta(e(a), p)$ es convexo, además si $p \gg 0$ entonces $\beta(e(a), p)$ es compacto.

Definición 3.1.12. *Sea $p \in \mathbb{R}^l_+$ un sistema de precios. Para un agente $a \in A$ con una relación de preferencia $\succcurlyeq_a \in \mathbb{P}$ y unos recursos iniciales $e(a) \in \mathbb{R}^l_+$, se define su conjunto de demanda como:*

$$\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p) = \{x \in \beta(e(a), p) : x \succcurlyeq_a y \text{ para todo } y \in \beta(e(a), p)\}.$$

En el cuadro 3.1 resumimos los conceptos principales de nuestro modelo.

Dado un sistema de precios, los agentes eligen el plan de consumo que prefieren dentro de su conjunto presupuestario. Si para dichos precios la demanda y la oferta total de todos los bienes coinciden, entonces se dice que la situación está en un equilibrio de Walras. Formalmente:

Definición 3.1.13 (Equilibrio walrasiano). *Para una economía de intercambio puro $\mathscr{E}$, un equilibrio walrasiano o competitivo es un par (f, p), donde $f : A \to \mathbb{R}^l_+$ es una función y $p \in \mathbb{R}^l_+$ es un sistema de precios tales que:*

i) $f(a) \in \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$ *para todo* $a \in A$.

ii) f *es una redistribución en* $\mathscr{E}$, *esto es,* $\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} e(a)$.

i) El espacio de los bienes: $\mathbb{R}^l_+$.

ii) Un conjunto finito de agentes A, cada uno con las siguientes características:

1) Conjunto de consumo, en nuestro caso $X(a) = \mathbb{R}^l_+$.

2) Preferencias: $\succcurlyeq_a \in \mathbb{P}$.

3) Recursos iniciales: $e(a) \in \mathbb{R}^l_+$.

iii) Un sistema de precios: $p \in \mathbb{R}^l_+$.

iv) El conjunto presupuestario del agente a:

$$\beta(e(a), p) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : px \leq pe(a)\}.$$

v) El conjunto de demanda del agente a:

$$\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p) = \{x \in \beta(e(a), p) : x \succcurlyeq_a y \; \forall y \in \beta(e(a), p)\}.$$

Cuadro 3.1: Modelo matemático de una economía de intercambio puro.

En una economía $\mathscr{E}$ una función f para la que existe un sistema de precios p tal que (f, p) es un equilibrio walrasiano se llama función walrasiana. El conjunto de funciones walrasianas de la economía $\mathscr{E}$ se denota por $\mathscr{W}(\mathscr{E})$. Análogamente, un sistema de precios p para el cual existe una función f tal que (f, p) es un equilibrio walrasiano se llama sistema de precios walrasiano. El conjunto de los sistemas de precios walrasianos se denota por $\Pi(\mathscr{E})$.

3.2. Existencia de equilibrio walrasiano.

El problema de la existencia de precios competitivos (equilibrio walrasiano) ha ocupado, a pesar de las simplificaciones que se puedan realizar en los modelos económicos, un papel central en la economía matemática. Tal existencia se suele describir como uno de los requisitos mínimos de un modelo económico. La demostración de la existencia de un equilibrio walrasiano se basa en las propiedades matemáticas de la multifunción de demanda y en el Teorema de Punto Fijo de Kakutani 2.4.14.

Proposición 3.2.1. *Sean $a \in A$ y $(\succcurlyeq_a, e(a)) \in \mathbb{P} \times \mathbb{R}^l_+$. Entonces:*

i) El conjunto de demanda $\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$ es no vacío y compacto para cada sistema de precios $p \gg 0$.

ii) Para cada sistema de precios $p \in \mathbb{R}^l_+$ y cada número real $\lambda > 0$, se tiene la siguiente igualdad $\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p) = \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), \lambda p)$.

iii) Si (p_n) es una sucesión en $\mathbb{R}^l_+$ convergente a $p \in \mathbb{R}^l_+$ con $pe(a) > 0$ y (x_n) es una sucesión en $\mathbb{R}^l_+$ convergente a $x \in \mathbb{R}^l_+$ tal que $x_n \in \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p_n)$, entonces se cumple que $x \in \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$.

iv) La multifunción de demanda $\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), \cdot)$ es superiormente semicontinua para cada sistema de precios $p \gg 0$.

v) Sea (p_n) una sucesión en Δ que converge a $p \in \overline{\Delta} \setminus \Delta$ con $pe(a) > 0$. Entonces:

$$\text{ínf}\{\|x\| : x \in \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p_n)\} \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

vi) El conjunto de demanda $\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$ es convexo para todo $p \in \mathbb{R}^l_+$.

