# Distancia a espacios de funciones continuas y compacidad débil

Carlos Angosto Hernández

TESINA DE LICENCIATURA

Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia
Abril de 2005

# Índice general

# Introducción

En este trabajo, además de una recopilación y puesta al día de material, hemos incluido varios resultados nuevos. En particular, hemos obtenido varias versiones cuantitativas en términos de distancias de ciertos teoremas clásicos en espacios de Banach y espacios de funciones: siendo más concretos, hemos obtenido una versión cuantitativa del Teorema de Grothendieck sobre compacidad en $C(K)$ con $K$ compacto, también hemos obtenido versiones cuantitativas del Teorema de Gantmacher sobre compacidad débil de operadores adjuntos y en estos mismos términos, también hemos generalizado un resultado que permite asegurar la angelicidad de los espacios $C(X)$ con $X$ numerablemente $K$-determinado. Estos resultados obtenidos serán parte de un artículo en preparación. Además, en la elaboración de este trabajo nos han surgido diversos problemas relacionados, que esperamos nos permitan seguir trabajando en estos temas. Hemos dividido esta tesina en dos partes:

- La primera parte la hemos llamado **Distancia a espacios de funciones** y en ella, mediante el estudio de distancias de funciones a espacios de funciones continuas se muestran cuantificaciones de teoremas clásicos de compacidad en espacios de funciones continuas y espacios de Banach. La herramienta principal usada en esta parte es la distancia entre límites iterados.

- La segunda parte de esta tesina la hemos llamado **Teorema de James**. En esta parte se estudia el teorema clásico de James sobre compacidad débil en espacios de Banach. Entre otras cosas, incluimos una demostración de este teorema debida a J. D. Pryce (véase [29]), en la que se utilizan herramientas desarrolladas en la primera parte de esta tesina. También se estudian aquí algunas consecuencias que se pueden obtener a partir de este teorema.

La primera parte de la tesina ha sido dividida en 4 capítulos y la segunda parte ha sido dividida en 3. A continuación sigue un resumen de cada uno de ellos.

## Capítulo 1. Preliminares topológicos.

En este capítulo se introducen las herramientas topológicas necesarias para desarrollar esta primera parte de la tesina. La primera sección de este capítulo se llama **Existencia de funciones continuas**. La herramienta principal es el Teorema 1.6 ([3, Proposition 1.18]), que establece la relación existente entre la oscilación de una función $f : X \to \mathbb{R}$ con $X$ un espacio normal y la distancia de dicha función a $C^*(X)$, el espacio de funciones continuas acotadas definidas sobre $X$, mediante la siguiente fórmula

$$d(f, C^*(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f).$$

Gracias a este teorema tendremos que el concepto de oscilación nos va a permitir en el Capítulo 2 ligar la noción de distancia a espacios de funciones continuas con la distancia entre límites iterados. La segunda sección de este capítulo, **Separación de conjuntos convexos**, es una herramienta fundamental para poder demostrar un resultado que nos va a permitir obtener fórmulas generales para distancias a espacios de Banach a partir de fórmulas generales para espacios de funciones continuas. Por último, se estudia el concepto de Paracompacidad y se muestran algunas caracterizaciones de esta noción, en términos de refinamientos baricéntricos, que se utilizan para estudiar distancias a espacios de funciones continuas a espacios $C(X, Z)$, con $X$ un espacio topológico paracompacto y $Z$ un subconjunto convexo compacto de un espacio normado.

## Capítulo 2. Distancia y funciones continuas.

En este capítulo se estudia la distancia de funciones a espacios de funciones continuas. La herramienta principal que se usa es la noción de $\varepsilon$-intercambio de límites que mide la distancia entre límites iterados.

**Definición 2.1.** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico, $X$ un conjunto, $H \subset Z^X$, $A \subset X$ y $\varepsilon \geq 0$. Diremos que $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $A$ si para cada sucesión $(x_n)_n$ en $A$ y $(f_m)_m$ en $H$ se cumple que*

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n) - \lim_m \lim_n f_m(x_n)) \leq \varepsilon$$

*siempre que todos los límites involucrados existan. En el caso $\varepsilon = 0$ simplemente diremos que $H$ y $A$ intercambian límites.*

Este concepto está relacionado con la oscilación de funciones es la siguiente Proposición.

**Proposición 2.3 [4, Proposition 2.2].** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico compacto, sea $X$ un espacio topológico y $H$ un subconjunto de $C(X, Z)$. Se tiene:*

(i) *Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $X$ y $f \in \overline{H}^{Z^X}$, entonces* $\operatorname{osc}^*(f) \leq \varepsilon$.

(ii) *Si $X$ es numerablemente compacto y* $\operatorname{osc}^*(f) \leq \varepsilon$ *para todo $f \in \overline{H}^{Z^X}$, entonces $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $X$.*

Esta Proposición junto al Teorema 1.6 que relaciona distancias con oscilaciones nos permite relacionar el $\varepsilon$-intercambio de límites con la distancia a espacios de funciones continuas.

**Corolario 2.9 [4, Corollary 2.6].** *Sea $X$ un espacio topológico y sea $H$ un conjunto uniformemente acotado de $C^*(X)$. Se tiene:*

(i) *Si $X$ es normal y $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $X$, entonces*

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C^*(X)) \leq \varepsilon.$$

(ii) *Si $X$ es numerablemente compacto y $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C^*(X)) \leq \varepsilon$, entonces $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $X$.*

Resultados similares en $C(X, Z)$ con $X$ paracompacto y $Z$ un subconjunto convexo y compacto de un espacio normado, se obtiene utilizando el Teorema 2.12, que establece la relación entre la oscilación de una función $f : X \to Z$ y la distancia de dicha función a $C(X, Z)$. Gracias a estos resultados podremos reducir el estudio de distancias al estudio del $\varepsilon$-intercambio de límites. El siguiente Teorema nos dice que el $\varepsilon$-intercambio de límites se conserva al tomar envolturas convexas.

**Teorema 2.18 [4, Theorem 3.3].** *Sea $Z$ un subconjunto compacto convexo de un espacio normado $E$, sea $K$ un conjunto cualquiera y sea $H$ un subconjunto de $Z^K$. Si tenemos que $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $K$ entonces* $\operatorname{conv}(H)$ *$\varepsilon$-intercambia límites con $K$.*

Como corolarios de este Teorema tendremos lo siguiente.

**Corolario 2.20 y Teorema 2.21 [4, Corollary 3.4 and Theorem 3.5].** *Sea $K$ un espacio compacto y $H \subset \mathbb{R}^K$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 5\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

*Además, sí $H \subset C(K)$ tendremos que*

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

Por último, este capítulo lo concluimos con el siguiente Teorema, que es un resultado nuevo que nos muestra una versión cuantitativa de un teorema clásico de Grothendieck sobre compacidad en $C(K)$.

**Teorema 2.24.** *Sea $K$ un espacio compacto y sea $H$ un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$, entonces tendremos*

$$\frac{1}{2}\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}}, C(B_{C(K)^*})) \leq 4\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K))$$

*donde estamos considerando $B_{C(K)^*}$ con la topología $w^* = \sigma(C(K)^*, C(K))$.*

## Capítulo 3. Distancia a espacios de Banach.

Para un espacio de Banach $X$, estudiamos problemas relacionados con la distancia de elementos de su bidual $x^{**} \in X^{**}$ al propio espacio. En particular, si $H \subset X$ y $\overline{H}^{w^*}$ es la clausura de $H$ en $X^{**}$ en la topología $w^*$, observemos primero que

$$\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) = \sup\{\inf_{x\in X} d(z,x) : z \in \overline{H}^{w^*}\} = 0$$

si, y sólo si, $H$ es débilmente relativamente compacto en $X$. En general, se puede medir lo "cerca" que está un conjunto de ser débilmente relativamente compacto con lo que se denominan *medidas de no compacidad débil.*

**Definición 3.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $\mu$ una función con valores reales definida en la familia de subconjuntos acotados no vacíos de $X$. Diremos que $\mu$ es una medida de no-compacidad débil en $X$ si para $A, B \subset X$ acotados y $\lambda \in \mathbb{R}$ cumple:*

(i) $\mu(A) = 0$ *si, y sólo si, $A$ es débilmente relativamente compacto.*
(ii) *Si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
(iii) $\mu(\overline{\operatorname{conv} A}) = \mu(A)$.
(iv) $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$.
(v) $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.
(vi) $\mu(\lambda A) = |\lambda|\mu(A)$.

Un ejemplo de estas medidas es $w$, la medida de De Blasi:

$$w(H) = \inf\{\varepsilon > 0 : H \subset K + \varepsilon B_X \text{ y } K \subset X \text{ es } w\text{-compacto}\}.$$

Otro ejemplo de medida de no compacidad débil es $\gamma$, introducida por K. Astala y H. O. Tylli en [1], que se define como

$$\gamma(A) = \sup\{\lim_n \lim_m f_n(x_m) - \lim_m \lim_n f_n(x_m)\}$$

donde el supremo se toma para todo par de sucesiones $(x_m)_m \subset \operatorname{conv} A$ y $(f_n)_n \subset B_{X^*}$ tales que los límites involucrados existen. De hecho, teniendo en cuenta que el $\varepsilon$-intercambio de límites se conserva al tomar envolturas convexas, tendremos que de hecho el supremo anterior lo podemos tomar para $(x_m)_m \subset A$. Nos ocuparemos aquí de estudiar la relación entre algunas medidas de no compacidad débil y la distancia que acabamos de escribir. Gracias a la Proposición que sigue, podemos particularizar algunos de los resultados obtenidos en el Capítulo 2 a espacios de Banach.

**Proposición 3.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $B_{X^*}$ la bola unidad cerrada en su dual $X^*$ con la topología $w^*$. Consideremos $i : X \to X^{**}$ y $j : X^{**} \to \ell^\infty(B_{X^*})$ las inclusiones canónicas. Entonces, para todo $x^{**} \in X^{**}$ tenemos que*

$$d(x^{**}, i(X)) = d(j(x^{**}), C(B_{X^*})).$$

Como corolarios de esta Proposición, obtenemos los siguiente resultados, que son versiones cuantitativas de un Teorema clásico de Krein que dice que las envolturas convexas conservan los conjuntos débilmente relativamente compactos.

**Corolarios 3.6 y 3.7 [19, 16].** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $H \subset X^{**}$ un subconjunto $w^*$-compacto. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, X) \leq 5\hat{d}(H, X).$$

*Si $H \subset X$ es acotado (y no es necesariamente $w^*$-compacto) se tendrá que*

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, X) \leq 2\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X).$$

En la segunda sección de este capítulo estudiamos algunos casos en los que se dan la igualdad

$$\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, X) = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X)$$

para todo $H$ acotado contenido en $X$. Los espacios de Banach para los que sabemos que se cumple dicha igualdad son los espacios de la clase $J$ (definición introducida en [19]) y los espacios que no contienen una copia de $\ell^1$ en su bidual.

A partir de los resultados anteriores obtenemos versiones cuantitativas del Teorema de Gantmacher que afirma que un operador $T : X \to Y$ entre dos espacios de Banach es débilmente compacto si, y sólo si, su operador adjunto $T^* : Y^* \to X^*$ es débilmente compacto. Si consideramos la medida de no compacidad débil $\gamma$ tendremos la siguiente versión cuantitativa de este teorema.

**Proposición 3.17.** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador y $T^* : Y^* \to X^*$ su operador adjunto. Entonces*

$$\gamma(T(B_X)) \leq \gamma(T^*(B_{Y^*})) \leq 2\gamma(T(B_X)).$$

En particular, en términos de $\hat{d}$ obtenemos la siguiente desigualdad.

$$\frac{1}{2}\hat{d}(\overline{T(B_X)}^{w^*}, Y) \leq \hat{d}(\overline{T^*(B_{Y^*})}^{w^*}, X^*) \leq 4\hat{d}(\overline{T(B_X)}^{w^*}, Y).$$

Sin embargo, no es posible dar una versión cuantitativa en estos términos usando la medida de De Blasi $w$ (véase [1]).

## Capítulo 4. Aproximación por sucesiones.

El resultado de partida que demostramos es el siguiente:

**Teorema 4.2 [4, Proposition 5.2].** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico compacto, $X$ un conjunto y $H$ un subconjunto de $Z^X$ que $\varepsilon$-intercambia límites con $X$. Entonces dado $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe una sucesión $(f_n)_n \subset H$ tal que*

$$\sup_{x \in K} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

*para todo punto de aglomeración $g$ de $(f_n)_n$ en $Z^X$.*

En particular, tomando $\varepsilon = 0$, este Teorema nos permite obtener la angelicidad de los espacios $C(K)$ con $K$ compacto. Además, cuando $X$ es un espacio numerablemente $K$-determinado se tiene que $C(X)$ es angélico. En términos parecidos, hemos obtenido el siguiente Teorema, que para $\varepsilon = 0$ nos da la angelicidad de los espacios $C(X)$ con $X$ numerablemente $K$-determinado. Si $X$ es un conjunto y $(Z, d)$ un espacio métrico, diremos que un $H \subset C(X, Z)$ es $\varepsilon$-relativamente numerablemente compacto (en $C(X, Z)$) cuando toda sucesión $(f_n)_n \subset H$ tenga algún punto de aglomeración $f$ en $Z^X$ con oscilación menor o igual que $\varepsilon$. Claramente, para el caso $\varepsilon = 0$, esta noción coincide con la de relativamente numerablemente compacto.

**Teorema 4.7.** *Sea $X$ un espacio numerablemente $K$-determinado, $(Z, d)$ un espacio métrico compacto y $H \subset C(X, Z)$ un subconjunto $\varepsilon$-relativamente* *numerablemente compacto. Entonces para cada* $f \in \overline{H}^{Z^X}$*, existe una sucesión* $(f_n)_n \subset H$ *tal que*

$$\sup_{x \in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

*para cada punto de aglomeración* $g$ *de* $(f_n)$ *en* $Z^X$*.*

## Capítulo 5. Preliminares de análisis funcional.

En este capítulo se introducen las herramientas necesarias de análisis funcional para el desarrollo de la segunda parte de esta tesina. Empezamos viendo las relaciones que hay con las distintas topologías compatibles con un par dual $\langle E, F \rangle$ que son aquellas topologías $\tau$ tales que $(E, \tau)' = F$. Introducimos la topología de Mackey, $\mu(E, F)$, y se demuestra que es la topología compatible con el par dual $\langle E, F \rangle$ más fina. Además, damos un modelo para la complección de un espacio topológico obtenido por Grothendieck.

**Teorema 5.7.** *Sea* $(E, \tau)$ *un espacio localmente convexo y* $\mathcal{E}$ *la familia de los equicontinuos de* $E'$*. Sea*

$$\widehat{E} = \{x^* \in (E')^* : x^*|_H \text{ es } \sigma(E', E)\text{-continuo para cada } H \in \mathcal{E}\}.$$

*El espacio* $\widehat{E}$ *dotado de la topología* $\widehat{\tau}$ *de convergencia uniforme sobre* $\mathcal{E}$ *es un modelo para la compleción de* $(E, \tau)$*.*

Como corolario de este Teorema se obtiene el Criterio de completitud de Grothendieck que nos proporciona una caracterización de los espacios localmente convexos completos.

**Corolario 5.8 [Criterio de completitud de Grothendieck].** *Un espacio localmente convexo* $E$ *es completo si, y sólo si, todo* $\varphi \in E'^*$ *cuya restricción a conjuntos equicontinuos es* $\sigma(E', E)$*-continuo es un elemento de* $E$*.*

Finalmente, en la última sección de este capítulo, utilizando resultados del capítulo 2, se demuestra el teorema de Eberlein-Grothendieck, que nos dice que dado un espacio localmente convexo $E$, los conjuntos débilmente relativamente compactos, los conjuntos débilmente relativamente numerablemente compactos y los conjuntos acotados que intercambian límites con los conjuntos equicontinuos de $E$ son los mismos.

**Teorema 5.14 [W. F. Eberlein, A. Grothendieck].** *Sea* $(E, \tau)$ *un espacio localmente convexo, sea* $B \subset E$ *un conjunto convexo y* $\tau$*-completo. Entonces para* $A \subset B$*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *A es débilmente relativamente numerablemente compacto.*

(ii) *A es débilmente relativamente compacto.*
(iii) *A es acotado e intercambia límites dobles con todos los subconjuntos $\tau$-equicontinuos de $E'$.*

## Capítulo 6. Teorema de R. C. James.

Este capítulo se centra en el clásico Teorema de James sobre compacidad débil en espacios localmente convexos.

**Teorema 6.1 [R. C. James].** *Sea $E$ un espacio localmente convexo cuasicompleto. Entonces un subconjunto acotado débilmente cerrado $A \subset E$ es débilmente compacto si, y sólo si, todo $\varphi \in E'$ alcanza su supremo en $A$, es decir, existe $x \in A$ tal que $\varphi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in A\}$.*

La demostración de este teorema en el caso en el que $E$ sea un espacio de Banach separable se simplifica bastante gracias a la Desigualdad de Simons como vemos en este capítulo.

**Teorema 6.3 [Desigualdad de Simons].** *Sea $S$ un conjunto, $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\ell^\infty(S)$ y sea $T \subset S$ tal que si $\lambda_n \geq 0$ con $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = 1$, entonces existe $t \in T$ tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n(t) = \sup_{s \in S} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n(s).$$

*Entonces*

$$\text{ínf}\{\sup_{s \in S} x(s) : x \in \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^\infty\} \leq \sup_{t \in T} \limsup_n x_n(t).$$

La segunda sección la dedicamos a realizar una prueba del Teorema de James en el caso general debida a J. D. Pryce (véase [29]). Las herramientas fundamentales en la demostración de este resultado son el Teorema de Eberlein-Grothendieck mencionado anteriormente y el siguiente resultado sobre sucesiones en $\ell^\infty(X)$ obtenido por J. D. Pryce.

**Proposición 6.6 [J. D. Pryce,[29, Lemma 2]].** *Sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\ell^\infty(X)$ uniformemente acotada y sea $D \subset \ell^\infty(X)$ un subconjunto separable. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ tal que*

$$\begin{aligned} \sup_{x \in X} \limsup_{k \to \infty} (h - f_{n_k})(x) &= \sup_{x \in X} \liminf_{k \to \infty} (h - f_{n_k})(x) \\ \inf_{x \in X} \limsup_{k \to \infty} (h - f_{n_k})(x) &= \inf_{x \in X} \liminf_{k \to \infty} (h - f_{n_k})(x) \end{aligned}$$

*para cada $h \in D$.*

Mediante la construcción de un ejemplo debido a R. C. James, vemos que la condición de cuasicompletitud es necesaria en el Teorema que estamos tratando en este capítulo.

Finalmente, vemos cómo el Teorema de James nos puede conducir a una caracterización de la reflexividad en términos de conjuntos proximinales.

**Corolario 6.15.** *Para un espacio de Banach $X$, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) *$X$ es reflexivo.*
(ii) *Todos los hiperplanos afines cerrados de $X$ son proximinales.*
(iii) *Todas las variedades afines cerradas de $X$ son proximinales.*
(iv) *Todos los conjuntos cerrados, convexos de $X$ son proximinales.*
(v) *Todos los conjuntos débilmente cerrados de $X$ son proximinales.*

## Capítulo 7. Aplicaciones.

En este último capítulo de la memoria hemos recogido algunos resultados interesantes que se pueden obtener a partir del Teorema de James o las técnicas que han sido utilizadas en la demostración de dicho teorema. En una primera sección, **Sucesiones que alcanzan la norma**, incluimos una caracterización de los espacios de Banach reflexivos obtenida por E. Matoušcova y S. Reick (véase [26]) en términos de sucesiones que alcanzan la norma, es decir, sucesiones que alcanzan el supremo de $\limsup_{n\to\infty} f(x_n)$ con $f \in S_{X^*}$, y $(P)$-sucesiones, que son sucesiones tales que para todo $f \in S_{X^*}$ existe un $g \in S_{X^*}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) < \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$. Observemos que la noción de sucesión que alcanza la norma es una noción más débil que la de sucesión débilmente convergente.

**Teorema 7.6 [26, Theorem 4.3].** *Sea $X$ un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) *$X$ es reflexivo.*
(ii) *Toda sucesión acotada $(x_n)_n$ en $X$ contiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ para la que se alcanza $\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup f(x_{n_k})$.*
(iii) *Toda sucesión acotada $(x_n)_n$ en $X$ contiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ para la que se alcanza $\sup_{f\in S_{X^*}} \liminf f(x_{n_k})$.*
(iv) *$X$ no contiene $(P)$-sucesiones.*

A la vista de este resultado es razonable buscar caracterizaciones similares de los conjuntos débilmente relativamente compactos de un espacio de Banach:

**Problema.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $H \subset X$ un subconjunto de $X$. ¿Se tendrá que $H$ es $w$-compacto si, y sólo si, toda sucesión $(x_n)_n \subset H$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $\sup_{f \in S_{X^*}} \limsup f(x_{n_k})$ se alcance?*

Otro problema relacionado con el Teorema 7.6 que nos podemos plantear es el siguiente:

**Problema.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $B \subset B_{X^*}$ un subconjunto de $B_{X^*}$. ¿Tendremos que toda sucesión acotada $(x_n)_n \subset X$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $\sup_{f \in B} f(x_{n_k})$ se alcanza si y sólo si cualquier sucesión $(x_n)_n \subset X$ acotada tiene una subsucesión convergente en la topología $\sigma(X, B)$?*

En una segunda sección, vemos una caracterización de la compacidad débil en $L^1(\mu, X)$, el espacio de las clases de equivalencia de las funciones integrables Bochner, obtenida por Ülger (véase [34]).

**Teorema 7.8 [11, Theorem 1.1].** *Sea $A$ un subconjunto acotado de $L^1(\mu, X)$. Son equivalentes*

(i) *$A$ es débilmente relativamente compacto.*

(ii) *$A$ es uniformemente integrable, y dada cualquier sucesión $(f_n)_n \subset A$ existe una sucesión $(g_n)_n$ con $g_n \in \mathrm{conv}\{f_k : k \geq n\}$ tal que $(g_n(w))_n$ es convergente en norma en $X$ para casi todo $w \in \Omega$.*

(iii) *$A$ es uniformemente integrable y dada una sucesión $(f_n)_n \subset A$ existe una subsucesión $(g_n)_n$ con $g_n \in \mathrm{conv}\{f_k : k \geq n\}$ tal que $(g_n(w))_n$ es débilmente convergente en $X$ para casi todo $w \in \Omega$.*

Para la prueba de este teorema, en [11] se utiliza el Teorema de Eberlein-Grothendieck. Como corolario se obtiene la siguiente caracterización de los conjuntos débilmente compactos de un espacio de Banach.

**Corolario 7.9 [11, Corollary 1.2].** *Para un subconjunto $A$ de un espacio de Banach $X$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$A$ es débilmente relativamente compacto.*

(ii) *Para cada sucesión $(x_n)_n \subset A$ contenida en $A$, existe una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in \mathrm{conv}\{x_k : k \geq n\}$ que es convergente en norma.*

(iii) *Para cada sucesión $(x_n)_n \subset A$ contenida en $A$, existe una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in \mathrm{conv}\{x_k : k \geq n\}$ débilmente convergente.*

Notemos que en [34] se hace una prueba directa de este corolario para el caso de conjuntos uniformemente acotados usando el Teorema de James.

Por último, se estudia el Problema de la frontera, problema que está todavía abierto en su máxima generalidad. Para un espacio de Banach $X$, se dice que $B \subset B_{X^*}$ es una frontera de James si $\|x\| = \text{máx}\{|x^*(x)| : x^* \in B\}$ para todo $x \in X$.

**Problema de la frontera.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $B \subset B_{X^*}$ una frontera y $A \subset X$ un subconjunto de $X$. Si $A$ es $\sigma(X, B)$ compacto, ¿es $A$ $w$-compacto?*

Para este problema sólo se conocen respuestas afirmativas en algunos casos. Aquí nos hemos dedicado a recoger algunas de estas respuestas afirmativas que se apoyan en las herramientas utilizadas en este trabajo. En particular, vemos que la respuesta es afirmativa si $A$ es convexo o si el espacio de Banach es separable.

# Notación

En general, la notación de esta tesina es estándar, como en [15].

A lo largo de este trabajo, salvo que se indique lo contrario, todos los espacios topológicos que se consideren serán Hausdorff. De hecho, en el único momento en el que trabajaremos con espacios topológicos no necesariamente Hausdorff será en el Teorema 1.16.

$\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales dotado normalmente de la métrica euclídea.

Cuando estemos en un espacio topológico, denotaremos por $\overline{A}$ la clausura de un subconjunto $A$ cuando esté claro la topología sobre la que se está trabajando; si tenemos una topología $\tau$ y queremos especificar que la clausura se está tomando sobre esa topología escribiremos $\overline{A}^{\tau}$. En los espacios producto del tipo $X^Y$, con $X$ e $Y$ conjuntos se trabajará en la topología puntual por lo que si queremos indicar la clausura de un subconjunto $A$ en la topología puntual de $X^Y$ escribiremos $\overline{A}^{X^Y}$.

Si $E$ es un espacio localmente convexo, denotaremos su dual algebraico (el conjunto de las aplicaciones lineales de $E$ en $\mathbb{R}$) como $E^*$ y su dual topológico (el subconjunto del dual algebraico de aplicaciones lineales y continuas) por $E'$. Sin embargo, cuando estemos trabajando con un espacio normado $X$, por $X^*$ denotaremos a su dual topológico.

Si un espacio $X$ se puede ver como un espacio de funciones sobre un conjunto $Y$ (como por ejemplo si $X = T^Y$ para algún conjunto $T$, o si $Y$ es un dual de $X$), denotaremos por $\sigma(X, Y)$ o $w_Y$ la topología en $X$ de la convergencia puntual sobre elementos de $Y$. Si $X$ es un espacio de Banach, normalmente denotaremos a la topología débil $\sigma(X, X^*)$ por $w$ y la topología débil* en $X^*$ $\sigma(X^*, X)$ por $w^*$. Análogamente, si $E$ es un espacio localmente convexo denotaremos $w = \sigma(E, E')$ y $w^* = \sigma(E', E)$.

Si $A$ es un subconjunto de un conjunto $A$, denotaremos por $\chi_A$ a la función característica de $A$, es decir, la función que vale 1 en $A$ y vale 0 en $X \backslash A$.

Dado un espacio topológico $X$ y un espacio métrico $(Z, d)$, denotaremos por $C(X, Z)$ al espacio de las funciones continuas $f : X \to Z$ y por $C^*(X, Z)$ el subespacio de $C(X, Z)$ de funciones continuas acotadas. Además, denotaremos $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ y $C^*(X) = C^*(X, \mathbb{R})$.

Sea $(Z, d)$ un espacio métrico, $a \in Z$ un elemento de $Z$ y $H, X \subset Z$ subconjuntos de $Z$. Denotaremos

$$d(a, X) = \text{ínf}\{d(a, x) : x \in X\}$$

y

$$\hat{d}(H, X) = \sup\{d(h, X) : h \in H\}.$$

# Parte I

# Distancia a espacios de funciones

# Capítulo 1

# Preliminares topológicos

En este capítulo vamos a introducir herramientas topológicas esenciales para el desarrollo de la primera parte de la tesina. En particular, vamos a trabajar con la noción de oscilación de una función, teoremas de separación de conjuntos convexos y paracompacidad.

## 1.1 Oscilación y distancia

Dadas dos funciones $f, g : A \to \mathbb{R}$ con $A$ un conjunto cualquiera, denotamos por $f \vee g$ a la función $f \vee g(a) = \text{máx}\{f(a), g(a)\}$ para $a \in A$, y denotamos por $f \wedge g$ a la función $f \wedge g(a) = \text{mín}\{f(a), g(a)\}$ para $a \in A$.

**Teorema 1.1 (Lema de Urysohn).** *Sea $X$ un espacio topológico. Tendremos que $X$ es un espacio normal si, y sólo si, para cada par de subconjuntos $A$ y $B$ de $X$ cerrados y disjuntos existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(A) = 0$ y $f(B) = 1$.*

**Definición 1.1.** *Sea $X$ un espacio topológico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que $f$ es superiormente semicontinua si para cada $a \in \mathbb{R}$ tenemos que la antiimagen de $(-\infty, a)$ mediante $f$ es un abierto de $X$. Análogamente, diremos que $f$ es inferiormente semicontinua si para cada $a \in \mathbb{R}$ se cumple que la antiimagen de $(a, \infty)$ es un abierto de $X$.*

El siguiente teorema se puede encontrar en [22, Theorem 12.16].