Demostración. *i)* Si $p \gg 0$ el conjunto presupuestario $\beta(e(a), p)$ es no vacío y compacto. Utilizando la Proposición 3.1.4 deducimos que $\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$ es no vacío y compacto.

ii) Es directo porque $\beta(e(a), p) = \beta(e(a), \lambda p)$.

iii) $x_n \in \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p_n)$, en particular $x_n \in \beta(e(a), p_n)$ por lo tanto $p_n x_n \leq p_n e(a)$. Como $p_n \to p$ y $x_n \to x$ tenemos $px \leq pe(a)$, es decir, $x \in \beta(e(a), p)$. Vamos a ver ahora que $x \in \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$ es decir, que $x \succcurlyeq_a y$ para todo $y \in \beta(e(a), p)$.

Supongamos en primer lugar que $py < pe(a)$. Entonces para n suficientemente grande tendremos $p_n y < p_n e(a)$. Como $x_n \in \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p_n)$, se deduce que $x_n \succcurlyeq_a y$. Utilizando la continuidad de $\succcurlyeq_a$ obtenemos que $x \succcurlyeq_a y$.

Supongamos por el contrario que $py = pe(a)$. Como $py = pe(a) > 0$ podemos encontrar una sucesión (y_m) en $\mathbb{R}^l_+$ convergente a y con $py_m < py$. En efecto, escribimos $p = (p^1, p^2, \ldots, p^l)$ e $y = (y^1, y^2, \ldots, y^l)$ como $py > 0$ existe i con $1 \leq i \leq l$ tal que $p^i y^i > 0$. Tomamos $0 < y^i_m < y^i$, con $y^i_m \to y^i$ cuando $m \to \infty$. La sucesión (y_m) definida como $y_m = (y^1, y^2, \ldots, y^{i-1}, y^i_m, y^{i+1}, \ldots, y^l)$ converge a y. Además

$$py_m = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l} p^j y^j + p^i y^i_m < \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{l} p^j y^j + p^i y^i = py.$$

Fijamos $m \in \mathbb{N}$. Para n suficientemente grande tenemos $p_n y_m < p_n y$ usando el hecho de que $x_n \in \varphi(\succsim_a, e(a), p_n)$ deducimos $x_n \succsim_a y_m$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$ y usando la continuidad de $\succsim_a$ obtenemos $x \succsim_a y_m$. Tomando ahora el límite cuando $m \to \infty$ y usando de nuevo la continuidad de $\succsim_a$, concluimos $x \succsim_a y$ como se quería demostrar.

iv) Sea $\Omega = \{p \in \mathbb{R}^l_+ : p \gg 0\}$. Por *i)*, $\varphi(\succsim_a, e(a), \cdot) : \Omega \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^l_+)$ tiene valores compactos. Para demostrar que es superiormente semicontinua podemos utilizar la Proposición 2.2.15. Es decir, vamos a ver que para cada sucesión (p_n) en Ω convergente a $p \in \Omega$ y para cada $x_n \in \varphi(\succsim_a, e(a), p_n)$, existe una subsucesión convergente (x_{n_k}) cuyo límite pertenece a $\varphi(\succsim_a, e(a), p)$.

Escribimos $p_n = (p^1_n, p^2_n, \ldots, p^l_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea

$$q = \text{ínf}\{p^h_n : h = 1, 2, \ldots, l, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Como $p_n \to p$ y $p_n, p \in \Omega$ deducimos que $q > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $x_n \in \beta(e(a), p_n)$, luego

$$0 \le x^h_n \le \frac{p_n e(a)}{q} \quad \text{para todo } h = 1, 2, \ldots, l.$$

Como $p_n e(a) \to pe(a)$, la sucesión $(p_n e(a))$ está acotada y las desigualdades anteriores garantizan que la sucesión (x_n) está acotada. Entonces podemos encontrar una subsucesión convergente (x_{n_k}). Sea $x \in \mathbb{R}^l_+$ el límite de (x_{n_k}). Aplicando *iii)*[2] a la subsucesión (x_{n_k}) deducimos que $x \in \varphi(\succsim_a, e(a), p)$.

v) Por reducción al absurdo, supongamos que *v)* es falso. Entonces podemos encontrar una sucesión $n_1 < n_2 < \ldots$ en $\mathbb{N}$ y vectores $z_{n_k} \in \varphi(\succsim_a, e(a), p_{n_k})$ de manera que la sucesión (z_{n_k}) está acotada. Pasando a una subsucesión, podemos suponer que (z_{n_k}) es convergente, con límite $z \in \mathbb{R}^l_+$. Aplicando *iii)* se deduce que $z \in \varphi(\succsim_a, e(a), p)$.

Por hipótesis $p = (p^1, p^2, \ldots, p^l) \in \overline{\Delta} \setminus \Delta$, luego existe algún $1 \le i \le l$ tal que $p^i = 0$. Sean

$$z = (z^1, z^2, \ldots, z^l) \text{ y } z' = (z^1, z^2, \ldots, z^{i-1}, z^i + 1, z^{i+1}, \ldots, z^l).$$

Evidentemente $pz' = pz \le pe(a)$, así que $z' \in \beta(e(a), p)$. Pero como $\succsim_a$ es monótona, $z' \succ_a z$, contradiciendo que $z \in \varphi(\succsim_a, e(a), p)$.

[2] Suponemos que $pe(a) > 0$, en caso contrario es trivial.

vi) Observamos que

$$\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p) = \bigcap_{z\in\beta(e(a),p)} \{x \in \beta(e(a), p) : x \succcurlyeq_a z\}.$$

Como la relación $\succcurlyeq_a$ es convexa, cada conjunto $\{x \in \mathbb{R}^l_+ : x \succcurlyeq_a z\}$ es convexo. Puesto que $\beta(e(a), p)$ es convexo, tenemos entonces que $\{x \in \beta(e(a), p) : x \succcurlyeq_a z\}$ es convexo para todo z y, por lo tanto, la intersección de todos estos conjuntos también es un conjunto convexo. □

Definición 3.2.2. *Sea $\mathscr{E} : A \to \mathscr{P}(\mathbb{P} \times \mathbb{R}^l_+)$ una economía de intercambio puro tal que $r = \sum_{a\in A} e(a) \gg 0$. Definimos la multifunción de demanda total*

$$\Phi : \{p \in \mathbb{R}^l_+ : p \gg 0\} \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^l_+)$$

como $\Phi(p) = \sum_{a\in A} \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$, donde $\sum_{a\in A} \varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$ es la suma de Minkowski de los conjuntos $\varphi(\succcurlyeq_a, e(a), p)$.

Proposición 3.2.3. *En las condiciones anteriores, Φ posee las siguientes propiedades:*

i) Para cada sistema de precios $p \gg 0$ y cada número real $\lambda > 0$, se tiene la siguiente igualdad $\Phi(p) = \Phi(\lambda p)$.

ii) (Identidad de Walras) Para cada sistema de precios $p \gg 0$ y cada $x \in \Phi(p)$, se tiene que $px = pr$.

iii) Φ es superiormente semicontinua y toma valores compactos y convexos.

iv) Sea (p_n) una sucesión en Δ que converge a $p \in \overline{\Delta} \setminus \Delta$. Entonces:

$$\text{ínf}\{\|x\| : x \in \Phi(p_n)\} \to \infty \quad \textit{cuando } n \to \infty.$$

Demostración. *i)* Se sigue directamente de la Proposición 3.2.1 *ii)* y la definición de Φ.

ii) Escribimos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ y $x = \sum_{i=1}^m x(a_i)$ donde $x(a_i) \in \varphi(\succcurlyeq_{a_i}, e(a_i), p)$. Como $px(a_i) \le pe(a_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$, se tiene

$$px = px(a_1) + px(a_2) + \ldots + px(a_m) \le pe(a_1) + pe(a_2) + \ldots + pe(a_m) = pr.$$

Supongamos por reducción al absurdo que $px < pr$. Entonces al menos para un agente a_i se cumple que $px(a_i) < pe(a_i)$.