**Teorema 1.2.** *Sea $X$ un espacio topológico normal y sean $f_1 \leq f_2$ dos funciones reales definidas en $X$ tales que $f_1$ es superiormente semicontinua y $f_2$ es inferiormente semicontinua. Entonces existe una función continua $f \in C(X)$ tal que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in X$.*

*Demostración.* Usando un homeomorfismo estrictamente creciente entre $(0,1)$ y $\mathbb{R}$ podemos suponer que tanto $f_1$ como $f_2$ toman sus valores en el intervalo $(0,1)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Veamos que existe una función continua $g_\varepsilon$ tal que $f_1 - \varepsilon \leq g_\varepsilon \leq f_2 + \varepsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tomemos

$$\begin{aligned} A_k &= \{x \in X : \frac{k}{n} \leq f_1(x)\}, \\ B_k &= \{x \in X : f_2(x) \leq \frac{k-1}{n}\}. \end{aligned}$$

Entonces, debido a que $f_1 \leq f_2$ tendremos que $A_k$ y $B_k$ son conjuntos disjuntos y como $f_1$ es superiormente semicontinua y $f_2$ es inferiormente semicontinua, tendremos que además son conjuntos cerrados. Por el Lema de Urysohn (Teorema 1.1), existe una función continua $g_k : X \to [0,1]$ tal que $g_k(A_k) = 1$ y $g_k(B_k) = 0$. Definamos entonces

$$g_\varepsilon = \frac{1}{n}(g_1 + \cdots + g_n).$$

Tendremos entonces que $g_\varepsilon$ es una función continua. Fijado $x \in X$, existe $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$\frac{k}{n} \leq f_1(x) < \frac{k+1}{n}.$$

Si $k \geq 1$ tendremos que $x \in A_i$ para todo $i \leq k$ y por lo tanto, $g_i(x) = 1$ para todo $i \leq k$ por lo que

$$f_1(x) - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} \leq g_\varepsilon(x).$$

Esta claro que estas desigualdades también se dan cuando $k = 0$. Por lo tanto hemos deducido que $f_1 - \varepsilon \leq g_\varepsilon$. Análogamente se obtiene que $g_\varepsilon \leq f_2 + \varepsilon$. Tendremos por lo tanto que existe una función continua $h_1$ tal que

$$f_1 - \frac{2}{3} \leq h_1 \leq f_2 + \frac{2}{3}.$$

Supongamos que hemos construido funciones continuas $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tales que

$$f_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k \leq h_k \leq f_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{y} \quad \|h_k - h_{k-1}\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $f_1 \leq h_n + (\frac{2}{3})^n$ y $h_n \leq f_2 + (\frac{2}{3})^n$ tendremos que

$$(f_1 \vee h_n) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq (f_2 \wedge h_n) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Como $f_1 \vee h_n$ es superiormente semicontinua y $f_2 \wedge h_n$ es inferiormente semicontinua, por lo visto al principio de esta demostración tendremos que existe una función continua $h_{n+1}$ tal que

$$(f_1 \vee h_n) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq h_{n+1} \leq (f_2 \wedge h_n) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

y por lo tanto

$$f_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq h_{n+1} \leq f_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{y} \quad \|h_{n+1} - h_n\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

Tendremos entonces que $(h_n)$ es una sucesión de Cauchy en $(C^*(X), \|\cdot\|_\infty)$ por lo que converge a una función continua $f$ que claramente cumple que $f_1 \leq f \leq f_2$. $\square$

**Observación 1.3.** *De hecho, el Teorema 1.2 nos proporciona una caracterización de los espacios normales ya que un espacio es normal si, y sólo si, se cumplen las condiciones de dicho Teorema sobre la existencia de una función continua, como veremos en el siguiente corolario.*

**Corolario 1.4.** *Sea $X$ un espacio topológico. Entonces $X$ es normal si, y sólo si, para cada par de funciones reales $f_1 \leq f_2$ definidas en $X$ tales que $f_1$ es superiormente semicontinua y $f_2$ es inferiormente semicontinua, existe una función continua $f \in C(X)$ tal que $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in X$.*

*Demostración.* Una de las implicaciones no las da el Teorema 1.2. Para ver la otra implicación podemos usar el Teorema de Tietze que dice que un espacio $X$ es normal si, y sólo si, para cada cerrado $A \subset X$, se tiene que cada función continua $g : A \to [0,1]$ se puede extender a una función continua $f : X \to [0,1]$. Entonces si tenemos $g$, definamos $f_1, f_2 : X \to [0,1]$ como $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$ si $x \in A$ y $f_1(x) = 0$ y $f_2(x) = 1$ si $x \notin A$. En tal caso tendremos que $f_1$ es superiormente semicontinua y $f_2$ inferiormente semicontinua y por lo tanto, por hipótesis tenemos una función continua $f$ que claramente va a ser una extensión continua de $g$ con lo que, por el Teorema de Tietze tendremos que $X$ es normal. $\square$

**Definición 1.2.** *Sea $X$ un espacio topológico y $Z$ un espacio métrico. Para $f \in Z^X$ acotada y $x \in X$ definimos la oscilación de $f$ en $X$ como*

$$\operatorname{osc}(f, x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{y,z \in U} d(f(y), f(z))$$

*y la semioscilación de $f$ en $X$ como*

$$\operatorname{osc}^*(f,x) = \inf_{U\in\mathcal{U}_x} \sup_{y\in U} d(f(y), f(x))$$

*donde $\mathcal{U}_x$ es el conjunto de entornos de $x$ en $X$. Definimos la oscilación de $f$ (en $X$) y semioscilación de $f$ (en $X$) como*

$$\operatorname{osc}(f) = \sup_{x\in X} \operatorname{osc}(f,x) \quad y \quad \operatorname{osc}^*(f) = \sup_{x\in X} \operatorname{osc}^*(f,x).$$

*Cuando tengamos $f \in Z^X$ y $K \subset X$ denotaremos la oscilación y semioscilación de $f$ en $K$ por*

$$\operatorname{osc}(f,K) = \sup_{x\in K} \operatorname{osc}(f,x) \quad y \quad \operatorname{osc}^*(f,K) = \sup_{x\in K} \operatorname{osc}^*(f,x).$$

Claramente tenemos que

**Proposición 1.5.** *Sea $X$ un espacio topológico y $Z$ un espacio métrico. Si $f \in Z^X$ está acotada y $x \in X$, entonces*

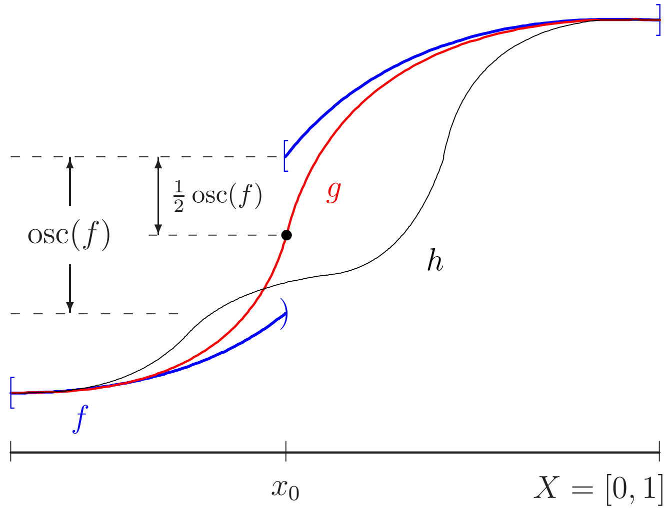
$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{osc}^*(f,x) & \le & \operatorname{osc}(f,x) & \le & 2\operatorname{osc}^*(f,x), \\ \operatorname{osc}^*(f) & \le & \operatorname{osc}(f) & \le & 2\operatorname{osc}^*(f). \end{array}$$

*Además*

$$d(f, C^*(X,Z)) \ge \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f).$$

**Teorema 1.6 (Benyamini and Lindenstrauss, [3, Proposition 1.18]).** *Sea $X$ un espacio normal y sea $f \in \ell^\infty(X)$. Entonces*

$$d(f, C^*(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f).$$



*Demostración.* Sea $g \in C^*(X)$, $d = d(f,g)$, $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Como $g$ es continua tendremos que existe un entorno $U$ de $x$ tal que si $y, z \in U$, entonces $d(g(y), g(z)) < \varepsilon$ y por lo tanto tendremos que para todo $y, z \in U$, $d(f(y), f(z)) \leq d(f(y), g(y)) + d(g(y), g(z)) + d(g(z), f(z)) \leq 2d + \varepsilon$, y como $\varepsilon$ era arbitrario, podemos deducir que $\operatorname{osc}(f, x) \leq 2d$ y al cumplirse esto para todo $x \in X$ obtenemos que $\operatorname{osc}(f) \leq 2d(f, g)$ para toda $g \in C^*(X)$ de donde deducimos que $d(f, C^*(X)) \geq \frac{1}{2} \operatorname{osc}(f)$.

Veamos ahora que $d(f, C^*(X)) \leq \frac{1}{2} \operatorname{osc}(f)$. Sea $\delta = \frac{1}{2} \operatorname{osc}(f)$ y para $x \in X$ denotemos por $\mathcal{U}_x$ al conjunto de entornos de $x \in X$. Tendremos entonces que

$$\begin{aligned}
2\delta &\geq \operatorname{osc}(f, x) = \operatorname*{ínf}_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{y,z \in U} (f(y) - f(z)) \\
&= \operatorname*{ínf}_{U \in \mathcal{U}_x} \left( \sup_{y \in U} f(y) - \operatorname*{ínf}_{z \in U} f(z) \right) \\
&\geq \operatorname*{ínf}_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{y \in U} f(y) - \sup_{U \in \mathcal{U}_x} \operatorname*{ínf}_{z \in U} f(z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos

$$f_1(x) = \operatorname*{ínf}_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{z \in U} f(z) - \delta$$

$$f_2(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}_x} \operatorname*{ínf}_{z \in U} f(z) + \delta$$

tendremos que $f_1 \leq f_2$. Además, $f_1$ es superiormente semicontinua y $f_2$ es inferiormente semicontinua. Por lo tanto, por el Teorema 1.2, existe una función continua $h$ definida en $X$ tal que

$$f_1(x) \leq h(x) \leq f_2(x)$$

para todo $x \in X$. Como para $x \in X$ se cumple que $f_2(x) - \delta \leq f(x)$ y $f_1(x) + \delta \geq f(x)$, tendremos que $h(x) - \delta \leq f(x) \leq h(x) + \delta$ y por lo tanto $\|f - h\|_\infty \leq \delta$. En particular tendremos que $h$ es uniformemente acotada, es decir, $h \in C^*(X)$. Así que

$$d(f, C^*(X)) \leq \delta = \frac{1}{2} \operatorname{osc}(f)$$

y con ello terminamos la prueba. $\square$

## 1.2 Separación de conjuntos convexos

**Teorema 1.7 (de separación).** *Sea $E$ un espacio vectorial topológico y sean $A$ y $B$ dos subconjuntos disjuntos de $E$ no vacíos y convexos con $A$ abierto. Entonces existe un hiperplano afín cerrado que separa a $A$ y $B$. Si además $B$ es abierto, la separación es estricta.*

**Lema 1.8.** *Sea $E$ un espacio localmente convexo y $X \subset E$ un subconjunto compacto convexo. Sea $f_1 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación cóncava superiormente semicontinua y sea $f_2 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación convexa inferiormente semicontinua. Sean*

$$A_{f_1} := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f_1(y) \geq x\}$$

*y*

$$B_{f_2} := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : f_2(y) \leq x\}.$$

*Si $f_1(x) < f_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces $B_{f_2}$ y $A_{f_1}$ pueden ser separados por un conjunto convexo abierto.*

*Demostración.* Para cada $x \in X$, tomemos $\varepsilon_x > 0$ y un entorno abierto $V_x$ de 0 tales que para todo $y \in (x + V_x) \cap X$ tengamos que

$$f_1(y) < f_1(x) + \frac{\varepsilon_x}{2} < f_1(x) + \varepsilon_x < f_2(x) - \varepsilon_x < f_2(x) - \frac{\varepsilon_x}{2} < f_2(y).$$

Tomemos para cada $x$ un entorno abierto de 0 equilibrado $U_x$ de modo que $U_x + U_x \subset V_x$. Tendremos entonces que $\{x + U_x : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de $X$ y como $X$ es compacto existen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tales que $\{x_i + U_{x_i} : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ es un cubrimiento de $X$. Tomemos un entorno abierto equilibrado $V$ de 0 tal que $V + V \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y sea $\varepsilon = \text{mín}_i\, \varepsilon_{x_i}$. Si tomamos $U = V \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ tendremos que $(B_{f_2} + U) \cap (A_{f_1} + U) = \emptyset$. En caso contrario, tendríamos que existen $(x, y) \in B_{f_2}$ y $(x', y') \in A_{f_1}$ tales que $(x-x', y-y') \in U+U$. Tendríamos por un lado que $|y-y'| < \varepsilon$ y por otro lado $x-x' \in V+V \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Como $\{x_i+U_{x_i}\}$ es un cubrimiento de $X$, existe $i$ tal que $x \in x_i+U_{x_i}$, pero como $x-x' \in U_{x_i}$ entonces $x' \in x_i+U_{x_i}+U_{x_i} \subset x_i+V_{x_i}$ y en tal caso

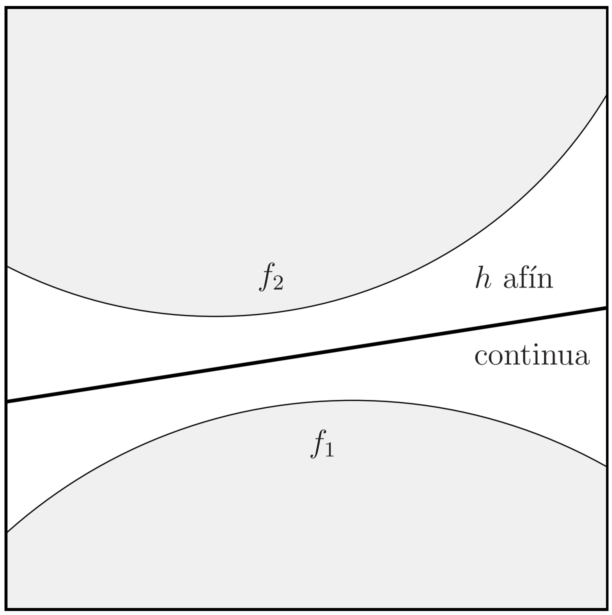
$$\begin{aligned} y' &\leq f_1(x') < f_1(x_i) + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} = f_1(x_i) + \varepsilon_{x_i} - \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} < \\ &< f_2(x_i) - \varepsilon_{x_i} - \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} < f_2(x) - \varepsilon_{x_i} \leq y - \varepsilon_{x_i} \leq y - \varepsilon \end{aligned}$$

de donde deducimos que $y - y' > \varepsilon$ lo que sería una contradicción. $\square$

El siguiente Teorema se puede encontrar en [6, Theorem 21.20].

**Teorema 1.9.** *Sea $E$ un espacio localmente convexo, $X \subset E$ un subconjunto compacto convexo, $f_1 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación cóncava superiormente semicontinua y $f_2 : X \to \mathbb{R}$ una aplicación convexa inferiormente semicontinua tales que $f_1(x) < f_2(x)$ para todo $x \in X$. Entonces existe una función afín $h : E \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) < h(x) < f_2(x)$ para todo $x \in X$.*

$f_2$ inf. semicont. convexa




$f_1$ sup. semicont. cóncava

*Demostración.* Estamos en las condiciones del Lema 1.8 así que existe un entorno abierto de 0 tal que $(B_{f_2} + U) \cap (A_{f_1} + U) = \emptyset$. Aplicando ahora el Teorema 1.7 tendremos que existe $\alpha \in (E \times \mathbb{R})'$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que para todo $(x_1, y_1) \in A_{f_1} + U$ y para todo $(x_2, y_2) \in B_{f_2} + U$ se cumple que $\alpha(x_1, y_1) < \lambda < \alpha(x_2, y_2)$. Ahora bien, como $\alpha$ es lineal tendremos que debe de ser de la forma $\alpha(x, y) = \alpha(x, 0) + \gamma y$, pero como dado $x \in X$ tendremos que $\alpha(x, f_1(x)) < \alpha(x, f_2(x))$ y $f_1(x) < f_2(x)$ podemos deducir que $\gamma > 0$. Definamos entonces

$$h(x) = \frac{1}{\gamma}(\lambda - \alpha(x, 0)).$$

Como $\alpha$ es lineal y continua tendremos que $h$ es afín y continua y de la definición de $A_{f_1}$ y $B_{f_2}$ se deduce inmediatamente que $f_1(x) < h(x) < f_2(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

## 1.3 Paracompacidad

Las demostraciones que aparecen en esta sección se pueden encontrar por ejemplo en [13].

**Definición 1.3.** *Se dice que una familia* $\{A_s : s \in S\}$ *de conjuntos de un espacio topológico* $X$ *es localmente finita si para todo* $x \in X$ *existe un entorno* $U$ *para el que sólo existe una cantidad finita de índices* $s$ *tales que* $U \cap A_s \neq \emptyset$.

**Proposición 1.10.** *Sea* $\{A_s : s \in S\}$ *una familia localmente finita en* $X$. *Entonces:*

(i) $\{\overline{A}_s : s \in S\}$ *es localmente finita.*

(ii) $A = \bigcup_s \overline{A}_s$ *es cerrado en* $X$, *y así* $\bigcup_s \overline{A}_s = \overline{\bigcup_s A_s}$.

*Demostración.*

(i) Dado $x \in X$, existe un entorno abierto $U$ de $x$ tal que $A_s \cap U = \emptyset$ salvo para una cantidad finita de índices $s \in S$. Por otro lado, debido a que si la intersección de un abierto con un conjunto es vacía también lo es la intersección del abierto con la adherencia del conjunto tendremos que $\overline{A}_s \cap U = \emptyset$ salvo para una cantidad finita de $s$.

(ii) Sea $x \in X \backslash A$. Por (i) existe un entorno $U$ de $x$ que corta a lo sumo a una cantidad finita de $\overline{A}_s$ que denotaremos por $\overline{A}_{s_1}, \overline{A}_{s_2}, \ldots \overline{A}_{s_n}$. Tendremos entonces que $U \cap \bigcap_{i=1}^{n} (X \backslash \overline{A}_{s_i})$ es un entorno de $x$ que no corta con $A$. Por lo tanto $A$ es cerrado.

□

**Lema 1.11.** *Sea* $\{E_s : s \in S\}$ *una familia de conjuntos de un espacio* $X$ *y sea* $\{B_t : t \in T\}$ *un cubrimiento cerrado localmente finito de* $X$. *Supongamos que cada* $B_t$ *corta a lo sumo con una cantidad finita de* $E_s$. *En tal caso, cada* $E_s$ *puede ser incluido en un conjunto abierto* $U_s$ *tal que la familia* $\{U_s : s \in S\}$ *es localmente finita.*

*Demostración.* Para cada $s$ definamos $U_s = X \backslash \bigcup \{B_t : B_t \cap E_s = \emptyset\}$. Claramente $E_s \subset U_s$ para todo $s \in S$. Como $\{B_t\}_t$ es una familia localmente finita de conjuntos cerrados tendremos por la Proposición 1.10 que cada $U_s$ es abierto. Dado $x \in X$, existe un entorno $U$ de $x$ contenido en una unión finita $\bigcup_{i=1}^{n} B_{t_i}$. Por otro lado, como $B_t \cap U_s \neq \emptyset$ si, y sólo si, $B_t \cap E_s \neq \emptyset$, y cada $B_{t_i}$ corta a lo sumo con una cantidad finita de $E_s$, tendremos entonces que $\bigcup_{i=1}^{n} B_{t_i}$ (y por lo tanto $U$) corta con una cantidad finita de $U_s$ y de aquí obtenemos que $\{U_s\}_s$ es localmente finita. □

**Definición 1.4.** *Sean* $\{A_s : s \in S\}$ *y* $\{B_t : t \in T\}$ *dos cubrimientos de un espacio* $X$*. Se dice que* $\{A_s\}_s$ *es un refinamiento de* $\{B_t\}_t$ *si para cada* $s \in S$ *existe un* $t \in T$ *tal que* $A_s \subset B_t$*.*

**Definición 1.5.** *Se dice que un espacio topológico* $X$ *es paracompacto si todo cubrimiento abierto de* $X$ *tiene un refinamiento abierto localmente finito.*

**Teorema 1.12.** *Todo espacio paracompacto es normal.*

*Demostración.* Veamos primero que si $X$ es paracompacto, entonces $X$ es regular. Sea $A$ un conjunto cerrado de $X$ y sea $x \notin A$. Como $X$ es Hausdorff, cada $a \in A$ tiene un entorno abierto $U_a$ tal que $x \notin \overline{U}_a$. Teniendo en cuenta que $\{U_a : a \in A\} \cup \{X \backslash A\}$ es un cubrimiento abierto de $X$, usando la paracompacidad tendremos que existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_s : s \in S\} \cup \{G\}$ con $G \subset X \backslash A$ y tal que para cada $s \in S$ existe algún $a \in A$ con $V_s \subset U_a$. Tomemos $W = \bigcup_{s \in S} V_s$, entonces $W$ es abierto y $A \subset W$. Además, como $\{V_s\}_s$ es una familia localmente finita, tendremos gracias a la Proposición 1.10 que $\overline{W} = \bigcup_{s \in S} \overline{V}_s$ y como cada $V_s$ está contenido en algún $U_a$, tendremos de forma inmediata que $X \backslash \overline{W}$ y $W$ son entornos abiertos disjuntos de $x$ y $A$ respectivamente. Veamos ahora que $X$ es normal. Dados dos conjuntos cerrados $A$ y $B$ de $X$ disjuntos tendremos que por la regularidad de $X$, para cada $a \in A$ existe un entorno abierto $U_a$ tal que $\overline{U}_a \cap B = \emptyset$ y razonando como acabamos de hacer sustituyendo $x$ por $B$ obtendremos entornos abiertos disjuntos de $A$ y $B$. $\square$

**Teorema 1.13.** *Sea* $X$ *un espacio regular. Son equivalentes:*

(i) $X$ *es paracompacto.*

(ii) *Todo cubrimiento abierto de* $X$ *admite un refinamiento abierto que puede ser descompuesto en a lo sumo una cantidad numerable de familias de abiertos localmente finitas.*

(iii) *Todo cubrimiento abierto de* $X$ *admite un refinamiento localmente finito.*

(iv) *Todo cubrimiento abierto de* $X$ *admite un refinamiento cerrado localmente finito.*

*Demostración.*

(i)⇒(ii) es inmediato.

(ii)⇒(iii) Sea $\{U_t : t \in T\}$ un cubrimiento abierto de $X$, por (ii) tendremos que existe un refinamiento abierto $\{V_{n,s} : (n,s) \in \mathbb{N} \times S\}$ donde para cada $n_0$ fijo, la familia $\{V_{n_0,s} : s \in S\}$ es localmente finita. Para cada

$n$ consideremos $W_n = \bigcup_s V_{n,s}$, tendremos entonces que $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un cubrimiento abierto de $X$. Sea ahora $A_i = W_i \setminus \bigcup_{j<i} W_j$ para $i \in \mathbb{N}$. Tendremos que $\{A_i\}_i$ es un refinamiento de $\{W_n\}_n$, claramente es un cubrimiento y además es localmente finito ya que si fijamos $x \in X$ y tomamos $n$ el primer número natural tal que $x \in W_n$, entonces $W_n \cap A_i = \emptyset$ para todo $i > n$. Tendremos finalmente que $\{A_n \cap V_{n,s} : (n,s) \in \mathbb{N} \times S\}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_t\}_t$ ya que todo $x \in X$ tiene un entorno que sólo corta con una cantidad finita de $A_n$ y para cada $n$, $x$ tiene un entorno que corta sólo con una cantidad finita de $V_{n,s}$.

(iii)⇒(iv) Sea $\{U_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto de $X$. Como $X$ es regular, podemos tomar un cubrimiento abierto $\{V_t : t \in T\}$ tal que $\{\overline{V}_t : t \in T\}$ es un refinamiento del inicial. La familia $\{V_t : t \in T\}$ es un cubrimiento abierto que por (iii) tiene un refinamiento $\{A_i : i \in I\}$ localmente finito. Aplicando ahora la Proposición 1.10 tendremos que $\{\overline{A}_i : i \in I\}$ es un cubrimiento localmente finito y claramente es un refinamiento del cubrimiento inicial.

(iv)⇒(i) Sea $\{U_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto de $X$ y sea $\{E_t : t \in T\}$ un refinamiento cerrado localmente finito. Cada $x \in X$ tiene un entorno abierto $V_x$ que corta a lo sumo a una cantidad finita de conjuntos $E_t$. Sea $\{B_j : j \in J\}$ un refinamiento cerrado localmente finito de $\{V_x : x \in X\}$. Tendremos entonces que cada $B_j$ corta a lo sumo con una cantidad finita de conjuntos $E_t$ y por lo tanto, por el Lema 1.11, para cada $t$ existe un abierto $G_t$ tal que $\{G_t : t \in T\}$ es localmente finito y $E_t \subset G_t$. Si asociamos a cada $t$ un conjunto $U_{s_t} \in \{U_s : s \in S\}$ tal que $E_t \subset U_{s_t}$ obtendremos finalmente que $\{G_t \cap U_{s_t} : t \in T\}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\{U_s\}_s$. □

**Definición 1.6.** *Sea $\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$ un cubrimiento de un conjunto $X$. La estrella de un conjunto $Y \subset X$ con respecto a $\mathcal{A}$ es el conjunto*

$$\mathrm{St}(Y, \mathcal{A}) := \bigcup \{A_s : Y \cap A_s \neq \emptyset\}.$$

*Por* $\mathrm{St}(x, A)$ *denotaremos al conjunto* $\mathrm{St}(\{x\}, A)$.

**Definición 1.7.** *Se dice que un cubrimiento $\mathcal{A}$ es refinamiento baricéntrico de un cubrimiento $\mathcal{U}$ de $X$ cuando el cubrimiento $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{A}) : x \in X\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.*

**Proposición 1.14.** *Sea $X$ un espacio topológico normal. Entonces, todo cubrimiento abierto localmente finito admite un refinamiento baricéntrico.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{A} = \{U_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto localmente finito y tomemos $\mathcal{B} = \{V_s : s \in S\}$ un cubrimiento abierto tal que $\overline{V}_s \subset U_s$ para cada $s$ (podemos hacer esto porque $X$ es un espacio normal). En tal caso, $\mathcal{B}$ es localmente finito. Para cada $x \in X$ definamos

$$W(x) = \left(\cap\{U_s : x \in \overline{V}_s\}\right) \bigcap \left(X \backslash \cup \{\overline{V}_t : x \notin \overline{V}_t\}\right).$$

Vamos a ver que $\mathcal{C} = \{W(x) : x \in X\}$ es el refinamiento baricéntrico abierto que buscamos. Por un lado, como $\mathcal{B}$ es localmente finito, el primer término $(\cap U_s)$ es una intersección finita, y por la Proposición 1.10 tendremos que el segundo término $X \backslash \cup \overline{V}_t$ es abierto y por lo tanto, $W(x)$ es abierto. Por otro lado, $\mathcal{C}$ es un cubrimiento de $X$ ya que si $x \in X$ entonces $x \in W(x)$. Fijemos $x_0 \in X$ y sea $\overline{V}_s$ tal que $x_0 \in \overline{V}_s$. Sea $y$ tal que $x_0 \in W(y)$. Si $y \notin \overline{V}_s$ tendremos que $W(y) \subset X \backslash \overline{V}_s$ y por lo tanto $x_0 \in X \backslash \overline{V}_s$ lo que es imposible. Así que $y \in \overline{V}_s$ si $x_0 \in W(y)$ y por lo tanto $W(y) \subset U_s$ y de aquí deducimos que $\mathrm{St}(x_0, \mathcal{C}) \subset U_s$ con lo que terminamos la prueba. □

**Definición 1.8.** *Sean $\mathcal{A} = \{U_s : s \in S\}$ y $\mathcal{U}$ cubrimientos de un espacio $X$. Se dice que $\mathcal{A}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}$ cuando el cubrimiento $\{St(U_s, \mathcal{A}) : s \in S\}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$.*

**Proposición 1.15.** *Un refinamiento baricéntrico $\mathcal{A}$ de un refinamiento baricéntrico $\mathcal{B}$ de un cubrimiento $\mathcal{U}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}$.*

*Demostración.* Dado $W_0 \in \mathcal{A}$, elijamos $x_0 \in W_0$. Para cada $W \in \mathcal{A}$ tal que $W \cap W_0 \neq \emptyset$ elijamos $z \in W \cap W_0$, entonces $W \cup W_0 \subset \mathrm{St}(z, \mathcal{A}) \subset V$ para algún $V \in \mathcal{B}$. En tal caso, $x_0 \in V$ y por lo tanto $W \subset V \subset \mathrm{St}(x_0, \mathcal{B})$ y esto ocurre para todo $W \in \mathcal{A}$ tal que $W \cap W_0 \neq \emptyset$, por lo que $\mathrm{St}(W_0, \mathcal{A}) \subset \mathrm{St}(x_0, \mathcal{B}) \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$. □

**Teorema 1.16.** *Un espacio topológico $X$ es paracompacto si, y sólo si, todo cubrimiento abierto admite un refinamiento baricéntrico abierto. Además esto se cumple si $X$ es $T_1$ (aunque no sea Hausdorff).*

*Demostración.* Supongamos que $X$ es un espacio topológico paracompacto y $T_1$ (no necesariamente Hausdorff). Como está claro que un refinamiento baricéntrico de cualquier refinamiento de un cubrimiento $\mathcal{U}$ es también un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{U}$ tendremos aplicando la Proposición 1.14 que todo cubrimiento abierto de $X$ tiene refinamiento baricéntrico abierto.