Escribimos $x(a_i) = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$ y $p = (p_1, p_2, \ldots, p_l)$. Podemos encontrar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $px(a_i) + p_1\varepsilon < pe(a_i)$. El vector $x' = (x_1 + \varepsilon, x_2, \ldots, x_l)$ pertenece entonces a $\beta(e(a_i), p)$. Así $x(a_i) \succcurlyeq_{a_i} x'$. Pero $x' \geqq x(a_i)$ y por la monotonía de $\succcurlyeq_{a_i}$ se tiene $x' \succ_{a_i} x(a_i)$, contradicción. Esto demuestra que $px = pr$.

iii) Se sigue inmediatamente de las Proposiciones 3.2.1 y 2.2.16.

iv) Como $r \gg 0$ tenemos $0 < pr = \sum_{a \in A} pe(a)$ y por lo tanto al menos un agente a_i cumple que $pe(a_i) > 0$. Además como estamos en el espacio $\mathbb{R}^l_+$ se cumple que

$$\text{ínf}\{\|x\| : x \in \Phi(p_n)\} \geq \text{ínf}\{\|y\| : y \in \varphi(\succcurlyeq_{a_i}, e(a_i), p_n)\} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

La Proposición 3.2.1 *v)* acaba la prueba. □

Definición 3.2.4. *Sea $\mathscr{E} : A \to \mathscr{P}(\mathbb{P} \times \mathbb{R}^l_+)$ una economía de intercambio puro tal que $r = \sum_{a \in A} e(a) \gg 0$. Definimos la multifunción de exceso de demanda total*

$$Z : \{p \in \mathbb{R}^l_+ : p \gg 0\} \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^l)$$

como $Z(p) = \Phi(p) - r$.

De la Proposición 3.2.3 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.5. *En las condiciones de la definición anterior, Z posee las siguientes propiedades:*

i) *Para cada sistema de precios $p \gg 0$ y cada número real $\lambda > 0$, se tiene la siguiente igualdad $Z(p) = Z(\lambda p)$.*

ii) *Para cada sistema de precios $p \gg 0$ y cada $z \in Z(p)$, se tiene que $pz = 0$.*

iii) *Z es superiormente semicontinua y toma valores compactos y convexos.*

iv) *Sea (p_n) una sucesión en Δ que converge a un vector de precios $p \in \overline{\Delta} \setminus \Delta$. Entonces cualquier sucesión $z_n \in Z(p_n)$ es no acotada.*

La existencia de un equilibrio walrasiano (Definición 3.1.13) puede reformularse entonces como la existencia de un sistema de precios $\hat{p} \gg 0$ tal que $0 \in Z(\hat{p})$.

Teorema 3.2.6 (Existencia de equilibrio walrasiano)**.** *Sea $\mathscr{E} : A \to \mathscr{P}(\mathbb{P} \times \mathbb{R}^l_+)$ una economía de intercambio puro tal que $r = \sum_{a \in A} e(a) \gg 0$. Entonces existe un sistema de precios $\hat{p} \in \mathbb{R}^l_+$, con $\hat{p} \gg 0$ tal que $0 \in Z(\hat{p})$.*

Para la demostración del teorema anterior necesitamos algunos resultados auxiliares.

Proposición 3.2.7. *Sean S y T espacios métricos y sea $B : S \to \mathscr{P}(T)$ una multifunción. Supongamos que para cada $s \in S$ tenemos una relación binaria $\gtrdot_s$ en $B(s)$ con las siguientes propiedades:*

- *$\gtrdot_s$ es transitiva.*
- *$\gtrdot_s$ es irreflexiva, esto es, no existe $x \in B(s)$ tal que $x \gtrdot_s x$.*
- *El conjunto $P = \{(s,x,y) \in S \times T \times T : x \gtrdot_s y\}$ es abierto en $S \times T \times T$.*

Entonces:

i) Si $B(s)$ es compacto, el conjunto $\varphi(s) = \{x \in B(s) :$ no existe $y \in B(s)$ con $y \gtrdot_s x\}$ es no vacío y compacto.

ii) Si $B(s)$ es compacto todo $s \in S$ y B es inferiormente semicontinua la multifunción $\varphi : S \to \mathscr{P}(T)$ tiene grafo cerrado.

Demostración. i) Sea $s \in S$ tal que $B(s)$ es compacto. Supongamos por reducción al absurdo que $\varphi(s) = \emptyset$. Entonces para todo $y \in B(s)$ existe un $y^* \in B(s)$ tal que $y^* \gtrdot_s y$. Fijemos un $z \in B(s)$ arbitrario, escribimos:

$$\gamma(z) = \{y \in B(s) : z \gtrdot_s y\}.$$

La aplicación $f : B(S) \to S \times T \times T$ definida como $f(y) = (s,z,y)$ es continua y el conjunto P es abierto en $S \times T \times T$, luego $f^{-1}(P) = \{y \in B(S) : z \gtrdot_s y\} = \gamma(z)$ es abierto en $B(S)$. Como supusimos que $\varphi(s) = \emptyset$, todo elemento de $B(s)$ pertenecerá al menos a un conjunto $\gamma(z)$. Así haciendo variar $z \in B(s)$ la familia $\{\gamma(z)\}_{z \in B(s)}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto $B(s)$. Tomemos un subcubrimiento finito $\{\gamma(z_1), \gamma(z_2), \ldots, \gamma(z_k)\}$.

Como $\gtrdot_s$ es irreflexiva, $z_1 \notin \gamma(z_1)$. Ahora existe un $j \in \{2, \ldots, l\}$ tal que $z_1 \in \gamma(z_j)$, es decir, $z_j \gtrdot_s z_1$. Razonando igual para z_j, existirá al menos un $j' \in \{2, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ tal que $z_{j'} \gtrdot_s z_j \gtrdot_s z_1$ (utilizamos que $\gtrdot_s$ es transitiva e irreflexiva). Repitiendo este razonamiento llegaremos a que existe $z_n \gtrdot_s z_i$ para todo $i \neq n$, es decir $z_n \notin \gamma(z_i)$. Pero $z_n \notin \gamma(z_n)(\gtrdot_s$ es irreflexiva), luego $z_n \notin \bigcup_{i=1}^k \gamma(z_i) = B(S)$ y esto contradice el hecho de que $\{\gamma(z_1), \gamma(z_2), \ldots, \gamma(z_k)\}$ es un cubrimiento de $B(s)$. Así queda demostrado que $\varphi(s) \neq \emptyset$.

Para probar que $\varphi(s)$ es compacto, basta demostrar que es cerrado en $\varphi(s) \subset B(s)$. Sea (y_n) una sucesión en $\varphi(s)$ que converge a $y \in B(S)$. Supongamos por reducción al absurdo que $y \notin \varphi(s)$. Entonces existe $z \in B(s)$ tal que $z \succ_s y$, es decir, $(s,z,y) \in P$. Como P es abierto y $(s,z,y_n) \to (s,z,y)$ cuando $n \to \infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(s,z,y_n) \in P$, es decir, $z \succ_s y_n$ contradiciendo que $y_n \in \varphi(s)$. Así que $\varphi(s)$ es compacto.

ii) Sean (s_n) e (y_n) sucesiones en S y T convergentes a $s \in S$ e $y \in Y$, respectivamente, con $y_n \in \varphi(s_n)$. Supongamos por reducción al absurdo que $y \notin \varphi(s)$, es decir, que existe $z \in B(s)$ de forma que $z \succ_s y$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos $z \in B(z, 1/k) \cap B(s) \neq \emptyset$. Por la semicontinuidad inferior de B existe n_k tal que $B(z,1/k) \cap B(s_n) \neq \emptyset$ para cualquier $n \geq n_k$. Podemos encontrar entonces una subsucesión $n_1 < n_2 < \ldots$ en $\mathbb{N}$ y tomar puntos $z_{n_k} \in B(s_{n_k})$ tales que $z_{n_k} \to z$ cuando $k \to \infty$.