Veamos ahora el recíproco. Para ello vamos a ver primero que un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_s : s \in S\}$ admite un refinamiento como el de la equivalencia (ii) del Teorema 1.13 y viendo después que además $X$ es regular terminaríamos la prueba.

Por la Proposición 1.15 podemos encontrar una sucesión de cubrimientos abiertos $\mathcal{U}_{-1}, \mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \ldots$ tales que cada $\mathcal{U}_n$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_{n-1}$ y $\mathcal{U}_{-1}$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}$. Definamos $\mathcal{A}_1 = \mathcal{U}_1$ e inductivamente para $n \geq 2$ definamos

$$\mathcal{A}_n = \{\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_n) : V \in \mathcal{A}_{n-1}\}.$$

Cada $\mathcal{A}_n$ es un refinamiento abierto de $\mathcal{U}_0$, de hecho tendremos que cada cubrimiento $\{\mathrm{St}(V, U_n) : V \in \mathcal{A}_n\}$ refina $\mathcal{U}_0$. Veamos esto último por inducción. Para $n = 1$ es cierto, supongamos que es válido para $n = k-1$. Tomemos $V$ de la forma $V = \mathrm{St}(V_0, \mathcal{U}_k)$ para algún $U_k \in \mathcal{A}_{k-1}$, entonces $\mathrm{St}(V, \mathcal{U}_k) = \mathrm{St}(\mathrm{St}(V_0, \mathcal{U}_k), \mathcal{U}_k) \subset \mathrm{St}(V_0, \mathcal{U}_{k-1})$ ya que $\mathcal{U}_k$ es un refinamiento estrella de $\mathcal{U}_{k-1}$ y con ello probamos que cada $\{\mathrm{St}(V, U_n) : V \in \mathcal{A}_n\}$ refina a $\mathcal{U}_0$.

Dotemos a $X$ de un buen orden y para cada $(n, x) \in \mathbb{N} \times X$ definamos

$$E_n(x) = \mathrm{St}(x, \mathcal{A}_n) \setminus \bigcup_{z \prec x} \mathrm{St}(z, \mathcal{A}_{n+1}).$$

Sea ahora $\mathcal{B} = \{E_n(x) : (n, x) \in \mathbb{N} \times X\}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es un cubrimiento. Sea $x \in X$, consideremos el conjunto

$$Z = \{z : x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{St}(z, \mathcal{A}_i)\}$$

que es no vacío ya que $x \in Z$. Sea $y$ el primer elemento de $Z$, tendremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \mathrm{St}(y, \mathcal{A}_n)$ y $x \notin \mathrm{St}(z, \mathcal{A}_{n+1})$ para todo $z \prec x$ y por lo tanto $x \in E_n(y)$. Además, como cada $\mathcal{A}_n$ refina a $\mathcal{U}_0$ tendremos que $\mathcal{B}$ refina a $\mathcal{U}_{-1}$.

Veamos ahora que si $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, entonces corta a lo sumo con un único $E_n(x)$. Supongamos que $U \cap E_n(x) \neq \emptyset$, entonces existe $V \in \mathcal{A}_n$ con $x \in V$ y $V \cap U \neq \emptyset$, así que $x \in V \cup U \subset V_0$ para algún $V_0 \in \mathcal{A}_{n+1}$ y $U \subset \mathrm{St}(x, \mathcal{A}_{n+1})$. De aquí deducimos por la definición de $E_n(x)$ que si $x$ es el primer elemento de $X$ tal que $E_n(x)$ corta con $U$, entonces $U$ no corta con $E_n(y)$ para todo $y \succ x$.

Sea ahora

$$W_n(x) = \mathrm{St}(E_n(x), \mathcal{U}_{n+2})$$

y sea

$$\mathcal{M} = \{W_n(x) : (n, x) \in \mathbb{N} \times X\}.$$

Tendremos claramente que $\mathcal{M}$ es un cubrimiento abierto de $X$. Además, $\mathcal{M}$ refina $\mathcal{U}$ porque $\mathcal{B}$ refina $\mathcal{U}_{-1}$. Para ver que este refinamiento es el que buscábamos basta con ver que la familia $\{W_n(x) : x \in X\}$ es localmente finita. Sea $U \in \mathcal{U}_{n+2}$, tendremos entonces que $U$ corta como mucho a un $W_n(x)$ ya que $U \cap W_n(x) \neq \emptyset$ si, y sólo si, $E_n(x) \cap \mathrm{St}(U, \mathcal{U}_{n+2}) \neq \emptyset$ y como $\mathrm{St}(U, \mathcal{U}_{n+2})$ está contenido en algún $U_0 \in \mathcal{U}_{n+1}$ que sólo puede cortar con a lo sumo un $E_n(x)$ obtenemos que $U$ corta a los sumo con un $W_n(x)$. Con esto tendremos que el cubrimiento $\mathcal{M}$ es como deseábamos.

Nos queda ver solamente que $X$ es regular. Sea $T \subset X$ cerrado y sea $x \in X \backslash T$. Como $X$ es un espacio $T_1$, $x$ es un conjunto cerrado y por lo tanto $\mathcal{U} = \{X \backslash x, X \backslash T\}$ es un cubrimiento abierto. Por hipótesis y por la Proposición 1.15, $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento estrella $\mathcal{A}$. Veamos que en tal caso $\mathrm{St}(x, \mathcal{A})$ y $\mathrm{St}(T, \mathcal{A})$ son entornos abiertos disjuntos de $x$ y $T$ respectivamente. Supongamos que no son disjuntos, esto quiere decir que existe $V, V' \in \mathcal{A}$ tales que $V$ contiene a $x$, $V'$ corta con $T$ y además $V \cap V' \neq \emptyset$, pero en tal caso $V' \subset \mathrm{St}(V, \mathcal{A})$ y por lo tanto $\mathrm{St}(V, \mathcal{A})$ contiene a $x$ y corta con $T$ lo que es imposible por ser $\mathcal{A}$ un refinamiento estrella de $\mathcal{U}$. $\square$

# Capítulo 2

# Distancia y funciones continuas

En este capítulo vamos a estudiar para un espacio topológico $X$ y un espacio métrico $(Z, d)$, la distancia $\hat{d}(H, C^*(X, Z))$ donde $H \subset Z^X$ es un subconjunto de funciones uniformemente acotado. En las dos primeras secciones de este capítulo vemos que esta distancia se puede estudiar usando cierta noción de intercambios de límites, y esta relación se obtiene mediante el concepto de oscilación de una función. Usando estas herramientas, en las siguientes secciones de este capítulo mostramos algunos resultados en términos de distancias.

## 2.1 Límites iterados y oscilaciones

La mayoría de los resultados que recoge esta sección aparecen en [4]. La siguiente definición fue introducida por Grothendieck en [21] para el caso $\varepsilon = 0$, luego se amplió en [16] para $\varepsilon \geq 0$ en espacios de Banach y por último en [4] aparece tal como se presenta aquí.

**Definición 2.1.** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico, $X$ un conjunto, $H \subset Z^X$, $A \subset X$ y $\varepsilon \geq 0$. Diremos que $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $A$ si para cada sucesión $(x_n)_n$ en $A$ y $(f_m)_m$ en $H$ se cumple que*

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n)) \leq \varepsilon$$

*siempre que todos los límites involucrados existan. En el caso $\varepsilon = 0$, simplemente diremos que $H$ y $A$ intercambian límites.*

**Lema 2.1.** *Sea $X$ un conjunto, $(Z, d)$ un espacio métrico, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ una red en $X$ y $(f_\beta)_{\beta \in J}$ una red en $Z^X$ tales que existan los siguientes límites iterados*

$$\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha) \qquad y \qquad \lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha),$$

*entonces existen sucesiones crecientes de índices* $(\alpha_n)_n \subset I$ *y* $(\beta_m)_m \subset J$ *tales que*

$$\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha) = \lim_n \lim_m f_{\beta_m}(x_{\alpha_n}),$$

$$\lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha) = \lim_m \lim_n f_{\beta_m}(x_{\alpha_n}).$$

*Demostración.* Para simplificar la notación, denotemos por $p_\beta = \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha)$, $q_\alpha = \lim_\beta f_\beta(x_\alpha)$, $p = \lim_\beta p_\beta$ y $q = \lim_\alpha q_\alpha$. Sea $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(q_{\alpha_1}, q) < 1$ y supongamos que hemos definido $\beta_k \in \mathbb{N}$ para $1 \leq k \leq n-1$ y $\alpha_k \in \mathbb{N}$ para $1 \leq k \leq n$. Entonces, como $\lim_\beta p_\beta = p$ y $\lim_\beta f_\beta(x_{\alpha_k}) = q_{\alpha_k}$ para $1 \leq k \leq n$ podemos tomar $\beta_n$ (mayor que $\beta_{n-1}$ si $n > 1$) tal que $d(p_{\beta_n}, p) < n^{-1}$ y $d(f_{\beta_n}(x_{\alpha_k}), q_{\alpha_k}) < n^{-1}$ para $1 \leq k \leq n$. Por otro lado, como $\lim_\alpha q_\alpha = q$ y $\lim_\alpha f_{\beta_k}(x_\alpha) = p_{\beta_k}$ para $1 \leq k \leq n$ podemos tomar $\alpha_{n+1} \succ \alpha_n$ tal que $d(q_{\alpha_{n+1}}, q) < (n+1)^{-1}$ y $d(f_{\beta_k}(x_{\alpha_{n+1}}), p_{\beta_k}) < (n+1)^{-1}$ para $1 \leq k \leq n$. Tendremos entonces claramente que $(\alpha_n)_n$ y $(\beta_m)_m$ son las sucesiones que buscábamos. □

De forma inmediata obtenemos el siguiente corolario que nos viene a decir que la definición de $\varepsilon$-intercambio de límites se puede usar tanto sucesiones como redes.

**Corolario 2.2.** *Sea* $X$ *un conjunto,* $(Z, d)$ *un espacio métrico,* $H \subset X^Z$ *y* $A \subset X$*. Son equivalentes:*

(i) $H$ *$\varepsilon$-intercambia límites con* $A$*.*

(ii) *Si* $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ *es una red en* $A$ *y* $(f_\beta)_{\beta_J}$ *es una red en* $H$ *entonces siempre que los límites involucrados existan, se cumplirá que*

$$d(\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha), \lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha)) \leq \varepsilon.$$

El primer resultado que nos permite ligar la nociones de $\varepsilon$-intercambio de límites con distancias es el siguiente.

**Proposición 2.3.** *Sea* $(Z, d)$ *un espacio métrico compacto, sea* $X$ *un espacio topológico y* $H$ *un subconjunto de* $C(X, Z)$*. Tendremos que:*

(i) *Si* $H$ *$\varepsilon$-intercambia límites con* $X$ *y* $f \in \overline{H}^{Z^X}$*, entonces* $\operatorname{osc}^*(f) \leq \varepsilon$*.*

(ii) *Si* $X$ *es numerablemente compacto y* $\operatorname{osc}^*(f) \leq \varepsilon$ *para todo* $f \in \overline{H}^{Z^X}$*, entonces* $H$ *$\varepsilon$-intercambia límites con* $X$*.*

*Demostración.* Veamos primero (i). Sea $f \in \overline{H}^{Z^X}$ y sea $x \in X$. Sea $\mathcal{U}_x$ el conjunto de los entornos de $x$ en $X$. Tendremos entonces que el conjunto $\mathcal{U}_x \times (0, +\infty)$ es dirigido cuando lo dotamos de la relación $(U, \delta) \succeq (U', \delta')$

si, y sólo si, $U \subset U'$ y $\delta \leq \delta'$. Para cada $\alpha = (U, \delta) \in \mathcal{U}_x \times (0, +\infty)$ tomemos $x_\alpha \in U$ tal que

$$\sup_{y \in U} d(f(y), f(x)) - \delta \leq d(f(x_\alpha), f(x)).$$

Tendremos claramente que la red $(x_\alpha)_\alpha$ converge hacia $x$ y además

$$\lim_\alpha d(f(x_\alpha), f(x)) = \operatorname{osc}^*(f, x).$$

Tomemos ahora una red $(f_\beta)_\beta$ convergente a $f$ en $Z^X$. Debido a que $Z$ es compacto, tomando una subred podemos suponer que $(f(x_\alpha))_\alpha$ converge a algún $z \in Z$. Por lo tanto tendremos que

$$\begin{aligned}
&\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha) = \lim_\alpha f(x_\alpha) = z,\\
&\lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha) = \lim_\beta f_\beta(x) = f(x),\\
&\operatorname{osc}^*(f, x) = \lim_\alpha d(f(x_\alpha), f(x)) = d(z, f(x)).
\end{aligned}$$

Tomando las sucesiones dadas por el Lema 2.1 y usando que $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $X$ obtendremos que

$$\operatorname{osc}^*(f, x) = d(z, f(x)) = d(\lim_n \lim_m f_{\beta_m}(x_{\alpha_n}), \lim_m \lim_n f_{\beta_m}(x_{\alpha_n})) \leq \varepsilon.$$

Veamos ahora (ii). Tomemos sucesiones $(x_n)_n$ en $X$ y $(f_m)_m$ en $H$ tales que los siguientes límites existan

$$\lim_n \lim_m f_m(x_n) \qquad \text{y} \qquad \lim_m \lim_n f_n(x_m).$$

Como $X$ es numerablemente compacto, la sucesión $(x_n)_n$ tiene un punto de aglomeración $x$ en $X$. Como $Z^X$ es compacto, existe un $f \in \overline{H}^{Z^X}$ punto de aglomeración de $(f_m)_m$ en $Z^X$. En tal caso tendremos claramente que

$$d(f(x), \lim_n f(x_n)) \leq \operatorname{osc}^*(f, x).$$

Por otro lado tendremos que

$$\begin{aligned}
&\lim_n \lim_m f_m(x_n) = \lim_n f(x_n)\\
&\lim_m \lim_n f_m(x_n) = \lim_m f_m(x) = f(x),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$d(\lim_n \lim_m f_m(x_n), \lim_m \lim_n f_m(x_n)) = d(f(x), \lim_n f(x_n)) \leq \operatorname{osc}^*(f, x) \leq \varepsilon.$$

$\square$

También podemos obtener algunos resultados cuando el $\varepsilon$-intercambio de límites se da en un subespacio denso.

**Lema 2.4.** *Sea $X$ un espacio topológico, $(Z, d)$ un espacio métrico compacto, $D$ un subconjunto denso de $X$, $\varepsilon \geq 0$ y $f \in Z^X$. Si todo punto $x \in X$ tiene un entorno $U_x$ tal que $\sup_{y \in U_x \cap D} d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$ entonces $\operatorname{osc}^*(f) \leq 2\varepsilon$.*

*Demostración.* Sea $x \in X$ y sea $y \in U_x$ fijo. Tomemos $d \in D \cap U_x \cap U_y$. Entonces tendremos que

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(d)) + d(f(d), f(y)) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

y por lo tanto $\operatorname{osc}^*(f, x) \leq 2\varepsilon$ y como $x$ era arbitrario el lema queda demostrado. □

**Proposición 2.5.** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico compacto, $X$ un espacio topológico y $H$ un subconjunto de $C(X, Z)$. Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con un conjunto denso $D$ de $X$, entonces $\operatorname{osc}^*(f) \leq 2\varepsilon$ para todo $f \in \overline{H}^{Z^X}$, y por lo tanto, $\operatorname{osc}(f) \leq 4\varepsilon$.*

*Demostración.* Sea $\delta > \varepsilon$, si suponemos que existe $f \in \overline{H}^{Z^X}$ y $x \in X$ tal que $\sup_{y \in U \cap D} d(f(x), f(y)) > \delta$ para todo entorno $U$ de $x$, entonces podemos tomar una red $(d_\alpha)_\alpha$ en $D$ convergente a $x$ tal que $d(f(d_\alpha), f(x)) > \delta$ para todo $\alpha$. Como $Z$ es compacto, podemos suponer que $\lim_\alpha f(d_\alpha)$ existe. Tomemos una red $(f_\beta)_\beta$ en $Z^X$ convergente hacia $f$. Tendremos entonces que

$$\begin{aligned}
&\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(d_\alpha) = \lim_\alpha f(d_\alpha),\\
&\lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(d_\alpha) = \lim_\beta f_\beta(x) = f(x).
\end{aligned}$$

En tal caso tendremos que

$$d(\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(d_\alpha), \lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(d_\alpha)) = d(\lim_\alpha f(d_\alpha), f(x)) \geq \delta > \varepsilon$$

lo que es imposible por el Lema 2.1. Por lo tanto, dada $f \in \overline{H}^{Z^X}$, para todo $x \in X$ existe un entorno $U$ de $x$ tal que $\sup_{y \in U \cap D} d(f(x), f(y)) \leq \delta$, y aplicando el Lema 2.4 tendremos que $\operatorname{osc}^*(f) \leq 2\delta$ y como esto es cierto para todo $\delta \geq \varepsilon$ tendremos que $\operatorname{osc}^*(f) \leq 2\varepsilon$. □

**Corolario 2.6.** *Sea $X$ un espacio topológico numerablemente compacto, $(Z, d)$ un espacio métrico compacto y $H \subset C(X, Z)$. Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con un conjunto denso $D$ de $X$, entonces $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $X$.*

*Demostración.* Por la Proposición 2.5, tendremos que $\mathrm{osc}^*(f) \leq 2\varepsilon$ para todo $f \in \overline{H}^{Z^X}$, y por lo tanto, aplicando la Proposición 2.3 tendremos que $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $X$. $\square$

Vamos a ver ahora un ejemplo que nos va a mostrar que las constantes 2 y 4 de la Proposición 2.5 no pueden ser mejoradas.

**Ejemplo 2.7.** *Sea $X = Z = [-1,1]$ dotados de la métrica euclídea. Sea $g : [-1,1] \to [-1,1]$ la aplicación definida para $x \in [-1,1]$ como*

$$g(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \in \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\}, \\ -\frac{1}{2} & si\ x \in [-1,0) \backslash \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\}, \\ 0 & si\ x = 0, \\ \frac{1}{2} & si\ x \in (0,1] \backslash \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}, \\ 1 & si\ x \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \end{cases}$$

*Como la antiimagen mediante $f$ de cada conjunto abierto es una unión numerable de cerrados contenida en $[-1,1]$, tendremos que $g$ es una función de la primera clase de Baire. Por lo tanto, existe una sucesión $(f_n)_n$ de funciones continuas de $[-1,1]$ en $[-1,1]$ que convergen puntualmente hacia $g$. Definamos $H = \{f_n : n \in N\}$ y $D = [-1,1] \backslash \{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \cdots\}$. Usando que $(f_n)_n$ converge puntualmente hacia $g$ y la definición de $g$ se obtiene inmediatamente que $H$ $(1/2)$-intercambia límites con $D$ y 1-intercambia límites con $X$. Por otro lado, la función $g$, que de hecho pertenece a la clausura de $H$, cumple que $\mathrm{osc}(g) = 2$ y $\mathrm{osc}^*(g) = 1$ con lo que podemos concluir que las constantes obtenidas son óptimas.*

Sea $X$ es un espacio numerablemente compacto y sea $H$ un subconjunto $\tau_p$-relativamente numerablemente compacto en $C(X,Z)$. Si tenemos sucesiones $(x_m)_m$ en $X$ y $(f_n)_n$ en $H$ tales que los límites iterados existen, entonces es fácil comprobar que ambos límites son iguales a $f(x)$ donde $f$ es un punto de aglomeración de $(f_n)_n$ en la clausura de $H$ y $x$ es un punto de aglomeración de $(x_m)_m$ en $X$ y por lo tanto, tendremos que $H$ intercambia límites con $X$. Debido a esto tendremos que las Proposiciones 2.3 y 2.5 son versiones cuantitativas de un resultado de Eberlein-Grothendieck (véase por ejemplo [17, p. 12]) que se obtiene haciendo $\varepsilon = 0$ en los resultados mencionados.

**Corolario 2.8.** *Sea $X$ un espacio numerablemente compacto, $Z$ un espacio métrico compacto y $H$ un subconjunto de $C(X,Z)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *$H$ es $\tau_p$-relativamente numerablemente compacto en $C(X,Z)$.*
(ii) *$H$ intercambia límites con $X$.*
(iii) *$H$ intercambia límites con algún conjunto denso de $X$.*
(iv) $\overline{H}^{Z^X} \subset C(X,Z)$.
(v) *$H$ es $\tau_p$-relativamente compacto en $C(X,Z)$.*

## 2.2 Límites iterados y distancias

La mayoría de los resultados de esta sección aparecen en [4]. Usando ahora la Proposición 2.3 podemos ligar la noción de $\varepsilon$-intercambio de límites con la de distancia a espacios de funciones continuas.

**Corolario 2.9.** *Sea $X$ un espacio topológico y sea $H$ un conjunto uniformemente acotado de $C^*(X)$.*
(i) *Si $X$ es normal y $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $X$, entonces*

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C^*(X)) \leq \varepsilon.$$

(ii) *Si $X$ es numerablemente compacto y $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C^*(X)) \leq \varepsilon$, entonces $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $X$.*

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 1.6, la Proposición 1.5 y la Proposición 2.3. Nótese que podemos usar la Proposición 2.3 porque $H$ es uniformemente acotado. □

La Proposición 2.5 junto con el Teorema 1.6 y la Proposición 1.5 nos da el siguiente Corolario.

**Corolario 2.10.** *Sea $X$ un espacio normal y sea $H$ un subconjunto uniformemente acotado de $C^*(X)$. Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con un conjunto denso de $X$, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C^*(X)) \leq 2\varepsilon$.*

El Ejemplo 2.7 nos sirve para ver que las constantes del Corolario 2.10 y del Corolario 2.9 apartado (i) son de nuevo óptimas. Vamos a ver ahora con el siguiente ejemplo que la constante 2 obtenida en el Corolario 2.9 apartado (ii) es también óptima.

**Ejemplo 2.11.** *Sea $X = \{0\} \cup \{1/k : k \in \mathbb{N}\}$ dotado de la topología euclídea. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $f_n : X \to \mathbb{R}$ como $f_n(t) = (1-t)^n$ para cada $t \in X$. Tomemos $H = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. La sucesión $(f_n)_n$ converge puntualmente a la función característica $\chi_{\{0\}}$ por lo que $\overline{H}^{\mathbb{R}^X} = H \cup \{\chi_{\{0\}}\}$.*

*Por el Teorema 1.6 tendremos claramente que* $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C^*(X)) = 1/2$*. Por otro lado, si tomamos* $x_k = 1/k$ *tendremos que* $\lim_n \lim_k f_n(x_k) = \lim_n 1 = 1$ *y* $\lim_k \lim_n f_n(x_k) = \lim_k 0 = 0$.

Ahora vamos a ver algunos resultados similares a los que acabamos de ver pero en el espacio de funciones $C^*(X, Z)$ con $Z$ un subconjunto convexo y compacto de un espacio normado. Para ello no podemos usar el Teorema 1.6 ya que no es cierto en general. Lo que tenemos en este caso es:

**Teorema 2.12.** *Sea* $X$ *un espacio paracompacto y sea* $Z$ *un subconjunto convexo de un espacio normado* $E$*. Entonces para cada aplicación acotada* $f : X \to Z$ *tendremos*

$$\frac{1}{2}\operatorname{osc}(f) \leq d(f, C^*(X, Z)) \leq \operatorname{osc}(f).$$

*Demostración.* La primera desigualdad es inmediata y se cumple para $Z$ metrizable y $X$ arbitrario. Veamos la segunda desigualdad. Sea $s = \operatorname{osc}(f)$ y sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$ tomemos un entorno $U_x$ de $x$ de modo que $\operatorname{diam}(U_x) \leq s + \varepsilon$. Por el Teorema 1.16, el cubrimiento $\mathcal{A} = \{U_x : x \in X\}$ admite un refinamiento baricéntrico abierto $\mathcal{W}$. Sea ahora $\{p_a : a \in A\}$ una partición de la unidad localmente finita subordinada a $\mathcal{W}$. Para cada $a \in A$ fijemos un punto $x_a \in p_a^{-1}((0, 1])$ y tomemos $z_a = f(x_a)$. Definamos ahora

$$g(x) = \sum_{a \in A} p_a(x) z_a.$$

Claramente tenemos que $g$ es una función continua. Sea $x \in X$ fijo y sea $B = \{a \in A : p_a(x) > 0\}$. Como $\mathcal{W}$ es un refinamiento baricéntrico de $\mathcal{A}$ podemos afirmar que existe $y \in Y$ tal que

$$\bigcup_{a \in B} p_a^{-1}((0, 1]) = \operatorname{St}(x, \{p_a^{-1}((0, 1]) : a \in A\}) \subset \operatorname{St}(x, \mathcal{W}) \subset U_y$$

por lo que $x \in U_y$ y $x_a \in U_y$ para todo $a \in B$. Por lo tanto, $f(x)$ y $g(x)$ pertenecen a $\operatorname{conv}(f(U_y))$ y como $\operatorname{diam} \operatorname{conv}(f(U_y)) = \operatorname{diam} f(U_y) < s + \varepsilon$ tendremos que $\|g(x) - f(x)\| < s + \varepsilon$ y esto podemos hacerlo para cualquier $x \in X$ por lo que tendremos que $d(f, g) \leq s + \varepsilon$ y por lo tanto $g$ es acotada, es decir, $g \in C^*(X, Z)$ y $d(f, C^*(X, Z)) \leq s + \varepsilon$. Como esto podemos hacerlo para todo $\varepsilon > 0$ tendremos que $d(f, C^*(X, Z)) \leq s$. $\square$

**Corolario 2.13.** *Sea* $X$ *un espacio topológico paracompacto,* $Z$ *un subconjunto convexo y compacto de un espacio normado y sea* $H \subset C(X, Z)$*. Tendremos que:*

(i) *Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $X$, entonces*

$$\hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \leq 2\varepsilon.$$

(ii) *Si además $X$ es numerablemente compacto y $\hat{d}(\overline{H}^{Z^X}, C(X,Z)) \leq \varepsilon$, entonces $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $X$.*

Vamos a ver con otro ejemplo que la convexidad de $Z$ es esencial en el Corolario 2.13. Vamos a ver que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un espacio métrico compacto $(Z,d)$, un espacio compacto $K$ y un subconjunto $H$ de $C(K,Z)$ tales que $\hat{d}(\overline{H}^{Z^K}, C(K,Z)) = 1$ y $H$ $(1/n)$-intercambia límites con $K$. Con esto quedará probado no sólo que la cota obtenida en el apartado (i) no es válida si $Z$ no es convexo sino también que no es posible dar cota alguna.