Como P es abierto en $S \times T \times T$, las propiedades

$$z \succ_s y, \quad z_{n_k} \to z, \quad s_{n_k} \to s \text{ e } y_{n_k} \to y$$

implican que $z_{n_k} \succ_{s_{n_k}} y_{n_k}$ para k suficientemente grande, en particular $y_{n_k} \notin \varphi(s_{n_k})$, lo que es una contradicción. □

Sabemos por la igualdad $Z(p) = Z(\lambda p)$ que podemos centrar nuestra atención en los sistemas de precios del conjunto $\overline{\Delta} = \{p \in \mathbb{R}^l_+ : p \geqq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^l p_i = 1\}$.

Lema 3.2.8. *Sea S un subconjunto cerrado y convexo de Δ. Supongamos que la multifunción $\Psi : S \to \mathscr{P}(\mathbb{R}^l_+)$ posee las siguiente propiedades:*

i) Existe un conjunto acotado $C \subset \mathbb{R}^l_+$ tal que $\Psi(p) \subset C$ para todo $p \in S$.

ii) El grafo de Ψ es cerrado.

iii) $\Psi(p)$ es convexo para todo $p \in S$.

iv) $pz \leq 0$ para todo $p \in S$ y todo $z \in \Psi(p)$.

Entonces existen $\hat{p} \in S$ y $\hat{z} \in \Psi(\hat{p})$ tales que:

$$p\hat{z} \leq 0 \textit{ para todo } p \in S.$$

Demostración. Podemos suponer que el conjunto C de la propiedad *i)* es convexo y cerrado.

$\boxed{\textbf{Paso } 1}$

Para cada vector $z \in C$ consideramos el conjunto convexo

$$\mu(z) = \left\{ p \in S : \; pz = \max_{q \in S} qz \right\}.$$

Queda definida así una multifunción $\mu : C \to \mathscr{P}(S)$. Vamos a aplicar la Proposición 3.2.7 para deducir que el grafo μ es cerrado. Sea $B : C \to \mathscr{P}(S)$ la multifunción que a cada elemento z del conjunto C le asigna el conjunto compacto S. Para cada $z \in C$, consideramos la relación binaria transitiva e irreflexiva $\succ_z$ en $B(z) = S$ definida por:

$$p_1 \succ_z p_2 \Leftrightarrow p_1 z > p_2 z.$$

Aplicando la Proposición 3.2.7 a B y a las relaciones $\succ_z$, obtenemos que μ tiene grafo cerrado.

$\boxed{\textbf{Paso } 2}$

Consideramos ahora la multifunción $F : S \times C \to \mathscr{P}(S \times C)$ dada por:

$$F(p,z) = \mu(z) \times \Psi(p).$$

$S \times C$ es un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^{2l}$ y la multifunción F toma valores convexos y tiene grafo cerrado[3]. Por tanto, el **Teorema de Kakutani 2.4.14** asegura que existe un punto fijo $(\hat{p}, \hat{z}) \in S \times C$ de F. Entonces:

$$\hat{p} \in \mu(\hat{z}) \quad \text{y} \quad \hat{z} \in \Psi(\hat{p}).$$

Como $\hat{p} \in \mu(\hat{z})$ de la definición de μ se deduce que $p\hat{z} \leq \hat{p}\hat{z}$ para cada $p \in S$. Por otro lado, como $\hat{z} \in \Psi(\hat{p})$, la hipótesis *iv)* garantiza que $\hat{p}\hat{z} \leq 0$. Por tanto $p\hat{z} \leq 0$ para cada $p \in S$. □

Demostración del Teorema 3.2.6. Definimos el conjunto cerrado y convexo

$$S_n = \left\{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \overline{\Delta} : p_h \geq 1/n, h = 1, 2, \ldots, l \right\} \text{ para cada } \quad n \geq l.$$

Claramente $\Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. De acuerdo al Corolario 3.2.5, tenemos que para cada $n \geq l$ la restricción de Z a S_n cumple las condiciones del Lema 3.2.8:

i) Z es superiormente semicontinua y toma valores compactos, así que por la Proposición 2.2.9 el conjunto $F(S_n)$ es compacto y, en particular acotado.