**Ejemplo 2.14.** *Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea*

$$Z = [-1,1] \times \{0\} \cup \bigcup_{i=-n}^{n} \{\frac{i}{n}\} \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

*dotado con la métrica euclídea. Sea $K = [-1,1]$ con la topología euclídea y sea $g : K \to Z$ definida por la fórmula*

$$g(t) = \begin{cases} (\frac{i}{n}, 1) & \text{si } t \in [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}), i = -n, -n+1, \ldots, n-1, \\ (1,1) & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

*Obsérvese que para cada $f \in C(K,Z)$, o bien se tiene que $f(t) = (s,0)$ para algún $s,t \in [-1,1]$, o bien $f(K) \subset \{i/n\} \times [0,1]$ para algún $i$. En ambos casos tendremos que $d(f,g) \geq 1$. Como $d(g,f_0) = 1$ para la función constante que toma el valor $(0,1) \in Z$, tendremos que $d(g, C(K,Z)) = 1$. Para $k > n$ tomemos*

$$A_k = \bigcup_{i=-n}^{n} [\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} - \frac{1}{k}] \cup \{1\} \subset K.$$

*Esta claro que podemos tomar una sucesión de funciones continuas $(f_k)_{k>n}$ de modo que $f_k|_{A_k} \equiv g|_{A_k}$. Claramente dicha sucesión convergerá puntualmente a $g$. Definamos $H = \{f_k : k > n\}$. Tendremos entonces que $\overline{H}^{Z^K} = H \cup \{g\}$, y por lo tanto $\hat{d}(\overline{H}^{Z^K}, C(K,Z)) = 1$. Veamos ahora que $H$ $(1/n)$-intercambia límites con $K$. Tomemos una sucesión $(h_i)_i$ en $H$ y una sucesión $(x_j)_j$ en $K$ tales que los siguientes límites existan*

$$\lim_i \lim_j h_i(x_j) \quad y \quad \lim_j \lim_i h_i(x_j).$$

*Si la sucesión $(h_i)_i$ tiene sólo una cantidad finita de elementos distintos tendremos entonces que los dos límites anteriores deben de ser iguales. Supongamos por tanto que dicha sucesión tiene infinitos elementos distintos. Como $(h_i)_i \subset H$, tomando una subsucesión podemos suponer que $(h_i)_i$ converge puntualmente hacia $g$, y tomando una subsucesión, debido a que $K$ es un espacio métrico compacto, podemos suponer que $(x_j)_j$ converge hacia algún $x \in K$. Tendremos entonces que $\lim_i \lim_j h_i(x_j) = \lim_i g(x_j) = g(x)$ y $\lim_j \lim_i h_i(x_j) = \lim_j g(x)$, pero como $\lim_j x_j = x$, teniendo en cuenta la definición de $g$ se obtiene que $d(g(x), \lim_j g(x_j)) \leq 1/n$.*

La Proposición 2.5 junto con el Teorema 2.12 y la Proposición 1.5 nos da el siguiente Corolario.

**Corolario 2.15.** *Sea $X$ un espacio paracompacto y sea $H$ un subconjunto de $C(X, Z)$ que $\varepsilon$-intercambia límites con un conjunto denso de $X$, entonces $\hat{d}(cl_{Z^X}(H), C(X, Z)) \leq 4\varepsilon$.*

## 2.3 Distancia y envolturas convexas

El objetivo principal de esta sección es demostrar que el $\varepsilon$-intercambio de límites se conserva cuando tomamos envolturas convexas (Teorema 2.18). Este resultado se puede encontrar en [4, Theorem 3.3] y anteriormente se hizo para el caso de espacios de Banach en [16, Theorem 13]. A partir de dicho Teorema se podrán deducir ciertos resultados sobre distancias de clausuras de envolturas convexas a espacios de funciones continuas.

El siguiente Lema se puede encontrar en [23, Lemma 17.9].

**Lema 2.16.** *Sea $\mu$ una medida finitamente aditiva que toma valores positivos en $\mathbb{R}$ definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ y sea $\{A_k\}_k$ una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ tales que $\mu(A_k) > \delta$ para algún $\delta > 0$ y para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión $(A_{k_i})_i$ de $(A_k)_k$ tal que $\mu(\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_i}) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Veamos primero que en las condiciones del Teorema existe un número natural $s$ y un número positivo $d$ tal que $\mu(A_s \cap A_k) \geq d$ para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$.

Sea $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Entonces $(\mu(B_n))_n$ es una sucesión creciente que está acotada por $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ y por lo tanto la sucesión converge a cierto $a \in \mathbb{R}$

positivo. Tendremos entonces que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $a - \mu(B_r) < \delta/2$. Esto quiere decir que para cada $k > r$ se tiene que $\mu(A_k \cap B_r) > \delta/2$ y por lo tanto existe un $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tal que $\mu(A_s \cap A_k) \geq \delta/2r$ y de aquí deducimos que existe un $s$ tal que $\mu(A_s \cap A_k) \geq \delta/2r$ para una cantidad infinita de $k \in \mathbb{N}$.

Construyamos ahora la sucesión que buscamos. Para ello vamos a construir una sucesión $(A_{k_i})_i$ tal que para cada $n$ existen infinitos $k \in \mathbb{N}$ tales que $\mu((\cap_{i=1}^n A_{k_i}) \cap A_k) > d_n$ para algún $d_n$ número positivo. Para ello definamos $k_1$ como el elemento $s$ que hemos construido en el paso anterior. Supongamos que tenemos construidos $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$ tales que $(\cap_{i=1}^n A_{k_i}) \cap A_k > d_n$ para todo $k \in K_n \subset \mathbb{N}$ con $K$ infinito. Entonces para escoger $A_{k_{n+1}}$ basta aplicar el paso anterior a la familia de conjuntos $\{(\cap_{i=1}^n A_{k_i}) \cap A_k : k \in K\}$. $\square$

El siguiente Lema es una reformulación de [23, Lemma 17.10].

**Lema 2.17.** *Sea $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ una partición formada por subconjuntos no vacíos de un conjunto $I$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mu_n$ una medida de probabilidad en $\mathcal{P}(I_n)$, el conjunto de las partes de $I_n$. Sea $(A_k)_k$ una sucesión de subconjuntos de $I$ tal que, para cada $\delta > 0$ se cumple que* $\liminf_n \mu_n(A_k \cap I_n) > \delta$ *para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe una subsucesión $(A_{k_i})_i$ tal que $\bigcap_{i=1}^{n} A_{k_i} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.*

*Demostración.* Sea $\mathcal{A}$ el subálgebra de $\mathcal{P}(I)$ generada por los conjuntos $A_k$ con $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{A}$ es numerable, mediante un proceso de diagonalización podemos encontrar una sucesión creciente de números naturales $(i_j)$ tales que $\lim_j \mu_{i_j}(A \cap I_{i_j})$ existe para cada $A \in \mathcal{A}$. Tendremos entonces una función $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ definida por $\mu(A) = \lim_j \mu_{i_j}(A \cap I_{i_j})$, que claramente es una función finitamente aditiva sobre $\mathcal{A}$ que está en las condiciones del Lema 2.16 ya que $\mu(A_k) > \delta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Así que aplicando el Lema 2.16 existe una subsucesión $(A_{k_i})_i$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tendremos que $\mu(\cap_{i=1}^n A_{k_i}) > 0$ y en particular $\cap_{i=1}^n A_{k_i} \neq \emptyset$. $\square$

**Teorema 2.18.** *Sea $Z$ un subconjunto compacto convexo de un espacio normado $E$, sea $K$ un conjunto cualquiera y sea $H$ un subconjunto de $Z^K$. Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $K$ entonces* $\mathrm{conv}(H)$ *$\varepsilon$-intercambia límites con $K$.*

*Demostración.* Sea $\gamma > 0$ un número definido por

$$\gamma := \|\lim_n \lim_k f_n(x_k) - \lim_k \lim_n f_n(x_k)\|$$

donde $(f_n)_n$ y $(x_k)_k$ son dos sucesiones fijas en $\mathrm{conv}(H)$ y $K$ respectivamente tales que los límites anteriores existen. Como cada $f_n \in \mathrm{conv}(H)$ tendremos que

$$f_n = \sum_{a \in I_n} t_a g_a, \tag{2.1}$$

donde $I_n$ es un conjunto finito, $g_a \in H$, $0 \leq t_a \leq 1$ y $\sum_{a \in I_n} t_a = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, podemos coger los $I_n$ disjuntos dos a dos. Sea ahora $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Como $Z$ es compacto e $I$ numerable, cogiendo una subsucesión mediante un proceso de diagonalización, podemos suponer que $(g_a(x_k))_k$ converge hacia algún $q_a \in Z$ para todo $a \in I$. Denotemos entonces

$$p_n = \lim_k f_n(x_k) = \sum_{a \in I_n} t_a q_a.$$

Por definición de $\gamma$ tendremos que existe un funcional $e^* \in B_{E^*}$ tal que

$$\begin{aligned} \gamma &= e^*(\lim_n \lim_k f_n(x_k) - \lim_k \lim_n f_n(x_k)) \\ &= e^*(\lim_n p_n - \lim_k \lim_n f_n(x_k)) = \lim_k e^*(\lim_n p_n - \lim_n f_n(x_k)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $\delta > 0$ fijo, tomando un resto de $(x_k)_k$ podemos suponer que que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$e^*(\lim_n p_n - \lim_n f_n(x_k)) = \lim_n e^*(p_n - f_n(x_k)) > \gamma - \delta.$$

Tendremos por lo tanto que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un $n_k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_k$ se cumple que

$$e^*(p_n - f_n(x_k)) > \gamma - \delta. \tag{2.2}$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ una medida de probabilidad $\mu_n$ en $\mathcal{P}(I_n)$ dada por

$$\mu_n(A) = \sum_{a \in A} t_a \text{ para cada } A \in \mathcal{P}(I_n).$$

Definamos ahora para cada $k \in \mathbb{N}$

$$A_k := \{a \in I : e^*(q_a - g_a(x_k)) > \gamma - 2\delta\}.$$

Sea $M > 0$ una cota del diámetro de $Z$. Usando (2.2), (2.1), la definición de $p_n$ y la de $A_k$ tendremos que

$$\begin{aligned} \gamma - \delta &< e^*(p_n - f_n(x_k)) = e^*(\sum_{a \in I_n} t_a q_a - \sum_{a \in I_n} t_a g_a(x_k)) \\ &= \sum_{a \in I_n} t_a e^*(q_a - g_a(x_k)) \\ &= \sum_{a \in I_n \cap A_k} t_a e^*(q_a - g_a(x_k)) + \sum_{a \in I_n \setminus A_k} t_a e^*(q_a - g_a(x_k)) \\ &\leq \sum_{a \in I_n \cap A_k} t_a M + \gamma - 2\delta = \mu_n(I_n \cap A_k) M + \gamma - 2\delta, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\liminf_n \mu_n(I_n \cap A_k) > \frac{\delta}{M}.$$

Así que podemos aplicar el Lema 2.17 por lo que existe una subsucesión $(A_{k_i})_i$ tal que $\cap_{i=1}^j A_{k_i} \neq \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por la definición de $A_k$ tendremos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un $a_j \in I$ tal que

$$e^*(q_{a_j} - g_{a_j}(x_{k_i})) > \gamma - 2\delta$$

para todo $i \leq j$. Sea $h_j = g_{a_j}$, $r_j = q_{a_j}$ e $y_i = x_{k_i}$, para $i, j \in \mathbb{N}$. Tendremos entonces que $\lim_i h_j(y_i) = r_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y además

$$e^*(r_j - h_j(y_i)) \geq \gamma - 2\delta \tag{2.3}$$

para todo $i \leq j$. Debido a la compacidad de $Z$, mediante un proceso de diagonalización podemos encontrar una subsucesión de $(h_j)_j$ (que volveremos a denotar por $(h_j)_j$) tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, la sucesión $(h_j(y_i))_j$ converge hacia algún $s_i \in Z$ y la sucesión $(r_j)_j$ converge hacia algún $r \in Z$. También podemos tomar una subsucesión de $(y_i)_i$ (que denotaremos de nuevo por $(y_i)_i$) tal que la sucesión correspondiente $(s_i)_i$ converja hacia algún $s \in Z$. Usando esto junto a (2.3) tendremos que

$$\gamma - 2\delta \leq \lim_i \lim_j e^*(r_j - h_j(y_i)) = \lim_i e^*(r - s_i) = e^*(r - s),$$

y como $e^* \in B_{E^*}$ tendremos que

$$\|\lim_j \lim_i h_j(y_i) - \lim_i \lim_j h_j(y_i)\| = \|r - s\| \geq \gamma - 2\delta,$$

y como $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $K$ tendremos que $\varepsilon \geq \gamma - 2\delta$. Como esto ocurre para todo $\delta > 0$ tendremos que $\varepsilon \geq \gamma$ con lo que termina la prueba. $\square$

**Corolario 2.19.** *Sea $K$ un espacio compacto, $Z$ un subconjunto convexo y compacto de un espacio normado $E$ y $H \subset C(K, Z)$. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{Z^K}, C(K, Z)) \leq 4\hat{d}(\overline{H}^{Z^K}, C(K, Z)).$$

*Demostración.* Basta aplicar el Corolario 2.13 y el Teorema 2.18. $\square$

**Corolario 2.20.** *Sea $K$ un espacio compacto y $H \subset C(K)$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

*Demostración.* Basta aplicar el Corolario 2.9 y el Teorema 2.18. □

En este último caso también es posible estudiar que ocurre cuando $H$ no está contenido en $C(K)$.

**Teorema 2.21.** *Sea $K$ un espacio compacto y $H \subset \mathbb{R}^K$ uniformemente acotado. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 5\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

*Demostración.* Debido a que $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^K}(H))}^{\mathbb{R}^K} = \overline{\mathrm{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K}$, tendremos que la desigualdad anterior se cumple con $H$ si, y sólo si, ocurre con su clausura. Por lo tanto podemos suponer que $H$ es cerrado en $\mathbb{R}^K$ con lo que $\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) = \hat{d}(H, C(K))$.

Sea $\varepsilon > \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) = \hat{d}(H, C(K))$. Para cada $f \in H$ existirá una función $g_f \in C(K)$ tal que

$$\|f - g_f\|_\infty < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Sea $H_0 := \{g_f : f \in H\}$. Tendremos claramente que $H_0$ está contenido en $H + B_\infty[0, \varepsilon]$ que es compacto ya que $H$ es cerrado y uniformemente acotado. Por lo tanto $\overline{H_0}^{\mathbb{R}^K} \subset H + B_\infty[0, \varepsilon]$. Por otro lado, está claro que $H \subset H_0 + B_\infty[0, \varepsilon]$ por lo que tendremos que $\overline{H_0}^{\mathbb{R}^K} \subset H_0 + B_\infty[0, 2\varepsilon]$ y como $H_0 \subset C^*(K)$ (por ser $H$ uniformemente acotado) podemos deducir que

$$\hat{d}(\overline{H_0}^{\mathbb{R}^K}, C^*(K)) \leq 2\varepsilon,$$

por lo que aplicando el Corolario 2.9 tendremos que $H_0$ $4\varepsilon$-intercambia límites con $K$, y por lo tanto, por el Teorema 2.18, $\mathrm{conv}(H_0)$ $4\varepsilon$-intercambia límites con $K$. De nuevo por el Corolario 2.9 tendremos que

$$\overline{\mathrm{conv}(H_0)}^{\mathbb{R}^K} \subset C^*(K) + B_\infty[0, 4\varepsilon]$$

y debido a (2.4) tendremos que

$$\overline{\mathrm{conv}(H)}^{\mathbb{R}^K} \subset \overline{\mathrm{conv}(H_0)}^{\mathbb{R}^K} + B_\infty[0, \varepsilon] \subset C^*(K) + B_\infty[0, 5\varepsilon]$$

con lo que terminamos la prueba. □

**Observación 2.22.** *Como ponemos de manifiesto en la Observación 3.8, la constante 2 del Corolario 2.20 es óptima y en el Teorema 2.21 no podemos poner una constante menor que 3.*

## 2.4 Compacidad débil y puntual

Un teorema de Grothendieck afirma que un conjunto $H$ de $C(K)$ con $K$ compacto es débilmente compacto (viendo a $C(K)$ como un espacio de Banach) si, y sólo si, es uniformemente acotado y compacto en la topología producto de $\mathbb{R}^K$ (véase por ejemplo [17, Theorem 4.2]). En este capítulo el resultado principal es el Teorema 2.24 que es una versión cuantitativa del teorema de Grothendieck que acabamos de mencionar.

**Observación 2.23.** *Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $A$ y consideramos la aplicación $\delta : x \to \delta(x)$ donde $\delta_x(h) = h(x)$ es el funcional de Dirac entonces tendremos claramente que $\delta(A) \subset Z^H$ y que $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $A$ si, y sólo si, $\delta(A)$ $\varepsilon$-intercambia límites con $H$. En algunas ocasiones identificaremos $A$ con $\delta(A)$, y en tal caso podremos decir que el $\varepsilon$-intercambio de límites de $A$ con $H$ es equivalente al de $H$ con $A$.*

**Teorema 2.24.** *Sea $K$ un espacio compacto y sea $H$ un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$, entonces tendremos*

$$\frac{1}{2}\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}}, C(B_{C(K)^*})) \leq 4\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K))$$

*donde estamos considerando $B_{C(K)^*}$ con la topología $w^* = \sigma(C(K)^*, C(K))$.*

*Demostración.* Sea $\varepsilon = \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}}, C(B_{C(K)^*}))$. Como $(B_{C(K)^*}, w^*)$ es compacto, por el Corolario 2.9 tendremos que $H$ $2\varepsilon$ intercambia límites con $B_{C(K)^*}$. Como $\delta(K) \subset B_{C(K)^*}$, tendremos que $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $\delta(K)$. Si consideramos $H \subset C(K)$ entonces $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $K$. Aplicando de nuevo el Corolario 2.9 tendremos que

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) \leq 2\varepsilon = 2\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}}, C(B_{C(K)^*})).$$

Veamos ahora la segunda desigualdad. Sea $\varepsilon = \hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K))$. Usando el Corolario 2.9 tendremos que $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $K$. Aplicando ahora la Observación 2.23 tendremos que $\delta(K)$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $H$, pero entonces, de forma inmediata tendremos que $-\delta(K)$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $H$. Por otro lado, es obvio que si dos conjuntos intercambian límites con un tercer conjunto, también lo hará la unión de los dos primeros y por lo tanto $Y = \{\pm\delta_x : x \in K\}$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $H$. Como $Y$ es uniformemente acotado en $H$ (por ser $H$ uniformemente acotado en $K$) podemos aplicar el Teorema 2.18, de donde obtendremos que $\operatorname{conv}(Y)$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $H$. Si consideramos $H \subset \mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}$, de nuevo por la

Observación 2.23 tendremos que $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $\mathrm{conv}(Y)$. Por otro lado, $\mathrm{conv}(Y)$ es un conjunto denso de $B_{C(K)^*}$, por lo tanto, si aplicamos la Proposición 2.5 y el Teorema 1.6 tendremos que

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}}, C(B_{C(K)^*})) \leq 4\varepsilon = 4\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)).$$

□

En particular, si alguna de las dos distancias es 0 también lo será la otra y de aquí podremos obtener como Corolario el Teorema de Grothendieck.

**Corolario 2.25 (Grothendieck).** *Sea $K$ un espacio topológico compacto y $H \subset C(K)$ un subconjunto uniformemente acotado de $C(K)$. Entonces $H$ es débilmente compacto si, y sólo si, es $w_X$-compacto. Esto también se cumple con las respectivas nociones relativas.*

*Demostración.* Este resultado es inmediato por el Teorema 2.24 ya que $H$ es $w_X$-relativamente compacto en $C(K)$ si, y sólo si,

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^K}, C(K)) = 0$$

y por el criterio de completitud de Grothendieck tendremos que $C(K)$ es cerrado en $C(B_{C(K)^*})$ de donde podemos deducir que $H$ es débilmente relativamente compacto si, y sólo si,

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{C(K)^*}}}, C(B_{C(K)^*})) = 0,$$

con lo que queda demostrado que las nociones relativas son equivalentes. Usando esto junto a que la topología débil y la topología $w_X$ son comparables en $H$ se deduce que $H$ de débilmente compacto si, y sólo si, es compacto en la topología producto. □

# Capítulo 3

# Distancia a espacios de Banach

En el Capítulo 2 hemos estudiado en términos de distancias si un subconjunto de un espacio $C(X, Z)$ está cerca de ser compacto. De forma análoga, si $X$ es un espacio de Banach y $H \subset X$ es un subconjunto acotado, considerando la $w^*$-clausura de $H$ en $X^{**}$ podemos ver una forma de *medir* si $H$ está próximo de ser $w$-compacto mediante la distancia

$$\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X).$$

En este Capítulo vamos a estudiar esta distancia que se va a poder usar para obtener diversas versiones cuantitativas de teoremas clásicos sobre compacidad débil en espacios de Banach. Otras formas de medir lo próximo que está un conjunto de ser $w$-compacto es mediante las medidas de no-compacidad. La siguiente definición aparece en [2].

**Definición 3.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $\mu$ una función con valores reales definida en la familia de subconjuntos acotados no vacíos de $X$. Diremos que $\mu$ es una medida de no-compacidad débil en $X$ si para $A, B \subset X$ acotados y $\lambda \in \mathbb{R}$ cumple:*
(i) *$\mu(A) = 0$ si, y sólo si, $A$ es débilmente relativamente compacto.*
(ii) *Si $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.*
(iii) *$\mu(\overline{\operatorname{conv} A}) = \mu(A)$.*
(iv) *$\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$.*
(v) *$\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.*
(vi) *$\mu(\lambda A) = |\lambda|\mu(A)$.*

En este Capítulo vamos a ver también algunas relaciones entre la distancia que estamos utilizando y algunas medidas de no-compacidad.

## 3.1 Relación con funciones continuas

En esta sección vamos a ver como podemos aplicar resultados del capítulo anterior a espacios de Banach. Esto se consigue gracias a la Proposición 3.2. Dado un subconjunto compacto $K$ de un espacio localmente convexo, denotaremos por $\mathcal{A}(K)$ el espacio de las funciones afines definidas en $K$, y por $\mathcal{A}^C(K)$ al espacio de las funciones afines continuas definidas en $K$. La mayoría de los resultados de esta sección se pueden encontrar en [4].

**Proposición 3.1.** *Sea $K$ un subconjunto compacto convexo de un espacio localmente convexo y sea $f \in \mathcal{A}(K)$ acotada. Entonces*

$$d(f, C(K)) = d(f, \mathcal{A}^C(K)).$$

*Demostración.* Es suficiente ver que $d(f, \mathcal{A}^C(K)) \leq d(f, C(K))$, pero como $d(f, C(K)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f, K)$ basta con ver que $d(f, \mathcal{A}^C(K)) \leq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f, K)$. Sea $\delta > \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f, K)$, definamos al igual que se hace en la prueba del Teorema 1.6

$$f_1(x) = \inf_{U \in \mathcal{U}_x} \sup_{z \in U} f(z) - \delta$$

$$f_2(x) = \sup_{U \in \mathcal{U}_x} \inf_{z \in U} f(z) + \delta$$

donde $\mathcal{U}_x$ es el conjunto de entornos de $x$ en $K$. Tendremos entonces que $f_1$ superiormente semicontinua, $f_2$ es inferiormente semicontinua y $f_1 < f_2$. Veamos que $f_1$ es cóncava (y de forma análoga $f_2$ es convexa). Sea $\eta > 0$, $x, y \in K$ y $0 < \lambda < 1$. Sea $U$ un entorno de $\lambda x + (1-\lambda)y$ tal que

$$\sup_{z \in U} f(z) - \delta \leq f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + \eta. \tag{3.1}$$

Sean $V$ y $W$ entornos de $x$ e $y$ respectivamente, tales que $\lambda V + (1-\lambda)W \subset U$. Como $f$ es afín, para $u \in V$ y $v \in W$ tendremos que

$$\lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) = f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \sup_{z \in U} f(z)$$

y por lo tanto

$$\lambda \sup_{z \in V} f(z) + (1-\lambda) \sup_{z \in W} f(z) - \delta \leq \sup_{z \in U} f(z) - \delta$$

de donde deducimos usando (3.1) que

$$\lambda f_1(x) + (1-\lambda)f_1(x) \leq f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) + \eta.$$

Por lo tanto, como $\eta$ era arbitrario tendremos que $f_1$ es cóncava. Debido que $f_1 < f_2$, por el Teorema 1.9, existe una función afín continua $h$ definida en $K$ tal que

$$f_1(x) < h(x) < f_2(x)$$

para todo $x \in K$. Como para $x \in X$ se cumple que $f_2(x) - \delta \leq f(x)$ y $f_1(x) + \delta \geq f(x)$, tendremos que $h(x) - \delta < f(x) < h(x) + \delta$ y por lo tanto $\|f - h\|_\infty \leq \delta$. Así que $d(f, \mathcal{A}^C(K)) \leq \delta$ para todo $\delta > \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f, K)$, es decir,

$$d(f, \mathcal{A}^C(K)) \leq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f, K).$$

□

**Proposición 3.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $B_{X^*}$ la bola unidad cerrada en su dual $X^*$ con la topología $w^*$. Consideremos $i : X \to X^{**}$ y $j : X^{**} \to \ell^\infty(B_{X^*})$ las inclusiones canónicas. Entonces, para todo $x^{**} \in X^{**}$ tenemos que*

$$d(x^{**}, i(X)) = d(j(x^{**}), C(B_{X^*})).$$

*Demostración.* Viendo $x^{**}$ como una función afín acotada definida en $B_{X^*}$, tendremos por la Proposición 3.1 que para cada $\delta > d(x^{**}, C(B_{X^*}))$ existe una función afín $w^*$-continua $h_1$ definida en $B_{X^*}$ tal que $\|x^{**} - h_1\| \leq \delta$. Definamos $h_2(x^*) = -h_1(-x^*)$ para todo $x^* \in B_{X^*}$. Como $x^{**}$ es lineal tendremos que $\|x^{**} - h_2\| \leq \delta$. Por lo tanto, la función $g = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$ definida en $B_{X^*}$ es afín, $w^*$-continua y $g(0) = 0$. Por lo tanto, $g$ se puede extender a una forma lineal $y^{**}$ definida en todo $X^*$. Ahora bien, como $y^{**}|_{B_{X^*}} = g$ es $w^*$-continua, por el criterio de completitud de Grothendieck (Corolario 5.8) tendremos que $y^{**} = i(x)$ para algún $x \in X$. Finalmente, para cada $x^* \in B_{X^*}$ tendremos que

$$\begin{aligned}\|x^{**}(x^*) - i(x)(x^*)\| &= \|\frac{1}{2}x^{**}(x^*) - \frac{1}{2}h_1(x^*) + \frac{1}{2}x^{**}(x^*) - \frac{1}{2}h_2(x^*)\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x^{**}(x^*) - h_1(x^*)\| + \|x^{**}(x^*) - h_2(x^*)\|) \leq \delta,\end{aligned}$$

así que como esto ocurre para todo $\delta > d(f, C(B_{X^*}))$ podemos afirmar que $d(x^{**}, i(X)) \leq d(j(x^{**}), C(B_{X^*}))$ y como la otra desigualdad es evidente, la prueba queda terminada. □

De esta Proposición se pueden particularizar los resultados que hemos obtenido para $C(K) \subset \mathbb{R}^K$ en espacios de Banach. Consideremos un espacio de Banach $X$ y un conjunto acotado $H \subset X^{**} \subset \mathbb{R}^{B_{X^*}}$. Dotando a $B_{X^*}$ de la topología $w^*$ podremos considerar entonces $X \subset (C(B_{X^*}), \|\cdot\|_\infty)$ donde la inclusión conserva la norma ya que por el Teorema de Hahn-Banach, para todo $x \in X$ se cumple que $\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)|$. Además tendremos que la clausura puntual de $H$ en $\mathbb{R}^{B_{X^*}}$ es precisamente la $w^*$-clausura $\overline{H}^{w^*}$ en $X^{**}$ ya que como $(B_{X^{**}}, w^*)$ es compacto, tendremos que $(X^{**}, w^*)$ es cerrado en $\mathbb{R}^{B_{X^*}}$. Por otro lado tendremos que

$$\hat{d}(H, X) = \sup_{y \in H} \inf_{x \in X} \|y - x\|,$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma canónica en $X^{**}$. En particular tendremos que:

**Corolario 3.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $H \subset X$ acotado. Entonces $H$ es débilmente relativamente compacto en $X$ si, y sólo si,*

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^{B_{X^*}}}, C(B_{X^*})) = 0.$$

Como consecuencia del Corolario 2.9 tendremos:

**Corolario 3.4.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $H$ un subconjunto acotado de $X$.*

(i) *Si $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_{X^*}$, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) \leq \varepsilon$.*

(ii) *Si $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) \leq \varepsilon$, entonces $H$ $2\varepsilon$-intercambia límites con $B_{X^*}$.*

Como consecuencia del Corolario 2.10 tendremos:

**Corolario 3.5.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $H$ un subconjunto acotado de $X$ que $\varepsilon$-intercambia límites con un conjunto $w^*$-denso de $B_{X^*}$, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) \leq 2\varepsilon$.*

El Teorema de Krein nos dice que si $X$ es un espacio de Banach y $H \subset X$ es un subconjunto débilmente relativamente compacto, entonces también lo es su envoltura convexa $\mathrm{conv}(H)$ (véase por ejemplo [15, Theorem 3.58]). Esto es equivalente a decir que si $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) = 0$, entonces $\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{w^*}, X) = 0$. El siguiente resultado es una versión cuantitativa de este teorema.

**Corolario 3.6.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $H$ subconjunto acotado de $X$. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{w^*}, X) \leq 2\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X).$$

*Demostración.* Basta aplicar el Corolario 2.20. $\square$

Si sólo exigimos que $H \subset X^{**}$ sea $w^*$-compacto tendremos el siguiente Corolario.

**Corolario 3.7.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $H \subset X^{**}$ un subconjunto $w^*$-compacto. Entonces*

$$\hat{d}(\overline{\mathrm{conv}(H)}^{w^*}, X) \leq 5\hat{d}(H, X).$$

*Demostración.* Aplicar el Teorema 2.21. □

**Observación 3.8.** *En [19] y en [20] se demuestra que la constante 2 del Corolario 3.6 es óptima. Sin embargo, no se sabe si la constante 5 del Corolario 3.7 es la mejor que se puede poner, pero en [20] se demuestra también que no podemos poner una constante menor que 3. De aquí se puede deducir que también tenemos la constante óptima en el Corolario 2.20 y que en el Teorema 2.21 no podemos poner una constante menor que 3.*

A partir de la noción de $\varepsilon$-intercambio de límites, en [1] se introduce la siguiente función.

**Definición 3.2.** *Sea $A$ un subconjunto acotado de un espacio de Banach $X$. Se define*

$$\gamma(A) = \sup\{\lim_n \lim_m f_n(x_m) - \lim_m \lim_n f_n(x_m)\}$$

*donde el supremo de arriba se toma para todo par de sucesiones $(x_m)_m \subset A$ y $(f_n)_n \subset B_{X^*}$ tales que los límites involucrados existen.*

En otras palabras, $\gamma(A)$ es el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ tales que $A$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_{X^*}$. En [25] se trabaja con $\delta(H) = \gamma(\mathrm{conv}\, H)$ donde se demuestra que es una medida de no-compacidad. Pero de hecho, por el Teorema 2.18 tendremos que $\gamma(\mathrm{conv}\, H) = \gamma(H)$ por lo que $\gamma$ es una medida de no-compacidad. Además, de nuevo por [25] se conocen las siguientes definiciones equivalentes de $\gamma$.

**Proposición 3.9.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $H \subset X$ un subconjunto acotado. Se tiene las siguientes igualdades:*

$$\begin{aligned} \gamma(A) &= \sup\{\hat{d}(x^{**}, \mathrm{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) : (x_n)_n \subset \mathrm{conv}\, A, x^{**} \in \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}^{w^*}\} \\ &= \sup\{\inf\{\|u_1 - u_2\| : (u_1, u_2) \in scc((x_n)_n)\} : (x_n)_n \subset \mathrm{conv}\, A\} \end{aligned}$$

*donde*

$$scc((x_n)_n) = \{(u_1, u_2) : u_1 \in \mathrm{conv}\{x_i\}_{i=1}^{m}, u_2 \in \mathrm{conv}\{x_i\}_{i=m+1}^{\infty}, m \in \mathbb{N}\}.$$

Si reescribimos el Corolario 3.4 en términos de $\gamma$, tendremos que $\gamma$ y $\hat{d}(\overline{\cdot}^{w^*}, X)$ son equivalentes:

**Corolario 3.10.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $H \subset X$ un subconjunto acotado. Entonces*

$$\frac{1}{2}\gamma(H) \leq \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) \leq \gamma(H).$$

## 3.2 Algunos casos particulares

En esta sección vamos a estudiar ciertas propiedad que al exigirlas a un espacio de Banach nos permiten asegurar que las dos distancias involucradas en el Corolario 3.6 son iguales. Vamos a ver que esto ocurre en el caso de que el dual no contenga una copia de $\ell^1$ y en el caso de que $X$ cumpla cierta propiedad que llamaremos $J$. Recordemos primero la definición de espacio angélico.

**Definición 3.3.** *Se dice que un espacio topológico $X$ es angélico si para todo conjunto relativamente numerablemente compacto $A \subset X$ se tiene que:*
(i) *$A$ es relativamente compacto en $X$.*
(ii) *Para cada $x \in \overline{A}$ existe una sucesión en $A$ que converge a $x$.*

La siguiente definición es introducida en [19].

**Definición 3.4.** *Se dice que un espacio de Banach tiene la propiedad $J$ (brevemente $X \in J$) si para cada $z \in B_{X^{**}} \backslash X$ y para todo $0 < b < d(z, X)$, existe una sucesión $\{x_n^*\}_n \subset \{u \in B_{X^*} : z(u) \geq b\}$ que converge a 0 en la topología $w^*$.*

**Proposición 3.11.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $(B_{X^*}, w^*)$ es angélico. Entonces $X \in J$.*

*Demostración.* Veamos primero que si $z \in B_{X^{**}} \backslash X$ y $0 < b < d(z, X)$, entonces $0 \in \overline{A}^{w^*}$, donde $A = \{u \in B_{X^*} : z(u) \geq b\}$. Para ello tenemos que ver que la intersección de $A$ con cualquier $w^*$-entorno de 0 es no vacía. Sea $\varepsilon > 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X^*$ y consideremos el $w^*$-entorno del origen

$$V(0, x_1, x_2, \ldots, x_n; \varepsilon) := \{y^* \in X^* : \sup_{i=1,\ldots,n} |y^*(x_i)| < \varepsilon\}.$$

Por el Teorema de Hahn-Banach, podremos tomar un $\phi \in X^{***}$ tal que $\phi \in X^{\perp}$, $\|\phi\| = 1$ y $\phi(z) = d(z, X)$. Tomemos $\varepsilon$ tal que $b + \varepsilon < d(z, X)$. Como $B_{X^*}$ es denso en $(B_{X^{***}}, w^*)$, tendremos que existe un $x^* \in B_{X^*}$ tal que

$$|x^*(x_i)| = |x^*(x_i) - \phi(x_i)| < \varepsilon, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n,$$

y

$$|z(x^*) - \phi(z)| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Tendremos así que $x^* \in V(0, x_1, x_2, \ldots, x_n; \varepsilon)$ y además, por la desigualdad (3.2) tendremos que

$$\begin{aligned} |z(x^*)| &= |(z(x^*) - \phi(z) + \phi(z)| \geq | \, |z(x^*) - \phi(z)| - |\phi(z)| \, | \\ &= |\phi(z)| - |z(x^*) - \phi(z)| > b + \varepsilon - \varepsilon = b \end{aligned}$$

y por lo tanto, $x^* \in A$ con lo que podremos concluir que $0 \in \overline{A}^{w^*}$. Ahora bien, como $(B_{X^*}, w^*)$ es angélico tendremos que existe una sucesión $(x_m^*)_m \subset A$ que converge a 0 en $(B_{X^*}, w^*)$ y por lo tanto $X \in J$. $\square$

Gracias a la Proposición 3.11 tendremos que el siguiente resultado es una generalización de [16, Proposition 14].

**Proposición 3.12.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $H$ un subconjunto acotado y $\varepsilon > 0$. Tendremos que:*

(i) *Si $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) \leq \varepsilon$, entonces $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con toda sucesión $(x_n^*)_n$ de $B_{X^*}$ que $w^*$-converja a 0, es decir, si $(x_m)_m$ es una sucesión de $H$, entonces*

$$|\lim_n \lim_m x_n^*(x_m) - \lim_m \lim_n x_n^*(x_m)| \leq \varepsilon$$

*siempre que los límites involucrados existan.*

(ii) *Si $X \in J$ y $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con toda sucesión $(x_n^*)_n \subset B_{X^*}$ que $w^*$-converja a 0, entonces $\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) \leq \varepsilon$.*

*Demostración.* Veamos primero (i). Sea $(x_m)_m \subset H$ y sea $(x_n^*)_n \subset B_{X^*}$ tal que $w^*\text{-}\lim x_n^* = 0$ y supongamos que ambos límites iterados existen. Tomemos $z \in \overline{H}^{w^*}$ un $w^*$-punto de aglomeración de $(x_n)_n$ y fijemos $\delta > 0$. Tendremos entonces que existe $x \in X$ tal que $\|z - x\| \leq \varepsilon + \delta$ y que

$$\lim_n \lim_m x_n^*(x_m) = \lim_n x_n^*(z) \text{ y } \lim_m \lim_n x_n^*(x_m) = \lim_m 0 = 0$$

y por lo tanto

$$\rho := |\lim_n \lim_m x_n^*(x_m) - \lim_m \lim_n x_n^*(x_m)| = |\lim_n x_n^*(z)|$$

de donde podemos deducir que

$$\rho \leq |\lim_n x_n^*(z - x)| + |\lim_n x_n^*(x)| \leq \varepsilon + \delta$$

y como esto se cumple para todo $\delta > 0$ queda demostrado el $\varepsilon$-intercambio de límites.

Veamos ahora (ii). Realizando una homotecia sobre $H$ podemos suponer que $H \subset B_X$. Sea $z \in \overline{H}^{w^*} \backslash X$ y sea $0 < b < d(z, X)$. Tendremos entonces que $z \in B_{X^{**}} \backslash X$ y teniendo en cuenta que $X \in J$ tendremos que existe una sucesión $(x_n^*)_n \subset A := \{u \in B_{X^*} : z(u) \geq b\}$ convergente hacia 0 en la topología $w^*$, y como $A$ es acotado, también podemos suponer que $\lim_n x_n^*(z)$

existe. Para cada $m$, tomemos $x_m \in H$ que tal que para $n \in \{1, 2, \dots, m\}$, se cumpla que $|x_n^*(x_m) - x_n^*(z)| \leq 1/m$. En tal caso, $\lim_m x_n^*(x_m) = x_n^*(z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tendremos entonces que

$$\begin{aligned} \lim_m \lim_n x_n^*(x_m) &= 0 \\ \lim_n \lim_m x_n^*(x_m) &= \lim_n x_n^*(z) \geq b \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$b \leq |\lim_m \lim_n x_n^*(x_m) - \lim_n \lim_m x_n^*(x_m)| \leq \varepsilon$$

y esto se da para todo $0 < b < d(z, X)$ por lo que tendremos que $d(z, X) \leq \varepsilon$. $\square$

El siguiente resultado se puede encontrar en [19, Theorem 3] generalizado para $H \subset X^{**}$ $w^*$-compacto pero con una demostración que utiliza técnicas muy diferentes a las desarrolladas aquí. La prueba que usamos aquí es una adaptación de la prueba dada en [16, Theorem 2] donde la demostración se hace para el caso particular de que $(B_{X^*}, w^*)$ sea angélico.

**Teorema 3.13.** *Sea $X$ un espacio de Banach que tiene la propiedad $J$ y sea $H \subset X$ un conjunto acotado. Tendremos entonces que*

$$\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) = \hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, X).$$

*Demostración.* Está claro que el término de la derecha debe de ser mayor o igual al de la izquierda. Veamos la otra desigualdad. Sea $\varepsilon = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X)$. Por la Proposición 3.12 tendremos que $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con toda sucesión $(x_n^*)_n \subset B_{X^*}$ que $w^*$-converja a 0. Si nos fijamos en la demostración del Teorema 2.18 podemos observar que si $\operatorname{conv}(H)$ no $\varepsilon$-intercambia límites con una sucesión $(y_n^*)_n$ del espacio dual, entonces existe una subsucesión de $(y_n^*)_n$ con la que $H$ no $\varepsilon$-intercambia límites. De aquí deducimos inmediatamente que $\operatorname{conv}(H)$ $\varepsilon$-intercambia límites con toda sucesión $(x_n^*)_n \subset B_{X^*}$ que $w^*$-converja a 0 y por lo tanto, de nuevo por la Proposición 3.12 podremos afirmar que $\hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, X) \leq \varepsilon$. $\square$

El siguiente resultado aparece en [16].

**Teorema 3.14.** *Sea $X$ un espacio de Banach tal que $X^*$ no contiene una copia de $\ell^1$. Tendremos entonces que*

$$\hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X) = \hat{d}(\overline{\operatorname{conv}(H)}^{w^*}, X).$$

*Demostración.* Sea $\varepsilon = \hat{d}(\overline{H}^{w^*}, X)$ y tomemos $C := \overline{\mathrm{conv}(H)}^{w^*}$. Tenemos que probar que $C$ está contenido en A:=$\{x^{**} \in X^{**} : d(x^{**}, X) \leq \varepsilon\}$. $C$ es un subconjunto $w^*$-compacto convexo de $X^{**}$ y por lo tanto, gracias a que $\ell^1 \not\subseteq X^*$ (véase por ejemplo [10, p.215]), tendremos que

$$C = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}\, C)}^{\|\cdot\|}.$$

Por el Teorema de Milman tendremos que $\mathrm{ext}\, C \subset \overline{M}^{w^*} \subset A$. Ahora bien, como $A$ es $\|\cdot\|$-cerrado y convexo, $C = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}\, C)}^{\|\cdot\|} \subset A$ con lo que termina la prueba. $\square$

## 3.3 Operadores adjuntos

Un teorema de Gantmacher dice que un operador es débilmente compacto si, y sólo si, su adjunto lo es. Varios autores han estudiado si era posible dar una versión cuantitativa de este resultado en términos de la medida de no-compacidad débil introducida por De Blasi (véase [7]), pero en [1] se demuestra que esto no es posible. En esta sección vamos a obtener versiones cuantitativas de este resultado en términos de $\gamma$ y $\hat{d}$. Veamos primero la medida de De Blasi.

**Definición 3.5.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $H \subset X$ un subconjunto acotado. Se define la medida de De Blasi de $H$ como*

$$w(H) = \inf\{\varepsilon > 0 : H \subset K + \varepsilon B_X \text{ y } K \subset X \text{ es } w\text{-compacto}\}.$$

El siguiente teorema nos va a decir que es imposible obtener una versión cuantitativa del Teorema de Gantmacher en términos de $w$.

**Teorema 3.15 ([1, Theorem 4]).** *Existe un espacio de Banach separable $X$ y una sucesión $(T_n)_n$ en $L(X, c_0)$ tal que*

$$w(T_n^*(B_{\ell^1})) = 1 \qquad y \qquad w(T_n(B_X)) \leq \frac{1}{n}.$$

Sin embargo, en esta sección vamos a obtener versiones cuantitativas del Teorema de Gantmacher en términos de $\hat{d}$ y $\gamma$. En particular, como corolario del Teorema 3.15 tendremos que $w$ no es equivalente a $\gamma$ (y por lo tanto tampoco a $\hat{d}(\overline{\cdot}^{w^*}, X)$). De hecho lo que obtendremos es lo siguiente:

**Corolario 3.16.** *Existe un espacio de Banach separable $X$ y una sucesión de conjuntos acotados $H_n \subset X^*$ tales que*

$$w(H_n) = 1 \qquad y \qquad \gamma(H_n) \leq \frac{1}{n}.$$

De hecho, el espacio separable de este corolario es el mismo que el del Teorema 3.15. En otras palabras, para $X^*$ no existe ninguna constante $M > 0$ tal que $w \leq M\gamma$. Sin embargo se cumple que en general que $\gamma \leq 2w$ ya que para una medida de no-compacidad débil $\delta$ siempre se tiene la relación $\delta \leq \delta(B_X)w$ y claramente $\delta(B_X) \leq 2$. Además, también se tiene la desigualdad $d(\overline{\cdot}^{w^*}, X) \leq w$.

La siguiente proposición es una generalización del Teorema de Gantmacher en términos de $\gamma$.

**Proposición 3.17.** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador y $T^* : Y^* \to X^*$ su operador adjunto. Entonces*

$$\gamma(T(B_X)) \leq \gamma(T^*(B_{Y^*})) \leq 2\gamma(T(B_X)).$$

*Demostración.* Sea $\varepsilon = \gamma(T^*(B_{Y^*}))$. Por definición tendremos entonces que $T^*(B_{Y^*})$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_{X^{**}}$ y como $B_X \subset B_{X^{**}}$ tendremos que $T^*(B_{Y^*})$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_X$. Veamos que $T(B_X)$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_{Y^*}$. Sean $T(x_n)_n \subset T(B_X)$ y $(y_m^*)_m \subset B_{Y^*}$ sucesiones tales que existan los siguientes límites

$$\lim_n \lim_m \langle T(x_n), y_m^* \rangle \qquad \lim_m \lim_n \langle T(x_n), y_m^* \rangle.$$

Por otro lado $\langle T(x_n), y_m^* \rangle = \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle$ ya que $T^*$ es el operador adjunto de $T$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_n \lim_m \langle T(x_n), y_m^* \rangle &= \lim_n \lim_m \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle \\ \lim_m \lim_n \langle T(x_n), y_m^* \rangle &= \lim_m \lim_n \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle \end{aligned}$$

y como $B_X$ y $T^*(B_{Y^*})$ $\varepsilon$-intercambian límites tendremos que

$$|\lim_n \lim_m \langle T(x_n), y_m^* \rangle - \lim_m \lim_n \langle T(x_n), y_m^* \rangle| \leq \varepsilon$$

con lo que queda demostrado que $T(B_X)$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_{Y^*}$ por lo que $\gamma(T(B_X)) \leq \varepsilon$.

Veamos ahora la segunda desigualdad. Sea $\varepsilon = \gamma(T(B_X))$. Por definición $T(B_X)$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_{Y^*}$. Veamos que $T^*(B_{Y^*})$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_X$. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en $B_X$ y sea $T^*((y_m^*)_m)$ una sucesión en $T^*(B_{Y^*})$ tales que los siguientes límites existan

$$\lim_n \lim_m \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle \qquad \lim_m \lim_n \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle.$$

Tendremos por otro lado que $\langle T(x_n), y_m^* \rangle = \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_n \lim_m \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle &= \lim_n \lim_m \langle T(x_n), y_m^* \rangle \\ \lim_m \lim_n \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle &= \lim_m \lim_n \langle T(x_n), y_m^* \rangle \end{aligned}$$

y como $T(B_X)$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_{Y^*}$ entonces

$$|\lim_n \lim_m \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle - \lim_m \lim_n \langle x_n, T^*(y_m^*) \rangle| \leq \varepsilon,$$

así que $T^*(B_{Y^*})$ $\varepsilon$-intercambia límites con $B_X$ y como $B_X$ es $w^*$-denso en $B_{X^{**}}$, aplicando el Corolario 2.6 tendremos que $\gamma(T^*(B_{Y^*})) \leq 2\varepsilon$. □

Como $\gamma$ y $\hat{d}(\overline{\cdot}^{w^*}, X)$ son equivalentes de forma inmediata tendremos que también podemos dar una versión cuantitativa del Teorema de Gantmacher en términos de $\hat{d}$.

**Corolario 3.18.** *Sean $X$ e $Y$ espacios de Banach, $T : X \to Y$ un operador y $T^* : Y^* \to X^*$ su operador adjunto. Entonces*

$$\frac{1}{2}\hat{d}(\overline{T(B_X)}^{w^*}, Y) \leq \hat{d}(\overline{T^*(B_{Y^*})}^{w^*}, X^*) \leq 4\hat{d}(\overline{T(B_X)}^{w^*}, Y).$$

*Demostración.* Basta aplicar la Proposición 3.17 y el Corolario 3.10. □

# Capítulo 4

# Aproximación por sucesiones

En esta sección vamos a estudiar algunos casos en los que podremos hablar de aproximación por sucesiones. Los resultados principales de esta sección son el Teorema 4.2 y el Teorema 4.7. El Teorema 4.2 nos va a decir que el $\varepsilon$-intercambio de límites implica la $\varepsilon$-aproximación por sucesiones en espacios $C(X)$. Este Teorema, para $\varepsilon = 0$ nos va a dar como Corolario la angelicidad en espacios $C(K)$ con $K$ compacto. Además se sabe que $C(X)$ es angélico cuando $X$ es numerablemente $K$-determinado (véase [28]) por lo que la clausura de conjuntos numerablemente compactos se puede alcanzar por sucesiones. Esta aproximación por sucesiones es cuantificada en el Teorema 4.7 que nos va a dar como corolario la angelicidad de estos espacios.

**Lema 4.1.** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico compacto y sea $X$ un conjunto. Dadas $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Z^X$ y $\delta > 0$, existe un subconjunto finito $L \subset X$ tal que para cada $x \in X$ existe $y \in L$ tal que*

$$d(f_k(y), f_k(x)) < \delta$$

*para todo $1 \leq k \leq n$.*

*Demostración.* Consideremos en $Z^n$ la métrica dada por

$$d_\infty((x_k), (y_k)) := \sup_{1 \leq k \leq n} d(x_k, y_k)$$

donde $(x_k), (y_k) \in Z^n$. Tendremos entonces que esta métrica induce la topología producto en $Z^n$. Sea $B := \{(f_1(x), \ldots, f_n(x)) : x \in X\}$, entonces la familia $\{B_\infty((f_1(x), \ldots, f_n(x)); \delta) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto del conjunto compacto $\overline{B}^{Z^n}$. Por lo tanto existe un conjunto finito $L \subset X$ tal que

$$B \subset \bigcup_{y \in L} B_\infty((f_1(y), \ldots, f_n(y)); \delta).$$

Claramente este conjunto $L$ cumple lo deseado. □

**Teorema 4.2 ([4, Proposition 5.2]).** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico compacto, $X$ un conjunto y $H$ un subconjunto de $Z^X$ que $\varepsilon$-intercambia límites con $X$. Entonces dado $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe una sucesión $(f_n)_n \subset H$ tal que*

$$\sup_{x \in K} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

*para todo punto de aglomeración $g$ de $(f_n)_n$ en $Z^X$.*

*Demostración.* Definamos $f_1 := f$. Aplicando el Lema 4.1 obtenemos que existe un conjunto finito $L_1 \subset X$ tal que

$$\min_{y \in L_1} d(f_1(x), f_1(y)) < 1$$

para cada $x \in X$. Supongamos que hemos elegido funciones $f_1, \ldots, f_n \in H$ y subconjuntos $L_1, \ldots, L_n$ de $X$ tales que

$$d(f_m(y), f_1(y)) < \frac{1}{m} \text{ para todo } 1 \leq m \leq n \text{ y para todo } y \in \bigcup_{k=1}^{m} L_k$$

y

$$\min_{y \in L_m} \max_{k \leq m} \{d(f_k(x), f_k(y))\} < \frac{1}{m} \text{ para todo } 1 \leq m \leq n \text{ y para todo } x \in X.$$

Como $f_1 \in \overline{H}^{Z^X}$ existe $f_{n+1} \in H$ tal que

$$d(f_{n+1}(y), f_1(y)) < \frac{1}{n+1} \text{ para todo } y \in \bigcup_{k=1}^{n} L_k.$$

Por otro lado, aplicando el Lema 4.1 a $f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ y $\delta = \frac{1}{n+1}$ tendremos que existe $L_{n+1}$ tal que

$$\min_{y \in L_{n+1}} \max_{k \leq n+1} \{d(f_k(x), f_k(y))\} < \frac{1}{n+1} \text{ para todo } x \in X.$$

Sea ahora $D := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$. Sea $x \in X$ fijo, entonces podemos construir una sucesión $(y_n)_n$ en $D$ tal que $\max_{k \leq n} \{d(f_k(x), f_k(y_n))\} < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Tendremos entonces que

$$\lim_{n \to \infty} f_k(y_n) = f_k(x) \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Tomemos un punto punto de aglomeración $g$ de $(f_k)_k$ en $Z^X$ y una subsucesión $(f_{k_j})_j$ tal que en el punto fijo $x$ se cumpla que $\lim_j f_{k_j}(x) = g(x)$. Tendremos entonces que

$$\lim_j \lim_n f_{k_j}(y_n) = \lim_j f_{k_j}(x) = g(x).$$

Por otro lado, como para todo $y \in D$ se cumple que $\lim_k f_k(y) = f_1(y)$ tendremos que

$$\lim_n \lim_j f_{k_j}(y_n) = \lim_n f_1(y_n) = f_1(x) = f(x).$$

Como $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con $X$ tendremos que

$$d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

y esto ocurre para todo $x \in X$ con lo que termina la prueba. $\square$

**Corolario 4.3.** *Sea $(Z, d)$ un espacio métrico compacto, $X$ un conjunto y $H$ un subconjunto de $Z^X$ que intercambia límites con $X$. Entonces para cualquier $f \in \overline{H}^{Z^X}$ existe una sucesión $(f_n)_n \subset H$ tal que*

$$\lim_n f_n(x) = f(x)$$

*para todo $x \in X$.*

*Demostración.* Dado $f \in \overline{H}^{Z^X}$, por el Teorema 4.2 tendremos que existe una sucesión $(f_n)_n \subset H$ tal que todo punto de aglomeración $g$ de $(f_n)_n$ en $Z^X$ cumple que $g = f$. Teniendo en cuenta que $Z^X$ es compacto podemos concluir que $(f_n)_n$ converge hacia su único punto de aglomeración $f$ en $Z^X$. $\square$

**Corolario 4.4.** *Si $K$ es un espacio topológico compacto, entonces $(C(K), \tau_p)$ es angélico.*

*Demostración.* Tomemos $H \subset C(K)$ un conjunto relativamente numerablemente compacto en $C(K)$. Por el Corolario 2.8 tendremos que $H$ es relativamente compacto. Sea ahora $f \in \overline{H}$. Por el Corolario 4.3 tendremos que existe una sucesión en $H$ convergente a $f$. Por lo tanto $(C(K), \tau_p)$ es angélico. $\square$

**Definición 4.1.** *Sea $X$ un espacio topológico, $(Z, d)$ un espacio métrico y $\varepsilon \geq 0$ fijo. Diremos que un conjunto $H \subset C(X, Z)$ es $\varepsilon$-relativamente numerablemente compacto (en $C(X, Z)$) si toda sucesión $(f_n)_n$ en $H$ tiene un punto de aglomeración $f \in Z^X$ tal que*

$$\operatorname{osc}(f) := \sup\{\operatorname{osc}(f, x) : x \in X\} \leq \varepsilon.$$

*Cuando $\varepsilon = 0$ este concepto coincide con el de relativamente numerablemente compacto en $C(X, Z)$.*

**Proposición 4.5.** *Sea $X$ un espacio topológico, $(Z,d)$ un espacio métrico y $\varepsilon \geq 0$ fijo. Si $H \subset C(X,Z)$ es $\varepsilon$-relativamente numerablemente compacto, entonces $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con todo subconjunto relativamente numerablemente compacto de $X$.*

*Demostración.* Sea $(f_n)_n$ una sucesión en $H$ y fijemos $f \in Z^X$ un punto de aglomeración de $(f_n)_n$ con $\operatorname{osc}(f) \leq \varepsilon$, sea $(x_m)_m$ una sucesión en $X$ que tiene un punto de aglomeración $x$ en $X$ y supongamos que los siguientes límites existen

$$\ell := \lim_n \lim_m f_n(x_m) \quad L := \lim_m \lim_n f_n(x_m).$$

Tendremos claramente que $\ell = f(x)$ y $L = \lim f(x_m)$. Tomemos $x \in X$, como $\operatorname{osc}(f) \leq \varepsilon$ existe un entorno $U$ de $x$ en $X$ tal que $d(f(y), f(x)) \leq \varepsilon$ para todo $y \in U$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $x_m \in U$ y entonces $d(f(x_m), f(x)) \leq \varepsilon$. De aquí tendremos que

$$d(f(x), \lim f(x_m)) \leq \varepsilon.$$

□

A continuación, combinando la prueba del Teorema 4.2 y la prueba de [28, Theorem 1] vamos a obtener el Lema 4.6 que es una generalización del Teorema 4.2. En este Lema, $X$ será un conjunto, $\Sigma$ será un subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $S$ será el subconjunto del conjunto de sucesiones finitas definido por

$$S = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \text{ existe } \alpha = (a_m)_m \in \Sigma, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sea $\{A_\alpha : \alpha \in \Sigma\}$ una familia de subconjuntos no vacíos de $X$ que cubren $X$. Para $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$ definimos

$$C_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \bigcup_{\beta \in S(a)} A_\beta$$

donde $S(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \{\beta \in \Sigma : \beta = (b_m)_m, b_j = a_j \text{ para } j = 1, 2, \ldots n\}$.