[3] Es consecuencia de las proposiciones 2.2.12, 2.2.17 y 2.2.11.

ii) El grafo de Z es cerrado porque Z es superiormente semicontinua y toma valores compactos, en particular cerrados (Proposición 2.2.11).

iii) Z toma valores convexos.

iv) Para todo $p \in S_n$ y $z \in Z(p)$ tenemos que $pz = 0$.

El Lema 3.2.8 garantiza que existen $p_n^* \in S_n$ y $z_n^* \in Z(p_n^*)$ tales que:

$$\boxed{pz_n^* \leq 0 \quad \text{para todo } p \in S_n.} \tag{*}$$

Como (p_n^*) es una sucesión en el compacto $\overline{\Delta}$, podemos suponer que es convergente hacia un vector $p^* \in \overline{\Delta}$ (se puede tomar una subsucesión convergente y repetir el mismo análisis).

La sucesión (z_n^*) está acotada. Elegimos cualquier $p \in \Delta$. Entonces $p \in S_n$ para n suficientemente grande, y (*) asegura que $pz_n^* \leq 0$. Si escribimos $p = (p^1, p^2, \ldots, p^l)$ y $z_n^* = (z_n^{*^1}, z_n^{*^2}, \ldots, z_n^{*^l})$, entonces

$$p^1 z_n^{*^1} + p^2 z_n^{*^2} + \ldots + p^l z_n^{*^l} \leq 0.$$

Ahora $z_n^* \in Z(p_n^*) = \Phi(p_n^*) - r$ y $\Phi(p_n^*) \subset \mathbb{R}_+^l$, luego $z_n^{*^i} \geq -r^i$ para $i = 1, 2, \ldots, l$, donde escribimos $r = (r^1, r^2, \ldots, r^l)$. Por tanto para cada $i = 1, 2, \ldots, l$ tenemos

$$-r^i p_i \leq p^i z_n^{*^i} \leq -p^1 z_n^{*^1} - p^2 z_n^{*^2} - \ldots - p^{i-1} z_n^{*^{i-1}} - p^{i+1} z_n^{*^{i+1}} - \ldots - p^l z_n^{*^l}$$

así que

$$-r^i \leq z_n^{*^i} \leq 1/p_i (p^1 r^1 + p^2 r^2 + \ldots + p^{i-1} r^{i-1} + p^{i+1} r^{i+1} + \ldots + p^l r^l).$$

y efectivamente tenemos que (z_n^*) está acotada y por el Corolario 3.2.5 *iv)* se garantiza que $p^* \in \Delta$.

Utilizando la Proposición 2.2.15 tenemos que existe una subsucesión $(z_{n_k}^*)$ convergente a $z^* \in Z(p^*)$ y por tanto $z^* p^* = 0$ (Corolario 3.2.5 *ii)*).

Veamos que $z^* = 0$. Fijamos $p \in \overline{\Delta}$. Tomamos una subsucesión $p_n \in S_n$ convergente a p. Como $p_n z_n^* \leq 0$ para todo k (por(*)), se tiene que $pz^* \leq 0$. Como $p \in \overline{\Delta}$ es arbitrario, se sigue $0 \geqq z^*$. Esto junto con la igualdad $z^* p^* = 0$ y el hecho de que $p^* \gg 0$ implican que $z^* = 0$.

Esto demuestra que existe p^* tal que $0 \in Z(p^*)$. $\square$

La demostración que acabamos de exponer garantiza la existencia de un equilibrio walrasiano. Sin embargo, no nos garantiza la forma encontrarlo. La pregunta

¿Existe algún procedimiento constructivo que nos permita encontrar dicho equilibro?

ha sido estudiada por Herbert Scarf [29] pero no es objeto de nuestro estudio.