**Definición 4.2.** *Sea $X$ un conjunto, $(x_n)_n$ una sucesión en $X$ y $(A_n)_n$ una sucesión de subconjuntos de $X$ tales que $X \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$. Diremos que la sucesión $(x_n)_n$ está eventualmente en $(A_n)_n$ si para cualquier $N \in \mathbb{N}$ existe un $n_N$ tal que $x_n \in A_N$ si $n \geq n_N$.*

**Lema 4.6.** *Sea $(Z,d)$ un espacio métrico compacto y sea $H \subset Z^X$. Supongamos que para cada $\alpha = (a_m)_m \in \Sigma$ y para cada sucesión $(x_n)_n \in X$ que* *está eventualmente en $(C_{a_1,a_2,\ldots,a_n})_n$, $H\varepsilon$-intercambia límites con la sucesión $(x_n)_n$. Entonces, para cada $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe una sucesión $(f_n)_n \subset H$ tal que*

$$\sup_{x\in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

*para cualquier punto de aglomeración $g$ de $(f_n)_n$ en $Z^X$.*

*Demostración.* Definamos $f_1 := f$. Como $S$ es numerable, existe una biyección $\varphi : \mathbb{N} \to S$. Definamos $D_n := C_{\varphi(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 4.1 existe un subconjunto finito $L_1 \subset D_1$ tal que

$$\min_{y\in L_1}\{d(f_1(x), f_1(y))\} < 1 \text{ para cada } x \in D_1.$$

Como $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe $f_2 \in H$ tal que

$$d(f_2(y), f_1(y)) < \frac{1}{2} \text{ para cada } x \in L_1.$$

Procediendo por recurrencia, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar subconjuntos finitos $L_n \subset D_n$ y funciones $f_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ tales que

$$\min_{y\in L_n}\max_{k\leq n}\{d(f_k(x), f_k(y))\} < \frac{1}{n} \text{ para cada } x \in D_n \tag{4.1}$$

y

$$d(f_{n+1}(y), f(y)) < \frac{1}{n+1} \text{ para cada } y \in \bigcup_{j\leq n} L_j.$$

Entonces, la sucesión $(f_n)_n$ elegida satisface

$$\lim_n f_n(y) = f(y) \text{ para cada } y \in D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n. \tag{4.2}$$

Fijemos $x \in X$. Elijamos $\alpha \in \Sigma$, $\alpha = (a_m)_m$, tal que $x \in A_\alpha$. Tomemos

$$P = \varphi^{-1}(\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathbb{N}.$$

$P$ es un subconjunto infinito porque $\varphi$ es una biyección. El punto $x$ pertenece a cada $D_p$ para todo $p \in P$, y por lo tanto, dado $p \in P$, por (4.1) existe $y_p \in L_p \subset D_p$ tal que

$$d(f_k(x), f_k(y_p)) < \frac{1}{p} \text{ para todo } k \leq p. \tag{4.3}$$

La sucesión $(y_p)_{p\in P}$ está eventualmente en $(C_{a_1,a_2,\ldots,a_n})_n$. Efectivamente, sea $m \in \mathbb{N}$ y $p_j = \varphi^{-1}((a_1, a_2, \ldots, a_j))$ para $j = 1, 2, \ldots, m$. Si $p \in P$ y $p \neq p_j$, para $j = 1, 2, \ldots, m$, entonces $y_p \in D_p = C_{a_1,a_2,\ldots,a_{m_0}}$ con $m_0 > m$. Como $m_0 > m$, entonces $y_p \in C_{a_1,a_2,\ldots,a_{m_0}} \subset C_{a_1,a_2,\ldots,a_m}$.

Fijemos ahora un punto de aglomeración $g$ de $(f_n)_n$ en $Z^X$. Elijamos una subsucesión $(f_{n_k})_k$ tal que en el punto fijo $x$ tengamos que $\lim_k f_{n_k}(x) = g(x)$. Como $P$ es infinito, existe una sucesión estrictamente creciente $(p_j)_j \in P$. Por (4.3), $\lim_j f_k(y_{p_j}) = f_k(x)$ para $k \in \mathbb{N}$. Por un lado tendremos que

$$g(x) = \lim_k f_{n_k}(x) = \lim_k \lim_j f_{n_k}(y_{p_j})$$

y por el otro, por (4.2) tendremos que

$$f(x) = f_1(x) = \lim_j f_1(y_{p_j}) = \lim_j f(y_{p_j}) = \lim_j \lim_k f_{n_k}(y_{p_j}).$$

Finalmente, usando que la sucesión $(y_p)_p$ está eventualmente en $(C_{a_1,a_2,\ldots,a_n})_n$, obtenemos que

$$d(g(x), f(x)) = d(\lim_k \lim_j f_{n_k}(y_{p_j}), \lim_j \lim_k f_{n_k}(y_{p_j})) \leq \varepsilon.$$

$\square$

Recordemos ahora antes de continuar un par de definiciones.

**Definición 4.3.** *Sean $X$ e $Y$ dos espacios topológicos. Diremos que una aplicación $F : X \to 2^Y$ multivaluada es superiormente semicontinua si para cada $x \in X$ y todo abierto $U$ de $Y$ tal que $T(x) \subset U$ existe un entorno $V$ de $x$ en $X$ tal que $F(V) \subset U$, donde por $F(V)$ denotamos a $\cup\{F(z) : z \in V\}$.*

**Definición 4.4.** *Un espacio topológico $(T, \tau)$ se dice que es numerablemente $K$-determinado si existe una aplicación multivaluada superiormente semicontinua $F : M \to 2^T$ para algún espacio métrico separable $M$ tal que $F(M) = T$ y $F(m)$ es compacto para cada $m \in M$.*

Tendremos por ejemplo que los espacios $\sigma$-compactos son numerablemente $K$-determinados, y también los espacios $K$-analíticos (véase [33]). Dentro de los espacios de Banach, los espacios separables también son numerablemente $K$-determinados, y más generalmente, todo espacio de Banach débilmente compactamente generado es numerablemente $K$-determinado.

Si tenemos un espacio numerablemente $K$-determinado $X$, como todo espacio métrico separable es imagen continua de un subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tendremos que existe una aplicación superiormente semicontinua $T : \Sigma \to 2^X$

para algún subconjunto $\Sigma \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que $T(\alpha)$ es compacto para cada $\alpha \in \Sigma$ y la familia $\{T(\alpha) : \alpha \in \Sigma\}$ cubre $X$.

Vamos a poner a este conjunto en las situaciones del lema anterior. Tomemos $A_\alpha = T(\alpha)$ para cada $\alpha \in \Sigma$, fijemos $\alpha = (a_m)_m \in \Sigma$ y sea $(x_n)_n \in X$ una sucesión que está eventualmente en $(C_{a_1,a_2,\ldots,a_n})_n$. Veamos que en esta situación $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto. Sea $\{U_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos de $X$ que cubre $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup T(\alpha)$. Entonces existe $U_1, U_2, \ldots, U_p \in \{U_i : i \in I\}$ tal que $T(\alpha) \subset U = \cup_{i=1}^{p} U_i$. Como $T$ es superiormente semicontinua, existe $n_0$ tal que si $n > n_0$ entonces $C_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \subset U$. Como $(x_n)_n$ tiene una cola en cada conjunto $C_{a_1,a_2,\ldots,a_n}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para cada $n > m$. Sea $U_{p+1}, \ldots, U_{p+m}$ en $\{U_i : i \in I\}$ tal que $x_i \in U_{p+i}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Entonces $U_1, U_2, \ldots, U_{p+m}$ cubre $K$ y por lo tanto $K$ es compacto con lo que demostrábamos lo que queríamos. Por lo tanto, podemos obtener como Corolario lo siguiente:

**Teorema 4.7.** *Sea $X$ un espacio numerablemente $K$-determinado, $(Z, d)$ un espacio métrico compacto y $H \subset C(X, Z)$ un subconjunto $\varepsilon$-relativamente numerablemente compacto. Entonces para cada $f \in \overline{H}^{Z^X}$, existe una sucesión $(f_n)_n \subset H$ tal que*

$$\sup_{x \in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon \tag{4.4}$$

*para cada punto de aglomeración $g$ de $(f_n)$ en $Z^X$.*

*Demostración.* Para demostrar esto, por el Lema 4.6 basta con ver que en las condiciones del comentario anterior a este Teorema, $H$ $\varepsilon$-intercambia límites con la sucesión $(x_n)_n$, pero esto es cierto por la Proposición 4.5 ya que tenemos que $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es compacto. $\square$

**Corolario 4.8.** *En las condiciones del Teorema anterior tendremos que para todo $f \in \overline{H}^{Z^X}$ se cumple que* $\operatorname{osc}(f) \leq 3\varepsilon$. *En particular tendremos que dada una sucesión $(g_n)_n \subset H$, todos sus puntos de aglomeración $g$ cumplen que* $\operatorname{osc}(g) \leq 3\varepsilon$.

*Demostración.* Sea $f \in \overline{H}^{Z^X}$. Entonces, por el Teorema 4.7 tendremos que existe una sucesión $(f_n)_n \subset H$ tal que

$$\sup_{x \in X} d(g(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

para cada punto de aglomeración $g$ de $(f_n)$ en $Z^X$. Por otro lado, debido a que $H$ es $\varepsilon$-relativamente numerablemente compacto tendremos que $(f_n)_n$ tiene un punto de aglomeración $h \in Z^X$ tal que $\operatorname{osc}(h) \leq \varepsilon$ y de aquí se deduce directamente que $\operatorname{osc}(f) \leq 3\varepsilon$. $\square$

**Corolario 4.9.** *Sea $X$ un espacio numerablemente $K$-determinado y sea $H \subset C^*(X)$ uniformemente acotado y $\varepsilon$-relativamente numerablemente compacto. Entonces tendremos que*

$$\hat{d}(\overline{H}^{\mathbb{R}^X}, C^*(X)) \leq \frac{3\varepsilon}{2}.$$

*Demostración.* Basta aplicar el Corolario anterior y el Teorema 1.6. □

**Corolario 4.10.** *Si $X$ un espacio numerablemente $K$-determinado, entonces $(C(X), \tau_p)$ es angélico.*

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 4.7 y el Corolario 4.8 para $\varepsilon = 0$. □

# Parte II

# Teorema de James

# Capítulo 5

# Preliminares de análisis funcional

## 5.1 Topologías compatibles con pares duales

En esta sección vamos a ver las relaciones que existen entre las distintas topologías definidas sobre un espacio vectorial que tiene asociado el mismo espacio dual. Recordamos que para un espacio localmente convexo $E$ denotamos por $E^*$ su dual algebraico (es decir, el conjunto de aplicaciones lineales de $E$ en $\mathbb{R}$) y por $E'$ denotamos a dual topológico (es decir, el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de $E$ en $\mathbb{R}$).

**Definición 5.1.** *Un par dual $\langle F, G\rangle$ son dos espacios vectoriales $F$ y $G$ y una aplicación bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times G \to \mathbb{R}$ satisfaciendo:*
(i) *Si $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $x \in F$, entonces $y = 0$.*
(ii) *Si $\langle x, y\rangle = 0$ para cada $y \in G$, entonces $x = 0$.*

Si $X$ es un espacio de Banach con dual topológico $X^*$ tendremos que $\langle X, X^*\rangle$ es un par dual junto con la aplicación bilineal $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$ para cada $(x, x^*) \in X \times X^*$. Análogamente, si $E$ es un espacio topológico localmente convexo con dual $E'$ tendremos que $\langle E, E'\rangle$ es un par dual.

**Definición 5.2.** *Sea $\langle F, G\rangle$ un par dual y sea $A$ un subconjunto de $F$. Llamaremos polar (absoluta) de $A$ al subconjunto de $G$ dado por*

$$A^\circ = \{y \in G : |\langle x, y\rangle| \leq 1 \text{ para todo } x \in A\}.$$

**Definición 5.3.** *Sea $E$ un espacio vectorial y $F$ un subespacio de $E^*$ que separa puntos de $E$. Se dice que una familia $\mathcal{G}$ de conjuntos $\sigma(F, E)$-acotados en $F$ es saturada si $\mathcal{G}$ es cerrada respecto a tomar múltiplos escalares y clausuras*

*$\sigma(F, E)$-cerradas absolutamente convexas de sus elementos y además, para todo $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ existe $G_3 \in \mathcal{G}$ tal que $G_1 \cup G_2 \subset G_3$.*

**Definición 5.4.** *Sea $\mathcal{G}$ una familia saturada tal que $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ separa puntos de $E$. Se define la topología $\tau_{\mathcal{G}}$ en $E$ como la topología de convergencia uniforme sobre $\mathcal{G}$, es decir, la generada por la base local de entornos del origen $\{U(G, \varepsilon) : G \in \mathcal{G}\}$ donde $U(G, \varepsilon) = \{y \in E : |g(y)| \leq \varepsilon$ para todo $g \in G\}$.*

Nótese que $\tau_{\mathcal{G}}$ es una topología localmente convexa que, debido a que $\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G$ separa puntos, es Hausdorff.

**Lema 5.1.** *Sea $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo y sea*

$$\mathcal{G} = \{U^\circ : U \textit{es un entorno equilibrado de } 0\}.$$

*Entonces $\mathcal{G}$ es una familia saturada que cubre $E'$ y $\tau = \tau_{\mathcal{G}}$.*

*Demostración.* Está claro que $\mathcal{G}$ cubre a $E'$ y también tendremos que es saturada ya que $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

Tomemos $V$ un $\tau$-entorno de 0. Como $\tau$ es una topología localmente convexa podemos suponer que $V$ es $\tau$-cerrado, convexo y equilibrado. En tal caso tendremos que $V^\circ \in \mathcal{G}$ y que $V = (V^\circ)^\circ$ es un abierto en $\tau_{\mathcal{G}}$.

Sea ahora $V$ un $\tau_{\mathcal{G}}$-entorno de 0. Por definición de $\mathcal{G}$, podemos suponer que $V = \varepsilon U(G, 1)$, donde $G = U^\circ$ para algún $\tau$-entorno $U$ de 0. En tal caso tendremos que $U(G, 1) = G^\circ = (U^\circ)^\circ \supset U$ y por lo tanto, $V \supset \varepsilon U$ es un $\tau$-entorno de 0. □

**Definición 5.5.** *Sea $\langle F, G \rangle$ un par dual. La topología de Mackey, que denotaremos por $\mu(F, G)$, se define como la topología en $F$ de la convergencia uniforme sobre todos los conjuntos equilibrados convexos $\sigma(G, F)$-compactos de $G$.*

Denotemos por $\mathcal{R}$ a la clase de todos los conjuntos equilibrados convexos $w^*$-compactos de $E'$. Tendremos claramente que $\mathcal{R}$ es una familia saturada tal que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ separa puntos y $\mu(E, E') = \tau_{\mathcal{R}}$, y por lo tanto, por el Lema 5.1 tendremos que $\tau$ es más gruesa que $\mu(E, E')$, ya que si $U$ es un entorno equilibrado de 0, entonces $U^\circ$ es equilibrado y convexo en $E'$ y por el Teorema de Alaoglu también que es $w^*$-compacto. La demostración del siguiente Teorema está sacada de [24].

**Teorema 5.2 (Mackey, Arens).** *Sea $E$ un espacio localmente convexo. La topología de Mackey $\mu(E, E')$ es la topología localmente convexa más fina sobre $E$ que tiene a $E'$ como espacio dual.*

*Demostración.* Por el comentario anterior tendremos que toda topología sobre $E$ que tiene como dual a $E'$ es más gruesa que $\mu(E, E')$.

Veamos que $(E, \mu(E, E'))' = E'$. Consideremos $E^*$ el dual algebraico de $E$ y sea $f$ un funcional lineal $\mu(E, E')$-continuo sobre $E$. Tendremos que existe un conjunto equilibrado convexo $w^*$-compacto $K$ de $E'$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\sup_{x \in U(K,\varepsilon)} |f(x)| < 1$, es decir, $f \in U(K, \varepsilon)^\circ$. Por otro lado, como $U(K/\varepsilon, 1) = U(K, \varepsilon)$, podemos suponer que $\varepsilon = 1$ y por lo tanto, $f$ pertenece al polar $(K^\circ)^\circ$ de $K^\circ$ en $E^*$. Como $E' \subset E^*$ tendremos que $K$ también es un conjunto equilibrado convexo $w^*$-compacto en $E^*$. Por el Teorema del bipolar aplicado al par dual $\langle E^*, E\rangle$ tendremos que $f \in (K^\circ)^\circ = K \subset E'$ con lo que queda demostrado que $(E, \mu(E, E')) \subset E'$ y con ello termina la prueba puesto que la inclusión contraria es inmediata. $\square$

**Corolario 5.3 (Teorema de Mackey de las topologías compatibles).** *Sea $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo y sea $F \subset E^*$. Entonces $(E, \tau)' = F$ si, y sólo si,*

$$\sigma(E, F) \subset \tau \subset \mu(E, F).$$

*En este caso se dice que $\tau$ es compatible con el par dual $\langle E, F\rangle$.*

Gracias a los teoremas de separación podemos demostrar que los conjuntos convexos y cerrados coinciden en todas las topologías compatibles.

**Proposición 5.4.** *Sea $\langle E, F\rangle$ un par dual, entonces los conjuntos convexos y cerrados de $E$ son los mismos para todas las topologías compatibles.*

*Demostración.* Sea $\tau$ una topología compatible con el par dual $\langle E, F\rangle$. Es suficiente ver que todo subconjunto convexo $A$ es $\tau$-cerrado si, y sólo si, es $\sigma(E, F)$-cerrado. Está claro que si es $\sigma(E, F)$-cerrado entonces es $\tau$-cerrado ya que $\sigma(E, F) \subset \tau$. Supongamos ahora que $A$ es $\tau$-cerrado y sea $B$ la clausura de $A$ en la topología $\sigma(E, F)$. Si suponemos que $B \neq A$, entonces existe $x \in B \backslash A$. Como $A$ es convexo y $\tau$-cerrado y $\{x\}$ es convexo y compacto, entonces existe $f \in (E, \tau)' = F$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{z \in A} f(z) < \alpha < f(x)$$

y por lo tanto el conjunto $\{z \in E : f(z) > \alpha\}$ es un entorno abierto en la topología $\sigma(E, F)$ de $x$ que no corta con $A$ lo que es imposible ya que $x \in B$. Por lo tanto $A = B$, es decir, $A$ es $\sigma(E, F)$ cerrado. $\square$

El siguiente Lema establece una relación entre los subconjuntos completos de ciertas topologías localmente convexas del mismo espacio vectorial. En particular, vamos a conseguir relacionar la completitud en una topología compatible con la completitud en $\mu(E, F)$.

**Lema 5.5.** *Si $\tau_1$ y $\tau_2$ son dos topologías localmente convexas de un espacio vectorial $E$ con $\tau_1$ más fina que $\tau_2$ y tales que $\tau_1$ tiene una base de entornos de 0 que son cerrados en $\tau_2$, entonces todo subconjunto $\tau_2$-completo de $E$ es $\tau_1$-completo. En particular, si $\tau$ es una topología compatible con el par dual $\langle E, F\rangle$ y $A \subset E$ es $\tau$-completo, entonces $A$ es completo para todas las topologías compatibles más finas y por lo tanto es $\mu(E,F)$-completo.*

*Demostración.* Sea $A$ un subconjunto de $E$ $\tau_2$-completo y sea $(x_j)_{j\in J} \subset A$ una $\tau_1$-red de Cauchy. Tendremos entonces que $(x_j)_{j\in J}$ es una $\tau_2$-red de Cauchy y por lo tanto existe $x \in A$ tal que la red converge a $x$ en la topología $\tau_2$. Sea $\mathcal{U}$ una base de entornos de 0 en la topología $\tau_1$ que sean $\tau_2$ cerrados y sea $U \in \mathcal{U}$. Tendremos por un lado que existe $j_U$ tal que si $j_U \leq j$ y $j_U \leq j'$, entonces $x_j - x_{j'} \in U$. Tomando límites en $j'$ en la topología $\tau_2$ y teniendo en cuenta que $U$ es $\tau_2$-cerrado tendremos que $x_j - x \in U$ y por lo tanto, $x_j \in (x+U)\cap A$ para todo $j \geq j_U$ y con ello demostramos que $A$ es $\tau_1$-completo. $\square$

## 5.2 Teorema de completitud de Grothendieck

En esta sección vamos a ver como se puede construir un modelo para la compleción de un espacio localmente convexo. Empecemos primero con el siguiente lema.

**Lema 5.6 (Lema de aproximación).** *Sea $E$ un espacio localmente convexo, $S$ un subconjunto absolutamente convexo cerrado de $E$ y $x^*: E \to \mathbb{R}$ una forma lineal. Son equivalentes:*

(i) *$x^*|_S$ es continua.*

(ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $x' \in E'$ tal que $|x'(x) - x^*(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in S$.*

*Demostración.* La implicación (ii)$\Rightarrow$(i) es inmediata ya que el límite uniforme de redes de funciones continuas es una función continua.

Veamos la implicación (i)$\Rightarrow$(ii). Como $x^*|_S$ es continua, fijado $\varepsilon > 0$ existe un entorno del origen absolutamente convexo cerrado $U$ tal que $|x^*(x)| < \varepsilon$ para cada $x \in U \bigcap S$ y por lo tanto, $x^* \in \varepsilon(U\bigcap S)^\circ$, donde este polar está tomado en el espacio dual $\langle E, E^*\rangle$. Como $U$ y $S$ son absolutamente convexos y $\sigma(E^*,E)$ cerrados, por el Teorema del bipolar tendremos que $(U^\circ \bigcup S^\circ)^\circ = U^{\circ\circ}\bigcap S^{\circ\circ} = U\bigcap S$ y aplicando polares a esta igualdad tendremos que $(U\bigcap S)^\circ = (U^\circ\bigcup S^\circ)^{\circ\circ} \subset \overline{U^\circ + S^\circ}^{\sigma(E^*,E)}$. Por otro lado, como $U^\circ$ es $\sigma(E^*,E)$ compacto, tendremos que $U^\circ + S^\circ$ es $\sigma(E^*,E)$-cerrado y por lo tanto, $x^* \in \varepsilon(U \bigcap S)^\circ \subset \varepsilon(U^\circ + S^\circ)$ y como $U^\circ \subset E'$, tendremos que existe $x' \in E'$ tal que $x^* - x' \in \varepsilon S^\circ$, es decir,

$$|x^*(x) - x'(x)| < \varepsilon \text{ para todo } x \in S$$

con lo que termina la prueba. □

**Teorema 5.7.** *Sea $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo y $\mathcal{E}$ la familia de los equicontinuos de $E'$. Sea*

$$\widehat{E} = \{x^* \in (E')^* : x^*|_H \text{ es } \sigma(E', E)\text{-continuo para cada } H \in \mathcal{E}\}.$$

*El espacio $\widehat{E}$ dotado de la topología $\widehat{\tau}$ de convergencia uniforme sobre $\mathcal{E}$ es un modelo para la compleción de $(E, \tau)$.*

*Demostración.* Por el Lema 5.1 tendremos que si consideramos la inclusión natural $\widehat{\cdot} : (E, \tau) \to (\widehat{E}, \widehat{\tau})$ obtenemos una aplicación continua. Como cada $x^* \in \widehat{E}$ restringido a equicontinuos absolutamente convexos $\sigma(E', E)$-cerrados es una aplicación continua, tendremos por el Lema 5.6 aplicado al espacio $(E, \sigma(E', E))$ que podemos aproximar $x^*$ uniformemente sobre cada $H \in \mathcal{E}$ por elementos de $E$, con lo que obtenemos la densidad de $E$ en $\widehat{E}$. Por último, nos queda ver que $(\widehat{E}, \widehat{\tau})$ es un espacio completo. Si cogemos una red de Cauchy sobre este espacio, tendremos que es puntualmente de Cauchy sobre $E'$ por lo que es puntualmente convergente sobre $E'$ a una aplicación lineal y debido a que los límites uniformes de redes de funciones continuas son continuos, tendremos que el límite de esta red es continuo para cada $H \in \mathcal{E}$ por lo que obtenemos que el límite permanece en $\widehat{E}$ y por lo tanto el espacio es completo. □

De forma inmediata obtendremos:

**Corolario 5.8 (Criterio de completitud de Grothendieck).** *Un espacio localmente convexo $E$ es completo si, y sólo si, todo $\varphi \in E'^*$ cuya restricción a conjuntos equicontinuos es $\sigma(E', E)$-continuo es un elemento de $E$.*

## 5.3 Toneles y discos de Banach

**Definición 5.6.** *Sea $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo. Se dice que un subconjunto $A$ es un $\tau$-tonel (o simplemente un tonel cuando esté claro cuál es la topología sobre la que trabajamos) si es un subconjunto cerrado absolutamente convexo que absorbe puntos. Se dice que $E$ es tonelado si todo tonel es un entorno de 0.*

En esta sección vamos a ver algunos espacios que son tonelados. Empecemos recordando algunas definiciones.

**Definición 5.7.** *Un espacio topológico se llama de Baire si la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos es un conjunto denso.*

Obsérvese que tomando complementarios, tendremos que un espacio es de Baire si, y sólo si, la unión de cualquier sucesión de cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

**Proposición 5.9.** *Sea $X$ un espacio topológico. Si $X$ es un espacio topológico localmente compacto, o $X$ es un espacio métrico completo, entonces $X$ es un espacio de Baire.*

*Demostración.* Vamos a hacer la prueba para espacio métrico completo. Para espacio localmente compacto se haría con las mismas ideas. Tomemos $(G_n)_n$ una sucesión de abiertos densos. Para demostrar que $\bigcap_n G_n$ es denso tenemos que ver que dicho conjunto tiene intersección no vacía con cualquier abierto $V$ de $X$. Por la densidad de $G_1$ en $X$ tendremos que $G_1 \bigcap V$ es no vacío. Tomemos $x_1 \in X$ y $r_1 < 1$ tales que $B[x_1, r_1] \subset V \bigcap G_1$. Por la densidad de $G_2$ en $X$, existe $x_2 \in X$ y $r_2 < 1/2$ de modo que $B[x_2, r_2] \subset G_2 \bigcap B(x_1, r_1) \subset G_1 \bigcap G_2 \bigcap V$. Por inducción construimos una sucesión $(x_n)_n \in X$ y $(r_n)_n \in (0, \infty)$ con $r_n < 1/n$, de modo que se cumpla que $B[x_n, r_n] \subset G_n \bigcap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \subset G_1 \bigcap G_2 \ldots G_n \bigcap V$. Por construcción, la sucesión $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy por lo que converge hacia un $x \in X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tendremos que como $B[x_n, r_n]$ es cerrado, entonces $x \in B[x_n, r_n] \subset G_n \bigcap V$ y por lo tanto $x \in V \bigcap (\bigcap_n G_n) \neq \emptyset$. □

En particular tendremos que los espacios de Banach y los espacios de Fréchet son de Baire, y de aquí, por la siguiente Proposición podremos deducir que también son tonelados.

**Proposición 5.10.** *Sea $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo de Baire, entonces $(E, \tau)$ es tonelado.*

*Demostración.* Sea $A$ un tonel, entonces como $A$ absorbe puntos, tendremos que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$, y por lo tanto, la unión de la sucesión $(nA)_n$ tiene interior no vacío y como el espacio es de Baire, tendremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nA$ tiene un punto interior. Como estamos en un espacio vectorial topológico, esto equivale a decir que $A$ tiene un punto interior. Sea $x$ un punto interior y $U \subset A$ un entorno abierto de $x$ contenido en $A$. Entonces el conjunto

$$V = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}U$$

es un abierto que está contenido en $A$ por ser absolutamente convexo y además contiene al 0. Por lo tanto, 0 es un punto interior de $A$. $\square$

**Definición 5.8.** *Dado un conjunto $A$ absolutamente convexo y absorbente de un espacio vectorial $E$, se define el funcional de Minkowski de $A$ como*

$$\mathcal{M}_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}$$

*para $x \in E$.*

**Definición 5.9.** *Sea $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo. Se dice que un subconjunto $B$ acotado, absolutamente convexo y absorvente es un disco de Banach si $(\operatorname{span} B, \mathcal{M}_B)$ es un espacio de Banach.*

**Proposición 5.11.** *La imagen mediante una aplicación lineal y continua de un disco de Banach es un disco de Banach.*

*Demostración.* Sea $T : (E, \tau) \to (F, \tau')$ una aplicación lineal y continua entre dos espacios localmente convexos y sea $B \subset E$ un disco de Banach. Entonces $T(B)$ es un conjunto acotado por ser $T$ continua y absolutamente convexo por ser $T$ lineal. Para ver que $(\operatorname{span} T(B), \mathcal{M}_{T(B)})$ es un espacio de Banach es suficiente ver que para toda sucesión $(z_n)_n$ con $\mathcal{M}_{T(B)}(z_n) < \dfrac{1}{2^n}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente. Veamos primero que dado $z_n$, existe $x_n \in \operatorname{span} B$ tal que $T(x_n) = z_n$ y además $\mathcal{M}_B(x_n) < \frac{1}{2^{n-1}}$. Para ello es suficiente ver que dado $z \in \operatorname{span} T(B)$ y $\varepsilon > 0$ existe $x \in \operatorname{span} B$ tal que $T(x) = z$ y además $\mathcal{M}_B(x) \leq \mathcal{M}_{T(B)}(z) + \varepsilon$. Pero esto es inmediato ya que como

$$w = \frac{z}{\mathcal{M}_{T(B)}(z) + \varepsilon} \in T(B),$$

entonces existe $y \in B$ tal que $T(y) = w$ y por lo tanto $x = (\mathcal{M}_{T(B)}(z) + \varepsilon)y$ cumple lo que queríamos. Así que podemos construir una sucesión $(x_n)_n$ cumpliendo las condiciones deseadas. Como $(\operatorname{span} B, \mathcal{M}_B)$ es un espacio de Banach, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente por ser de Cauchy y de aquí tendremos que entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es convergente ya que $y_n = T(x_n)$ y la aplicación

$$T : (\operatorname{span} B, \mathcal{M}_B) \to (\operatorname{span} T(B), \mathcal{M}_{T(B)})$$

es lineal y continua. $\square$

**Proposición 5.12.** *Sea $B$ un disco de Banach de un espacio topológico $(E,\tau)$, entonces $B$ es absorbido por todo $\tau$-tonel.*

*Demostración.* Como $B$ es acotado, tendremos que la inclusión

$$i : (\operatorname{span} B, \mathcal{M}_B) \hookrightarrow (E,\tau)$$

es una aplicación continua. Sea $A$ un $\tau$-tonel, tendremos en tal caso que el conjunto $A \cap \operatorname{span} B = i^{-1}(A)$ es absolutamente convexo, absorbe los puntos de $\operatorname{span} B$ y es $\mathcal{M}_B$-cerrado en $\operatorname{span} B$ por ser $i$ continua. Ahora bien, por la Proposición 5.10 sabemos que $(\operatorname{span} B, \mathcal{M}_B)$ es tonelado, así que $i^{-1}(A)$ es un $\mathcal{M}_B$-entorno de 0. Por otro lado, como $B$ es acotado en $(\operatorname{span} B, \mathcal{M}_B)$, tendremos que es absorbido por $\mathcal{M}_B$-entornos de 0. En particular, $B$ es absorbido por $i^{-1}(A) = A \cap \operatorname{span} B$ y por lo tanto es absorbido por $A$. □

**Lema 5.13.** *Todo subconjunto convexo relativamente numerablemente compacto $Q$ de un espacio localmente convexo $E$ está contenido en un disco de Banach $D \subset E$. En particular, $Q$ es absorbido por cada tonel de $E$.*

*Demostración.* Sea $\widehat{E}$ la compleción de $E$ dada en el Teorema 5.7. Como $Q$ es acotado, la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T: & \ell^1(Q) & \rightarrow & \widehat{E} \\ & (\xi_q)_q & \rightsquigarrow & \sum_q \xi_q q \end{array}$$

está bien definida, es lineal y continua y por lo tanto $T(B)$, con $B$ la bola unidad de $\ell^1(Q)$, es un disco de Banach en $\widehat{E}$ que claramente contiene a $Q$. Veamos que $T(B) \subset E$. Supongamos primero que $(\xi_n)_n$ cumple que $\xi_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $s_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \xi_n$, $s = \displaystyle\lim_{N\to\infty} s_N$ y sea $x_n \in Q$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n = \lim_{N\to\infty} s_N \sum_{n=1}^{N} \frac{\xi_n}{s_N} x_n = s \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\xi_n}{s_N} x_n \in E$$

ya que $Q$ es convexo y relativamente numerablemente compacto en $E$. Para ver el caso general basta separar $(\xi_q)_q$ en elementos positivos y negativos y hacer las sumas correspondientes por separado. Por lo tanto, como $T(B)$ es un disco de Banach en $\widehat{E}$ y como está contenido en $E$, $T(B)$ es un disco de Banach en $E$ que contiene a $Q$. □

## 5.4 Teorema de Eberlein-Grothendieck

Usando el Teorema 2.8 vamos a ver la relación entre compacidad e intercambio de límites en el caso de un espacio localmente convexo.

**Teorema 5.14 (W.F.Eberlein, A.Grothendieck).** *Sea $(E,\tau)$ un espacio localmente convexo, sea $B \subset E$ un conjunto convexo y $\tau$-completo. Entonces para $A \subset B$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) *$A$ es débilmente relativamente numerablemente compacto.*
(ii) *$A$ es débilmente relativamente compacto.*
(iii) *$A$ es acotado e intercambia límites dobles con todos los subconjuntos $\tau$-equicontinuos de $E'$.*

*Demostración.* Es inmediato que (ii) implica (i). En los tres casos tenemos que $A$ es acotado, así que para cada entorno $U$ de 0 en $E$, dotando a $U^\circ$ con la topología débil (y por lo tanto $U^\circ$ es compacto) existe $\lambda > 0$ tal que

$$\begin{array}{rrcl} K_U: & (\overline{A}, \sigma(E,E')) & \rightarrow & (C(U^\circ, [-\lambda,\lambda]), w_{U^\circ}) \\ & x & \rightsquigarrow & x|_{U^\circ} \end{array}$$

está bien definida y es continua.

Veamos que (i) implica (iii). Por (i), dado $U$ un entorno de 0 en $E$ tendremos que $K_U(A)$ es $w_{U^\circ}$-relativamente numerablemente compacto en $C(U^\circ, [-\lambda,\lambda])$ y por lo tanto, por el Teorema 2.8 tendremos que

$$K_U(A) \sim U^\circ$$

y de aquí obtenemos que $A$ intercambia límites dobles con cada subconjunto de $E'$ $\tau$-equicontinuo.

Veamos ahora (iii) implica (ii). Para ello es suficiente con ver que si $E'^*$ es el dual algebraico de $E'$, entonces $\overline{A}^{\sigma(E'^*,E')} \subset E$ ya que entonces tendremos que $\overline{A}^{\sigma(E,E')} = \overline{A}^{\sigma(E'^*,E')}$ es $\sigma(E,E')$-compacto. Para ver esto, por el criterio de completitud de Grothendieck (Corolario 5.7) basta ver que las restricciones de $z \in \overline{A}^{\sigma(E'^*,E')}$ sobre conjuntos $U^\circ$ con $U$ un entorno de 0, son $\sigma(E',E)$-continuas. Por otro lado tendremos por el Teorema 2.8 que $K_{U^\circ}(A)$ es $w_{U^\circ}$-relativamente compacto en $C(U^\circ, [-\lambda,\lambda])$, y por lo tanto, los límites puntuales sobre $U^\circ$ de elementos $x|_{U^\circ}$ con $x \in A$ son $\sigma(E',E)$-continuos de donde podemos deducir que $z|_{U^\circ}$ es $\sigma(E',E)$-continuo. $\square$

# Capítulo 6

# Teorema de R. C. James

En 1950, R. C. James anunció que un espacio de Banach con base es reflexivo si tiene la propiedad de que cada funcional lineal continuo alcanza su norma en la bola unidad cerrada de todas sus normas equivalentes. En ese mismo año, V. Klee probó este resultado sin necesidad de la base. En 1957, R. C. James probó que la bola unidad cerrada de un espacio de Banach separable es débilmente compacto (y por lo tanto el espacio es reflexivo) si todo elemento del dual alcanza su supremo en la bola. En 1962 V. Klee conjeturó que esta propiedad podría ser una caracterización de compacidad débil para subconjuntos débilmente cerrados de un espacio de Banach separable. Finalmente, en 1964, R. C. James publicó el Teorema que enunciamos a continuación, sobre el que se va a centrar este capítulo.

**Teorema 6.1 (R. C. James).** *Sea $E$ un espacio localmente convexo cuasicompleto (es decir, que todo subconjunto cerrado y acotado es completo). Entonces un subconjunto acotado débilmente cerrado $A \subset E$ es débilmente compacto si, y sólo si, todo $\varphi \in E'$ alcanza su supremo en $A$, es decir, existe $x \in A$ tal que $\varphi(x) = \sup\{\varphi(y) : y \in A\}$.*

Como consecuencia del teorema de James tenemos que en particular, un espacio de Banach es reflexivo si, y sólo si, todo elemento del dual alcanza su norma en la bola unidad.

## 6.1 Espacios de Banach separables

En el caso de un espacio de Banach separable, la demostración del Teorema de James se simplifica bastante, como vamos a ver en esta sección. Para ello la herramienta que vamos a usar es la desigualdad de Simons ([31, Lemma 2]). Vamos a dar dos pruebas de esta desigualdad, una de ellas va a ser la original de [31] pero dividiéndola en dos partes para poder aprovechar posteriormente parte de la demostración, y la otra prueba, más reciente y sencilla, es la dada en [27]. De la prueba usada en [31] se puede extraer el siguiente Lema que aparece en [32] donde se usa para demostrar el Teorema de James en espacios de Banach.

**Lema 6.2.** *Sea $S$ un conjunto y sea $(z_n)_n$ una sucesión acotada en $\ell^\infty(S)$. Sea $\delta > 0$, $1 > \varepsilon > 0$ y sea $A_n = \operatorname{conv}\{z_i : i \geq n\}$. Elijamos $y_1 \in A_1$ tal que*

$$\alpha_1 = \sup_S y_1 \leq \inf_{y \in A_1} \sup_S y + \delta(\varepsilon/2)$$

*e $y_{m+1} \in A_{m+1}$ tal que*

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} &= \sup_S (\sum_{k=1}^{m+1} \varepsilon^{k-1} y_k) \\ &\leq \inf_{y \in A_{m+1}} \sup_S (\sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{k-1} y_k + \varepsilon^m y) + \delta(\varepsilon/2)^{m+1}. \end{aligned}$$

*Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ tendremos que*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \geq \alpha_m + \frac{\varepsilon^m}{1-\varepsilon}(\alpha_1 - (1+\varepsilon)\delta).$$

*Demostración.* Sea $\alpha_0 = 0$. Como $(y_m + \varepsilon y_{m+1})/(1+\varepsilon) \in A_m$, por definición de $\alpha_m$ tendremos que

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)\alpha_m &\leq \sup[(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon^{k-1} y_k + \varepsilon^{m-1} y_m + \varepsilon^m y_{m+1}] + \delta(1+\varepsilon)(\varepsilon/2)^m \\ &\leq \sup(\sum_{k=1}^{m+1} \varepsilon^{k-1} y_k) + \varepsilon \sup(\sum_{k=1}^{m-1} \varepsilon^{k-1} y_k) + \delta(\varepsilon/2)^m(1+\varepsilon) \\ &= \alpha_{m+1} + \varepsilon\alpha_{m-1} + \delta(\varepsilon/2)^m(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

De aquí tendremos que

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m \geq \varepsilon(\alpha_m - \alpha_{m-1}) - \delta(\varepsilon/2)^m(1+\varepsilon),$$

de donde iterando deduciremos que

$$\begin{aligned} \alpha_{m+1} - \alpha_m &\geq \varepsilon(\alpha_m - \alpha_{m-1}) - (1+\varepsilon)\delta(\varepsilon/2)^m \\ &\geq \varepsilon^2(\alpha_{m-1} - \alpha_{m-2}) - (1+\varepsilon)\delta\varepsilon^m(1/2^m + 1/2^{m-1}) \\ &\geq \ldots \\ &\geq \varepsilon^m(\alpha_1 - \alpha_0) - (1+\varepsilon)\delta\varepsilon^m(1/2^m + 1/2^{m-1} + \cdots + 1/2) \\ &\geq \varepsilon^m(\alpha_1 - (1+\varepsilon)\delta), \end{aligned}$$

así que para $n > m$ tendremos que

$$\alpha_n - \alpha_m = \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_{k+1} - \alpha_k \geq (\alpha_1 - (1+\varepsilon)\delta) \sum_{k=m}^{n-1} \varepsilon^k.$$

Por lo tanto

$$\alpha_n \geq \alpha_m + \varepsilon^m \frac{1-\varepsilon^{n-m}}{1-\varepsilon}(\alpha_1 - (1+\varepsilon)\delta),$$

y tomando límites tendremos que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \geq \alpha_m + \frac{\varepsilon^m}{1-\varepsilon}(\alpha_1 - (1+\varepsilon)\delta).$$

□

**Teorema 6.3 (Desigualdad de Simons [31, Lemma2]).** *Sea $S$ un conjunto, $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $\ell^\infty(S)$ y sea $T \subset S$ tal que si $\lambda_n \geq 0$ con $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = 1$, entonces existe $t \in T$ tal que*

$$\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n(t) = \sup_{s\in S} \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n(s).$$

*Entonces*

$$\inf\{\sup_{s\in S} x(s) : x \in \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\} \leq \sup_{t\in T} \lim_n \sup x_n(t).$$

*Demostración.* Sea $C = \{\sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n : \lambda_n \geq 0 \text{ y } \sum_{n=1}^\infty \lambda_n = 1\}$. Consideremos ahora

$$\begin{aligned} m &= \inf\{\sup_{s\in S} x(s) : x \in \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\}, \\ M &= \sup\{\sup_{s\in S} x(s) : x \in \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\}. \end{aligned}$$

Claramente tendremos que $-\infty < m \leq M < +\infty$. Sea $\delta > 0$ arbitrario y tomemos $\varepsilon \in (0,1)$ tal que

$$m - \delta(1+\varepsilon) - M\varepsilon \geq (m - 2\delta)(1-\varepsilon).$$

Sea $C_n = \operatorname{conv}\{x_p : p \geq n\}$ y por inducción elijamos $y_n \in C_n$ tal que

$$\sup_{s\in S}\left(\sum_{p\leq n} \varepsilon^{p-1} y_p(s)\right) \leq \inf_{y\in C_n} \sup_{s\in S}\left(\sum_{p\leq n-1} \varepsilon^{p-1} y_p(s) + \varepsilon^{n-1} y(x)\right) + \delta(\frac{\lambda}{2})^n.$$

Aplicando ahora el Lema 6.2 tendremos que

$$\sup_{s\in S} z(s) - \sup_{s\in S} z_{n-1}(s) \geq \frac{\varepsilon^m}{1-\varepsilon}(m-(1+\varepsilon)\delta),$$

donde

$$z_0 = 0, \qquad z_n = \sum_{p=1}^{n} \lambda^{p-1} y_p \qquad \text{y} \qquad z = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} y_n.$$

Como $y_n \in C$ para todo $n$ tendremos que $(1-\lambda)z \in C$. Por hipótesis existe un $t \in T$ tal que $z(t) = \sup_{s\in S} z(s)$. Para $n \geq 1$ tendremos

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n-1} y_n(t) &= z(t) - z_{n-1}(t) - \sum_{p\geq n+1} \varepsilon^{p-1} y_p(s) \\ &\geq \sup_{s\in S} z(s) - \sup_{s\in S} z_{n-1}(s) - \sum_{p\geq n+1} \varepsilon^{p-1} M \\ &\geq \frac{\varepsilon^{n-1}}{1-\varepsilon}(m-\delta(1+\varepsilon)) - \frac{\varepsilon^n}{1-\varepsilon} M. \end{aligned}$$

Por la elección de $\varepsilon$, tendremos que $y_n(t) \geq m - 2\delta$ para todo $n \geq 1$. Como $y_n \in C_n$, obtendremos que para cada $n \geq 1$, existe $k_n \geq n$ tal que $x_{k_n}(t) \geq\ m - 2\delta$ y por lo tanto $u(t) = \limsup_n x_n(t) \geq m - 2\delta$, así que

$$\sup_{t\in T} u(t) \geq m - 2\delta = \inf\{\sup_{s\in S} x(s) : x \in \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}\} - 2\delta$$

y como $\delta$ era arbitrario terminamos la prueba. $\square$

Veamos ahora la prueba dada en [27] que es más sencilla puesto que no usa el Lema 6.2.

*Demostración.* (Oja [27]) Para $x \in \ell^\infty(X)$ denotemos $\sigma(x) = \sup_{s\in S} x(s)$ y sea $C_k = \{\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n x_n : \lambda_n \geq 0, \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n = 1\}$ para $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in C_1$ tendremos que es de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

con cada $\lambda \geq 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$. Sea $m$ tal que $\lambda_m > 0$. Si para cada $k \geq m$ tomamos

$$z_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\sum_{n=1}^{k} \lambda_n} x_i$$

tendremos que $(z_k)_k$ converge uniformemente a $x$. Por otro lado tendremos que $z_k \in \operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ para $k \geq m$ por lo que

$$\operatorname{ínf}\{\sigma(x) : x \in \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\} = \operatorname{ínf}\{\sigma(x) : x \in C_1\}$$

así que es suficiente con demostrar que

$$\operatorname*{ínf}_{x \in C_1} \sigma(x) \leq \sup_{t \in T} \operatorname*{lím\,sup}_{n} x_n(t) =: \sigma_T.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Elijamos inductivamente $z_k \in C_k$ tal que se cumpla

$$\sigma(2^k v_k + z_{k+1}) \leq \operatorname*{ínf}_{z \in C_{k+1}} \sigma(2^k v_k + z) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \tag{6.1}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$, donde $v_0 = 0$ y $v_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{z_n}{2^n}$. Sea $v = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{2^n}$. Como $z_{k+1} = 2^{k+1} v_{k+1} - 2^{k+1} v_k$ y $y_k := 2^k v - 2^k v_k = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2^k z_n}{2^n} \in C_{k+1}$, por (6.1) tendremos para $k = 0, 1, 2, \ldots$ que

$$\sigma(2^{k+1} v_{k+1} - 2^k v_k) \leq \sigma(2^k v) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = 2^k \sigma(v) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{6.2}$$

Como $v \in C_1$, existe $t \in T$ satisfaciendo que $v(t) = \sigma(v)$. Como $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} 2^k = 2^{m-1}$, de (6.2), para $m \in \mathbb{N}$ tendremos que

$$2^m v_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (2^{k+1} v_{k+1} - 2^k v_k)(t) \leq (2^m - 1)\sigma(v) + \varepsilon = 2^m v(t) - \sigma(v) + \varepsilon.$$

Así que $\sigma(v) \leq 2^m v(t) - 2^m v_m(t) + \varepsilon = y_m(t) + \varepsilon$, y como $y_m \in C_m$ tendremos que existe $k_m \geq m$ tal que $\sigma(v) \leq x_{k_m}(t) + \varepsilon$, y de aquí

$$\operatorname*{ínf}_{x \in C_1} \sigma(x) \leq \operatorname*{lím\,sup}_{m} x_m(t) + \varepsilon$$

con lo que termina la prueba por ser $\varepsilon$ arbitrario. □

**Observación 6.4.** *En la desigualdad de Simons tenemos la hipótesis de que todas las combinaciones convexas infinitas alcancen su supremo en $T$. Esta condición no puede ser debilitada a combinaciones convexas finitas. Tomemos por ejemplo $T = S = \mathbb{N}$ y $(x_n)_n \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ la sucesión que vale 0 en sus $n$ primeros términos y 1 en el resto, claramente tendremos que no cumple dicha hipótesis y tampoco se da la desigualdad.*

La prueba del teorema de James para espacios de Banach separables que vamos a hacer, es la que se muestra en [9]. De hecho lo que se demuestra es el siguiente resultado.

**Teorema 6.5.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $B$ un subconjunto de $X$ no vacío, cerrado, convexo, separable y acotado. Entonces $B$ es débilmente compacto si, y sólo si, todos los elementos de $X^*$ alcanzan su supremo sobre $B$.*

*Demostración.* Veamos la implicación no trivial. Supongamos que todos los elementos de $X^*$ alcanzan su supremo sobre $B$ y supongamos que $B$ no es débilmente compacto. Tendremos entonces que la $w^*$-clausura de $B$ en $X^{**}$ se sale de $X$. Sea $b_0 \in \overline{B}^{w^*} \setminus X$. Por el teorema de Hahn-Banach podemos elegir $u \in X^{***}$, $\|u\| = 1$ y $\alpha > 0$ tal que

$$u(b_0) > \alpha > \sup_{b \in B} u(b).$$

Sea $(b_n)_n$ una sucesión densa en norma en $B$. Como $u$ es un elemento de la $\sigma(X^{***}, X^{**})$-clausura de $B_{X^*}$, tendremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in B_{X^*}$ tal que $x_n(b_0) > \alpha$ y $|(x_n - u)(b_k)| < \dfrac{1}{n}$ para $1 \leq k \leq n$. Por la equicontinuidad de los $x_n$ y ser $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ denso en $B$ tendremos que $(x_n)_n$ converge puntualmente sobre $B$ a $u$. Si $\sum_n \lambda_n = 1$ con $\lambda_n \geq 0$, debido a que estamos en un espacio Banach tendremos que $\sum_n \lambda_n x_n \in X^*$ y por hipótesis alcanza su supremo en $B$. Podremos entonces aplicar la desigualdad de Simons (Teorema 6.3) a $S = T = B$ y $(x_n)_n$ obteniendo que

$$\begin{aligned} \sup\{u(b) : b \in B\} &\geq \inf\{\sup_{b \in B} x(b) : x \in \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\} \\ &\geq \inf\{x(b_0) : x \in \operatorname{conv}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\} \geq \alpha \end{aligned}$$

lo que es imposible por elección de $\alpha$. □

## 6.2 Demostración del teorema de James

La demostración que vamos a dar aquí es la que aparece en [17] que es una adaptación con unas ligeras modificaciones de la prueba dada en [29]. Para empezar vamos a demostrar la siguiente Proposición que originalmente aparece en [29] y que puede ser bastante útil independientemente del Teorema de James, como por ejemplo podremos apreciar en la Sección 7.1.

**Proposición 6.6 (J. D. Pryce [29]).** *Sea $(f_n)_n$ una sucesión en $\ell^\infty(X)$ uniformemente acotada y sea $D \subset \ell^\infty(X)$ un subconjunto separable. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k})_k$ de $(f_n)_n$ tal que*

$$\begin{aligned} \sup_{x\in X} \limsup_{k\to\infty} (h - f_{n_k})(x) &= \sup_{x\in X} \liminf_{k\to\infty} (h - f_{n_k})(x) \\ \inf_{x\in X} \limsup_{k\to\infty} (h - f_{n_k})(x) &= \inf_{x\in X} \liminf_{k\to\infty} (h - f_{n_k})(x) \end{aligned}$$

*para cada $h \in D$.*

*Demostración.* Vamos a probar que existe una subsucesión que cumple la primera igualdad. Para conseguir que cumpla también la segunda igualdad basta con repetir en la sucesión obtenida un razonamiento análogo al que vamos a presentar aquí. Debido a que $D$ es separable y a que la aplicación $\sup_{x\in X}(\cdot)$ es continua en $\ell^\infty(X)$ podemos suponer que $D$ es un conjunto numerable. Pongamos $D = \{k_1, k_2, k_3, \dots\}$. Definamos $(h_n)_n$ como la sucesión

$$k_1, k_1, k_2, k_1, k_2, k_3, k_1, k_2, k_3, k_4, \dots$$

con lo que tendremos que cada elemento de $D$ se repite infinitas veces en dicha sucesión. Como $(f_n)_n$ es uniformemente acotada tendremos que $\liminf_{m\to\infty} f_m$ existe en $\ell^\infty(X)$. Por la definición de supremo, existe un $x_1 \in X$ tal que

$$(h_1 - \liminf_{m\to\infty} f_m)(x_1) \geq \sup_{x\in X}(h_1 - \liminf_{m\to\infty} f_m)(x) - 1$$

y por otro lado, existe una subsucesión $(f_m^1)_m$ de $(f_m)_m$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} f_m^1(x_1) = \liminf_{m\to\infty} f_m(x_1).$$

Suponiendo que por inducción hemos tomado $x_{n-1} \in X$ y una subsucesión $(f_m^{n-1})_m$, elegimos ahora un $x_n \in X$ tal que

$$(h_n - \liminf_{m\to\infty} f_m^{n-1})(x_n) \geq \sup_{x\in X}(h_n - \liminf_{m\to\infty} f_m^{n-1})(x) - \frac{1}{n}$$

y una subsucesión $(f_m^n)_m$ de $(f_m^{n-1})_m$ tal que

$$\lim_{m\to\infty} f_m^n(x_n) = \liminf_{m\to\infty} f_m^{n-1}(x_n).$$

Si tomamos la subsucesión $(f_k^k)_k$ de $(f_n)_n$ tendremos que $(f_k^k)_{k\geq n}$ es una subsucesión de $(f_m^n)_m$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in X}(h_n - \liminf_{k\to\infty} f_k^k)(x) &\geq \sup_{x\in X}(h_n - \limsup_{k\to\infty} f_k^k)(x) \\
&\geq h_n(x_n) - \limsup_{k\to\infty} f_k^k(x_n) \\
&= h_n(x_n) - \lim_{m\to\infty} f_m^n(x_n) \\
&\geq \sup_{x\in X}(h_n - \liminf_{m\to\infty} f_m^{n-1})(x) - \frac{1}{n} \\
&\geq \sup_{x\in X}(h_n - \liminf_{k\to\infty} f_k^k)(x) - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Sea $h \in D$, tendremos entonces que para cada $n$ tal que $h = h_n$ se cumple que

$$\sup_{x\in X}(h - \liminf_{k\to\infty} f_k^k)(x) \geq \sup_{x\in X}(h - \limsup_{k\to\infty} f_k^k)(x) \geq \sup_{x\in X}(h - \liminf_{k\to\infty} f_k^k)(x) - \frac{1}{n}$$

y como hay infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $h = h_n$ tendremos que

$$\sup_{x\in X} \limsup_{k\to\infty}(h - f_k^k)(x) = \sup_{x\in X} \liminf_{k\to\infty}(h - f_k^k)(x)$$

por lo que tomando $f_{n_k} = f_k^k$ terminaremos la prueba. □

La prueba del Teorema de James se va a reducir a estudiar espacios $\ell^\infty(X)$ donde la Proposición anterior es bastante útil. En $\ell^\infty(X)$ usaremos el sublineal $p(f) = \sup_{x\in X} f(x)$ por lo que nos serán útiles algunas propiedades sobre sublineales que vamos a ver a continuación.

**Lema 6.7.** *Sea $E$ un espacio vectorial y $p : E \to \mathbb{R}$ un sublineal. Sea $\alpha > 0$, $B \subset E$ un conjunto convexo y $v_0 \in E$ tal que*

$$\inf_{y\in B} p(v_0 + y) > 1 + p(v_0),$$

*entonces existe un $y_0 \in B$ tal que*

$$\inf_{y_1,y_2\in B} p(v_0 + y_1 + \alpha y_2) > \alpha + p(v_0 + y_0).$$

*Demostración.* Sea $\delta := \inf_{y\in B} p(v_0 + y) - p(v_0) - 1 > 0$. Tomemos $y_0 \in B$ tal que

$$\inf_{y\in B} p(v_0 + y) \geq p(v_0 + y_0) - \frac{\alpha}{2}\delta. \tag{6.3}$$

Para $y_1, y_2 \in B$ arbitrarios tomemos

$$z := \frac{y_1 + \alpha y_2}{1+\alpha} \in B.$$

Tendremos entonces que

$$(1+\alpha)(v_0 + z) = v_0 + y_1 + \alpha y_2 + \alpha v_0$$

y por lo tanto

$$(1+\alpha)p(v_0 + z) \leq p(v_0 + y_1 + \alpha y_2) + \alpha p(v_0).$$

De aquí tendremos que

$$\begin{aligned} p(v_0 + y_1 + \alpha y_2) &\geq (1+\alpha)p(v_0+z) - \alpha p(v_0) \\ &\geq (1+\alpha)\inf_{y\in B} p(v_0+z) - \alpha p(v_0) \\ &\geq \alpha(1+\delta) + \inf_{y\in B} p(v_0+y) \geq \alpha + \frac{\alpha}{2}\delta + p(v_0+y_0) \end{aligned}$$

donde la tercera desigualdad sale de la hipótesis del enunciado y la cuarta desigualdad sale de (6.3). Por lo tanto

$$\inf_{y_1,y_2\in B} p(v_0 + y_1 + \alpha y_2) \geq \alpha + \frac{\alpha}{2}\delta + p(v_0+y_0) > \alpha + p(v_0+y_0).$$

□

A partir de este lema podemos obtener el siguiente resultado.