Bibliografía

[1] Charalambos D. Aliprantis and Kim C. Border, *Infinite dimensional analysis*, third ed., Springer, Berlin, 2006, A hitchhiker's guide. MR MR2378491 (2008m:46001)

[2] Carlos Angosto and Bernardo Cascales, *A new look at compactness via distances to function spaces*, Advanced courses of mathematical analysis III, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008, pp. 49–66. MR MR2483918

[3] Kenneth J. Arrow and Michael D. Intriligator, *Historical introduction to mathematical economics.*, Handbook of mathematical economics, Vol. 1, 1-14 (1981)., 1981.

[4] Robert G. Bartle and Lawrence M. Graves, *Mappings between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 400–413. MR MR0047910 (13,951i)

[5] Yoav Benyamini and Joram Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR MR1727673 (2001b:46001)

[6] C. Berge, *Espaces topologiques*, Dunod, París, 1963.

[7] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry,second ed., pure and applied mathematics*, vol. 120, Academic Press Inc.,, Orlando, FL, 1986 MR 87k:58001.

[8] Felix E. Browder, *The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces*, Math. Ann. **177** (1968), 283–301. MR MR0229101 (37 #4679)

[9] B. Cascales, W. Marciszesky, and M. Raja, *Distance to spaces of continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), no. 13, 2303–2319. MR MR2238732

[10] B. Cascales and J. M. Mira, *Análisis funcional*, ICE- Universidad de Murcia - DM, 2002.

[11] A. Celina, *Aproximation of set-valued functions and fixed point theorems*, Annali di Mat. Pura e Aplicc **82** (1969), 17–24.

[12] M. de Guzmán, *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, Alhambra, Madrid, 1975, Teoría de estabilidad y control. [Theory of stability and control]. MR MR0473273 (57 #12948)

[13] Gerard Debreu, *Teoría del valor: un análisis axiomático del equilibrio economico*, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, Monograph 17, Bosch, Casa Editorial, Barcelona, 1973.

[14] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators I. General theory*, With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, vol. 7, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958. MR 22 #8302

[15] W. Hildenbrand and A. P. Kirman, *Introducción al análisis del equilibrio*, Bosch, Casa Editorial, Barcelona, 1982.

[16] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London, 1974. MR 57 #3828

[17] Shizuo Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), 457–459. MR MR0004776 (3,60c)

[18] Erwin Klein and Anthony C. Thompson, *Theory of correspondences*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, Including applications to mathematical economics, A Wiley-Interscience Publication. MR MR752692 (86a:90012)

[19] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I*, New edition, revised and augmented. Translated from the French by J. Jaworowski, Academic Press, New York, 1966. MR MR0217751 (36 #840)

[20] Ernest Michael, *Continuous selections. I*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 361–382. MR MR0077107 (17,990e)

[21] John F. Nash, Jr., *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **36** (1950), 48–49. MR MR0031701 (11,192c)

[22] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele.*, Math. Ann. **100** (1928), 295–320 (German).

[23] V. Pareto, *Cours d´économie politique*, Lausanne, Rouge (1896-1897).

[24] V Pareto, *Manuale di economia politica*, Società Editrice Libraria, Milano (1906).

[25] V. Pareto, *Trattato di sociologia generale*, Firenze Barbèra (1916).

[26] V Pareto, *Anwendungen der mathematik auf nationalökonomie*, Encyklopädie der mathematischen wissenschaften **tomo 1-volumen 2** (Leipzig Teubner,1902), 1094–1120.

[27] C. A. Rogers, *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem*, Amer. Math. Monthly **87** (1980), no. 7, 525–527. MR 82b:55004

[28] W. Rudin, *Análisis funcional*, Ed. Reverté, Barcelona, 1979.

[29] Herbert Scarf, *The computation of economic equilibria*, Yale University Press, New Haven, Conn., 1973, With the collaboration of Terje Hansen, Cowles Foundation Monograph, No. 24. MR MR0391909 (52 #12727)

[30] D.R. Smart, *Fixed point theorems*, Cambridge University Press, 1974.

[31] J. von Neumann, *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes.*, Erg. Math. Kolloqu. **8** (1937), 73–83 (German).

[32] León Walras, *Eléments d'economie politique pure*, Lausanne, Corbaz Wold, H. (1874-1877).