**Proposición 6.8.** *Sea $E$ un espacio vectorial y $p : E \to \mathbb{R}$ un sublineal. Sea $(\beta_n)_n$ una sucesión de números positivos y $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$ una sucesión de subconjuntos convexos contenidos en $E$. Si*

$$\inf_{y\in B_1} p(y) > 1,$$

*entonces existe una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in B_n$ tal que*

$$p(\sum_{n=1}^{N} \beta_n y_n) > \beta_N + p(\sum_{n=1}^{N-1} \beta_n y_n).$$

*Demostración.* Si encontramos una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in B_n$ tal que

$$\inf_{y \in B_N} p\Big(\frac{1}{\beta_N}\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n y_n + y\Big) > 1 + p\Big(\frac{1}{\beta_N}\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n y_n\Big),$$

como $y \in B_N$ la prueba estaría terminada. Veamos esto por inducción sobre $N$. El caso $N = 1$ es la hipótesis del enunciado. Supongamos que hemos encontrado $y_1, \dots, y_{N-1}$ cumpliendo la desigualdad. Entonces, aplicando el Lema 6.7 a

$$B := B_N, \quad v_0 := \frac{1}{\beta_N}\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n y_n \quad \text{y} \quad \alpha := \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N}$$

tendremos que existe un $z$ tal que

$$\inf_{z_1, z_2 \in B_N} p\Big(\frac{1}{\beta_N}\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n y_n + z_1 + \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} z_2\Big) > \frac{\beta_{N+1}}{\beta_N} + p\Big(\frac{1}{\beta_N}\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n y_n + z\Big).$$

En particular, tomando $z =: y_N$ y dividiendo la desigualdad entre $\alpha$ tendremos que

$$\begin{aligned}
\inf_{y \in B_{N+1}} p\Big(\frac{1}{\beta_{N+1}}\sum_{n=1}^{N}\beta_n y_n + y\Big) &\geq \inf_{y \in B_N} p\Big(\frac{1}{\beta_{N+1}}\sum_{n=1}^{N}\beta_n y_n + y\Big) \\
&\geq \inf_{z_1, z_2 \in B_N} p\Big(\frac{1}{\beta_{N+1}}\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n y_n + \frac{\beta_N}{\beta_{N+1}} z_1 + z_2\Big) \\
&> 1 + p\Big(\frac{1}{\beta_{N+1}}\sum_{n=1}^{N}\beta_n y_n\Big).
\end{aligned}$$

$\square$

Del siguiente teorema podremos obtener fácilmente el teorema de James.

**Teorema 6.9 (del doble límite de James).** *Sea $(L, \tau)$ un espacio localmente convexo, sea $X$ un conjunto, $T : L \to \ell^\infty(X)$ un operador lineal $\tau$-$w_X$-continuo y $Q \subset L$ un subconjunto convexo relativamente numerablemente compacto en $L$. Si todas las funciones $Ty$, $y \in L$ alcanzan su supremo en $X$, entonces $T(Q)$ es uniformemente acotado en $X$ y $T(Q) \sim X$ (intercambian límites).*

*Demostración.* Podemos suponer que $L \subset \ell^\infty(X)$, $\tau = w_X|_L$ y $T$ es la inclusión ya que vamos a trabajar con $T(L)$ y $T(Q)$. Aplicando el Lema 5.13 tendremos que $Q$ está contenido en un disco de Banach de $L$ que a su vez es un disco de Banach en $\ell^\infty(X)$ y por lo tanto, por la Proposición 5.12, $Q$ es absorbido por todos los toneles de $\ell^\infty(X)$. En particular, $Q$ es absorbido por

$$\{f : X \to \mathbb{R} |\ \|f\|_\infty \leq 1\},$$

es decir, $Q$ es uniformemente acotado en $X$.

Supongamos ahora que $Q \not\sim X$. Tendremos entonces que existen sucesiones $(f_n)_n \in Q$ y $(x_m)_m \in X$ tales que los siguientes límites existen y se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) > \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_m).$$

Si cambiamos $Q$ por $\lambda Q$ seguiríamos estando en las hipótesis del teorema y por lo tanto podemos suponer que

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} f_n(x_m) > \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x_m) + 3,$$

en otras palabras, existe un $n_0$ tal que si $n > n_0$ entonces

$$\lim_{m\to\infty} [f_n(x_m) - \lim_{i\to\infty} f_i(x_m)] \geq 3.$$

Podemos entonces suponer que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un $m_0$ tal que si $m > m_0$ entonces

$$f_n(x_m) - \lim_{i\to\infty} f_i(x_m) \geq 2. \tag{6.4}$$

Si tomamos $D := \text{span}\{f_n\}$, aplicando la Proposición 6.6 existe una subsucesión que sin perdida de generalidad podemos suponer que de nuevo es $(f_n)_n$ tal que para todo $h \in D$

$$\sup_{x\in X} \liminf_{i\to\infty} (h - f_i)(x) = \sup_{x\in X} \limsup_{i\to\infty} (h - f_i)(x).$$

Sea $K_n := \text{conv}\{f_m : m \geq n\}$, entonces aplicando (6.4) tendremos que para $h = \sum_{n=1}^N \lambda_n f_n \in K_1$ con $\sum_{n=1}^N \lambda_n = 1$ y $\lambda_n \geq 0$ para $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$, se cumple que

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in X} \liminf_{i\to\infty} (h - f_i)(x) &= \sup_{x\in X} (\sum_{n=1}^N \lambda_n (f_n - \limsup_{i\to\infty} f_i))(x) \\
&\geq \sum_{n=1}^N \lambda_n (f_n(x_m) - \lim_{i\to\infty} f_i(x_m)) \\
&\geq \sum_{n=1}^N \lambda_n 2 = 2
\end{aligned}$$

donde hemos usado un $m$ suficientemente grande.

Podemos entonces aplicar la Proposición 6.8 al sublineal $p = \sup_{x\in X}$, una sucesión cualquiera de números positivos $(\beta_n)_n$ y a $B_n = K_n - \operatorname{lím\,sup}_{i\to\infty} f_i$ por lo que existen $g_n \in K_n$ tales que

$$\sup_{x\in X}\left(\sum_{n=1}^{N}\beta_n(g_n - \limsup_{i\to\infty} f_i)(x)\right) > \beta_N + \sup_{x\in X}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n(g_n - \limsup_{i\to\infty} f_i)(x)\right). \tag{6.5}$$

Como $g_n \in K_1 \subset Q$ y $Q$ es $w_X$-relativamente numerablemente compacto en $L$ tendremos que la sucesión $(g_n)_n$ tiene un punto de aglomeración $g$ en $L$. Por lo tanto, para cada $x \in X$ tendremos que

$$-\infty < \liminf_{n\to\infty} g_n(x) \le g(x) \le \limsup_{n\to\infty} g_n(x) < +\infty.$$

Por otro lado, como

$$g_n(x) = \sum_{k=n}^{m_n}\lambda_k^n f_k(x) \quad \text{con} \quad \sum_{k=n}^{m_n}\lambda_k^n = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_k^n \ge 0$$

tendremos que para cada $n$ existen $m_1, m_2 \ge n$ tales que

$$g_n(x) \ge f_{m_1}(x) \quad \text{y} \quad g_n(x) \le f_{m_2}(x)$$

y de aquí tendremos que

$$\liminf_{i\to\infty} f_i(x) \le \liminf_{n\to\infty} g_n(x) \le g(x) \le \limsup_{n\to\infty} g_n(x) \le \limsup_{i\to\infty} f_i(x)$$

de donde tendremos que para todo $h \in D$

$$\begin{aligned}\sup_{x\in X}(h - \limsup_{i\to\infty} f_i)(x) &\le \sup_{x\in X}(h-g)(x) \le \sup_{x\in X}(h - \liminf_{i\to\infty} f_i)(x)\\ &= \sup_{x\in X}(h - \limsup_{i\to\infty} f_i)(x)\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sup_{x\in X}(h - \limsup_{i\to\infty} f_i)(x) = \sup_{x\in X}(h-g)(x)$$

para todo $h \in D$. Podremos entonces reescribir (6.5) como

$$\sup_{x\in X}\left(\sum_{n=1}^{N}\beta_n(g_n - g)(x)\right) > \beta_N + \sup_{x\in X}\left(\sum_{n=1}^{N-1}\beta_n(g_n - g)(x)\right). \tag{6.6}$$

Fijemos ahora $\beta_n = \dfrac{1}{n!}$, tendremos que

$$\frac{1}{\beta_n}\sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m = \frac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots) \leq \frac{e}{n+1} \to 0. \quad (6.7)$$

Como $g_n \in Q$ que está contenido en un disco de Banach en $L$, tendremos que la serie

$$h_0 := \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(g_n - g)$$

converge en $L$. Tendremos por lo tanto que $h_0$ alcanza su supremo en algún $x_0 \in X$. Esto nos va a llevar a una contradicción. Denotemos $h_n := g_n - g$. Como $g$ era un punto de aglomeración de $g_n$, entonces

$$\liminf_{n\to\infty} h_n \leq 0. \quad (6.8)$$

Definamos por otro lado

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x\in X}|h_n(x)| < \infty$$

que es finito ya que los $g_n$ están uniformemente acotados. Tendremos entonces

$$h_0(x_0) = \sum_{m=1}^{n}\beta_m h_m(x_0) + \sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m h_m(x_0) \leq \sum_{m=1}^{n}\beta_m h_m(x_0) + M\sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m.$$

Por otro lado tendremos que

$$\begin{aligned} h_0(x_0) &= \sup_{x\in X} h_0(x) \geq \sup_{x\in X}(\sum_{m=1}^{n}\beta_m h_m(x)) - \sup_{x\in X}(-\sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m h_m(x)) \geq \\ &\geq \beta_n + \sup_{x\in X}(\sum_{m=1}^{n-1}\beta_m h_m(x)) - M\sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m \geq \\ &\geq \beta_n + \sum_{m=1}^{n-1}\beta_m h_m(x_0) - M\sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad ha salido de aplicar (6.6). Juntando las dos últimas desigualdades tendremos que

$$\beta_n h_n(x_0) \geq \beta_n - 2M\sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m,$$

es decir,

$$h_n(x_0) \geq 1 - 2M\frac{1}{\beta_n}\sum_{m=n+1}^{\infty}\beta_m \to 1$$

donde la convergencia hacia 1 la hemos obtenido de (6.7). Por lo tanto

$$\liminf_{n\to\infty} h_n(x_0) \geq 1,$$

lo que es imposible por (6.8). □

De aquí y del teorema de Eberlein-Grothendieck obtenemos el siguiente corolario que por el Lema 5.5 implica el teorema de James.

**Corolario 6.10.** *Sea $A$ un subconjunto débilmente cerrado y acotado de un espacio localmente convexo $E$ tal que $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ es $\mu(E,E')$-completo. Entonces son equivalentes:*

(i) *$A$ es débilmente compacto.*

(ii) *Todo $\varphi \in E'$ alcanza su supremo en $A$.*

*Si $A$ no es débilmente cerrado,* (ii) *implica que $A$ es débilmente relativamente compacto.*

*Demostración.* Por el Teorema de Eberlein-Grothendieck (Teorema 5.14) es suficiente ver que (ii) implica que $A \sim U^\circ$ para todo $\mu(E,E')$-entorno $U$ de cero. Pero por otro lado, la restricción

$$T : (E', \sigma(E',E)) \to \ell^\infty(A)$$

está bien definida, es $\sigma(E',E)$-$w_A$-continua y $U^\circ$ es $\sigma(E',E)$-compacto por lo que por el teorema del doble límite de James tenemos que

$$U^\circ = T(U^\circ) \sim A.$$

□

## 6.3 Condición de completitud

En esta sección vamos a ver que la condición de cuasicompletitud no puede ser eliminada incluso en el caso de que en vez de un espacio localmente convexo tengamos un espacio normado, es decir, vamos a buscar un ejemplo de espacio normado no reflexivo con la propiedad de que todo elemento del dual alcanza la norma en la bola unidad. La construcción que vamos a hacer es debida a R. C. James y se puede encontrar en [17]. Recordemos que si $X$ es un espacio de Banach, denotamos por $X^*$ su dual topológico. El siguiente Lema nos va a permitir la construcción de ciertos espacios de Banach a partir de otros. En particular nos va a permitir la construcción de espacios de Banach reflexivos.

**Lema 6.11.** *Si $(X_n, \|\cdot\|_n)$ es una familia de espacios de Banach, entonces*

$$X = \ell^2((X_n)_n) := \left\{ (x_n)_n \in \prod X_n : \|(x_n)_n\| := \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}$$

*es un espacio de Banach y su espacio dual es (isométricamente)*

$$X^* = \ell^2((X_n^*)_n)$$

*donde*

$$(\varphi_n)_n((x_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n).$$

*En particular, si todos los $X_n$ son reflexivos también lo será el espacio $X$.*

*Demostración.* Se comprueba fácilmente que $\ell^2((X_n)_n)$ es un espacio de Banach. Veamos primero que $(\varphi_n)_n((x_n)_n)$ está bien definido:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\| \, \|x_n\| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\| \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Además, acabamos de ver que la norma de $(\varphi_n)_n$ en $X^*$ es menor o igual a su norma en $\ell^2((X_n^*)_n)$. Para cada $\varphi \in X^*$, sea $\varphi_n = \varphi \circ i_n$ donde $i_n$ es la inyección natural de $X_n$ en $\ell^2((X_n)_n)$. Tendremos entonces que

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{n=1}^{\infty} i_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(i_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x_n). \tag{6.9}$$

Dado $0 < \varepsilon < 1$, elijamos $x_n \in X_n$ de norma 1 tal que

$$\|\varphi_n\| \leq \varphi_n \left( \frac{x_n}{1-\varepsilon} \right),$$

entonces $(\xi_n x_n)_n \in \ell^2((X_n)_n)$ para todo $(\xi_n)_n \in \ell^2$ y por (6.9) tendremos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \|\varphi_n\| \right| \quad &\leq \quad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n \left( \frac{x_n}{1-\varepsilon} \right) \right| = \left| \varphi \left( (\frac{\xi_n x_n}{1-\varepsilon})_n \right) \right| \\ &\leq \quad \|\varphi\| \frac{1}{1-\varepsilon} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

así que $(\sum \|\varphi_n\|^2)^{1/2} \leq \|\varphi\|(1-\varepsilon)^{-1}$ para todo $0 < \varepsilon < 1$, $(\varphi_n)_n \in \ell^2((X_n)_n^*)$ y

$$(\ell^2((X_n)_n))^* = \ell^2((X_n)_n^*)$$

isométricamente. □

La idea ahora es construir un espacio de Banach reflexivo y buscar un subespacio propio de tal forma que siga cumpliendo la condición de alcanzar los supremos en la bola unidad y tal que el bidual de este espacio coincida con el del espacio de Banach.

Tomemos $A_n = \{(1,n),(2,n),\ldots,(n,n)\}$ y sea $X_n = \ell^\infty(A_n)$ (es decir, $X_n \cong (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$). Sea ahora

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

denotemos por $\pi_n$ la restricción de $\mathbb{R}^A$ en $\mathbb{R}^{A_n}$ y sea

$$X = \ell^2((X_n)_n) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} : \left( \sum_{n=1}^{\infty} \|\pi_n(f)\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Tendremos que $X$ es reflexivo por serlo cada $X_n$. Sea $f$ un punto extremal de $B$ la bola unidad cerrada de $X$, entonces tendremos claramente que $\pi_n(f)$ es un punto extremal de la bola unidad de radio $\|\pi_n(f)\|_\infty$ en $\ell^\infty(X_n)$. Por lo tanto

$$|\pi_n(f)(1,n)| = |\pi_n(f)(2,n)| = \cdots = |\pi_n(f)(n,n)|.$$

Denotemos

$$C := \{f \in X : |\pi_n(f)(1,n)| = |\pi_n(f)(2,n)| = \cdots = |\pi_n(f)(n,n)|, n \in \mathbb{N}\},$$

tendremos entonces que

$$Y := \operatorname{span} \operatorname{ext} B \subset C_1 := \left\{ \sum_{i=1}^{m} f_i : f_i \in C \right\}.$$

Si vemos que todos los elementos de $C_1$ son no inyectivos tendremos que $X \neq Y$ debido a que $X$ tiene claramente elementos inyectivos (vistos como funciones de $A$ en $\mathbb{R}$). Sea $f = \sum_{i=1}^{m} f_i \in C_1$, entonces para $n > 2^m$ tendremos que

$$\pi_n(f)(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i(\cdot)$$

donde $\alpha_i \geq 0$ y $e_i$ es una aplicación de $A_n$ en $\{-1,+1\}$. Para cada $k \in A_n$ tomemos $z_k = (e_i(k))_{i=1}^m$, como sólo existen $2^m$ vectores en $\mathbb{R}^m$ con entradas $\pm 1$ tendremos que todos los $z_k$ no pueden ser distintos y por lo tanto existe $k, l \in A_n$ tales que

$$e_i(k) = e_i(l) \qquad 1 \leq i \leq m$$

y entonces

$$\pi_n(f)(k) = \pi_n(f)(l).$$

Por lo tanto, sabemos que existe un espacio de Banach reflexivo $X$ tal que $Y = \operatorname{span} \operatorname{ext} B \neq X$ donde $B$ es la bola unidad del espacio de Banach. Como $Y$ es denso en $X$ tendremos que cada elemento de $Y^*$ se puede extender a un único elemento de $X^*$ por lo que podemos identificar $X^*$ con $Y^*$. Cada elemento de $Y^* = X^*$ alcanza su supremo en la bola unidad de $X$, pero de hecho debe de alcanzar su supremo en algún punto extremal de $B$, es decir, también debe de alcanzar su supremo en la bola unidad de $Y$. Sin embargo $Y$ no es reflexivo ya que $Y^{**} = X^{**} = X$.

## 6.4 Mejor aproximación

En esta sección vamos a ver la relación entre la reflexividad de un espacio de Banach y la proximinalidad de ciertos subconjuntos mediante el Teorema de James. Recordemos que cuando tengamos un espacio localmente convexo $E$ denotamos su dual topológico por $E'$, pero en el caso de que además $E$ es un espacio normado se denota su dual topológico por $E^*$. Empecemos con algunas nociones básicas.

**Definición 6.1.** *Sea $D$ un subconjunto de un espacio métrico $(M, d)$. Diremos que $D$ es proximinal, si todo $x \in M$ tiene una mejor aproximación en $D$.*

En 1933, Mazur observó que para cada funcional lineal continuo $x^* \in X^*$ de norma 1 de un espacio de Banach real $X$, se cumple que el hiperplano $F_1 = \{x \in X : x^*(x) = 1\}$ tiene un elemento de norma mínima si, y sólo si, $x^*$ alcanza su supremo en la bola unidad cerrada.

**Lema 6.12.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $x^* \in X^*$, con $\|x^*\| = 1$. Entonces tendremos la siguiente igualdad:*

$$\text{ínf}\{\|y\| : x^*(y) = 1\} = 1 = \sup\{x^*(x) : \|x\| = 1\} = \sup\{x^*(x) : \|x\| \leq 1\}.$$

*Demostración.* La segunda igualdad y la tercera son conocidas y salen de la definición de norma. Veamos la primera igualdad. Sea $y \in X$ con

$$1 = x^*(y) \leq \|x^*\|\|y\| = \|y\|.$$

Tendremos entonces que $\text{ínf}\{\|y\| : x^*(y) = 1\} \geq 1$. Por otro lado, por la definición de norma tendremos que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $x_\varepsilon \in X$ tal que $\|x_\varepsilon\| = 1$ y $x^*(x_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$. Por lo tanto

$$x^*\left(\frac{x_\varepsilon}{x^*(x_\varepsilon)}\right) = 1, \qquad \left\|\frac{x_\varepsilon}{x^*(x_\varepsilon)}\right\| \leq \frac{1}{1-\varepsilon},$$

y por lo tanto $\operatorname{ínf}\{\|y\| : x^*(y) = 1\} = 1$. □

**Proposición 6.13.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* $x^* \in X^*$*, con norma* $\|x^*\| = 1$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(i) $x^*$ *alcanza su supremo en* $B_X$*.*
(ii) *Para un* $\alpha \in \mathbb{R}$*, el hiperplano* $H_\alpha = \{x \in X : x^*(x) = \alpha\}$ *es proximinal.*
(iii) *Para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*, el hiperplano* $H_\alpha = \{x \in X : x^*(x) = \alpha\}$ *es proximinal.*

*Demostración.* Para $x_0 \notin H_\alpha$, la sustitución

$$y = \frac{x_0 - z}{x^*(x_0) - \alpha}$$

nos conduce a que

$$\operatorname{ínf}\{\|x_0 - z\| : x^*(z) = \alpha\} = \operatorname{ínf}\{|x^*(x_0) - \alpha|\|y\| : x^*(y) = 1\}.$$

Por lo tanto, la existencia de una mejor aproximación para $x_0$ en $H_\alpha$ es equivalente a la existencia de la mejor aproximación de 0 a $H_1$ y la prueba termina aplicando el Lema 6.12. □

En el lenguaje de teoría de aproximaciones, por el Teorema de James, usando la Proposición 6.13 tendremos que:

**Teorema 6.14.** *Un espacio de Banach es reflexivo si, y sólo si, todos los hiperplanos cerrados son proximinales.*

Por último, podremos hacer esta caracterización usando conjuntos débilmente cerrados.

**Corolario 6.15.** *Para un espacio de Banach* $X$*, las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) $X$ *es reflexivo.*
(ii) *Todos los hiperplanos afines cerrados de* $X$ *son proximinales.*
(iii) *Todas las variedades afines cerradas de* $X$ *son proximinales.*
(iv) *Todos los conjuntos cerrados, convexos de* $X$ *son proximinales.*
(v) *Todos los conjuntos débilmente cerrados de* $X$ *son proximinales.*

*Demostración.* Las implicaciones (v)⇒(iv)⇒(iii)⇒(ii) son triviales. Por otro lado, la implicación (ii)⇒(i) nos la da el Teorema 6.14 por lo que basta con demostrar (i)⇒(v). Supongamos que $X$ es un espacio de Banach reflexivo, sea $A \subset X$ es un conjunto débilmente cerrado, $x \in X$ y tomemos

$$d := \operatorname{ínf}\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

Tendremos entonces que existe una sucesión $(y_n)_n \subset A$ tal que

$$\lim_n \|x - y_n\| = d.$$

Ahora bien, tendremos que $(y_n)_n$ está acotada en norma y por lo tanto, dicha sucesión está contenida en un subconjunto $w$-compacto de $X$ ya que $X$ es reflexivo, y de aquí podemos deducir la existencia de una subsucesión $(y_{n_k})_k$ de $(y_n)_n$ $w$-convergente hacia algún $y_0 \in A$ ya que $A$ es $w$-cerrado. Para cada $x^* \in B_{X^*}$ tendremos que

$$|x^*(x - y_0)| = \lim_n |x^*(x - y_{n_k})| \leq \lim_n \|x - y_{n_k}\| = d$$

y por lo tanto

$$\|x - y_0\| = \sup_{x^* \in X^*} |x^*(x - y_0)| \leq d = \inf_{y \in A} \|x - y_0\| \leq \|x - y_0\|$$

con lo que tendremos que $d = \|x - y_0\|$. $\square$

# Capítulo 7

# Aplicaciones

## 7.1 Sucesiones que alcanzan la norma

Vamos a ver una caracterización de la reflexividad de los espacios de Banach en términos de sucesiones que alcanzan la norma y $(P)$-sucesiones (Teorema 7.6). Los resultados que aparecen en esta sección se han sacado de [26]. La siguiente definición aparece en [30].

**Definición 7.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach, se dice que una sucesión $(x_n)_n \subset S_X$ es una $(P)$-sucesión si para todo $f \in S_{X^*}$, existe $g \in S_{X^*}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) < \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$.*

**Lema 7.1.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $Y$ un subespacio cerrado de $X$ y $(x_n)_n \subset S_Y$ una $(P)$-sucesión en $Y$. Entonces $(x_n)_n$ es una $(P)$-subsucesión en $X$.*

*Demostración.* Sea $f \in S_{X^*}$ y sea $a$ la norma de $f$ al restringirlo a $Y$. Claramente tendremos que $a \leq 1$. Si $a = 0$ tomemos $g \in S_{Y^*}$ tal que $\liminf_{n\to\infty} g(x_n) > 0$. Si tenemos que $a > 0$ tomemos $g \in S_{Y^*}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} f(x_n)/a < \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$. En ambos casos, por el teorema de Hahn-Banach podemos extender $g$ a un funcional en $X$ de norma 1 tal que

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) < \liminf_{n\to\infty} g(x_n).$$

□

**Lema 7.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $(x_n)_n \subset S_X$ una sucesión que satisface*

$$\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{n\to\infty} f(x_n). \tag{7.1}$$

*Si el supremo del miembro de la izquierda de la igualdad no se alcanza tendremos que $(x_n)_n$ es una $(P)$-sucesión. Recíprocamente, si tenemos que $(x_n)_n$ es una $(P)$-sucesión, entonces (7.1) se satisface y ninguno de los supremos se alcanza.*

*Demostración.* Supongamos que se cumple (7.1) y que no se alcanza el supremo del miembro de la izquierda de la igualdad. Sea $f \in S_{X^*}$, entonces tendremos que

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) < \sup_{h\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} h(x_n) = \sup_{h\in S_{X^*}} \liminf_{n\to\infty} h(x_n).$$

Por lo tanto, existe $g \in S_{X^*}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) < \liminf_{n\to\infty} g(x_n)$. Supongamos ahora que $(x_n)_n$ es una $(P)$-sucesión. Por un lado, la desigualdad

$$\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(x_n) \geq \sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$$

siempre se da. Claramente, por definición de $(P)$-sucesión tendremos que la otra desigualdad también se da y por lo tanto tendremos que se cumple (7.1). Si $\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$ se alcanzase en algún $f_0 \in S_{X^*}$, tendríamos que para todo $g \in S_{X^*}$

$$\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \geq \sup_{f\in S_{X^*}} \lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} g(x_n),$$

lo que es imposible por ser $(x_n)$ una $(P)$-sucesión. Por otro lado, si tuviésemos que $\sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ se alcanzase en algún $f_0 \in S_{X^*}$, tendríamos debido a $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \geq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ y a la igualdad (7.1), que $\sup_{h\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} h(x_n)$ se alcanzaría en $f$, pero acabamos de ver que esto es imposible. □

**Definición 7.2.** *Sea $X$ un espacio de Banach, diremos que una sucesión $(x_n)_n$ alcanza la norma en $X$ si $\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(x_n)$ se alcanza en $S_{X^*}$.*

Obsérvese que la noción de sucesión que alcanza la norma es una noción más débil que la de sucesión débilmente convergente. Existe una relación fuerte entre las $(P)$-sucesiones y las sucesiones que no alcanzan la norma como podemos ver en el siguiente Lema.

**Lema 7.3.** *Sea $X$ un espacio de Banach y sea $(x_n)_n \subset S_X$. Tendremos que:*

(i) *Si $(x_n)_n$ es una $(P)$-sucesión, entonces ninguna subsucesión suya alcanza la norma.*

(ii) *Si $(x_n)_n$ no tiene subsucesiones que alcanzan la norma, entonces tiene $(P)$-subsucesiones.*

*Por lo tanto, un espacio de Banach $X$ no contiene $(P)$-sucesiones si, y sólo si, cada sucesión acotada en $X$ tiene subsucesiones que alcanzan la norma.*

*Demostración.* Es inmediato que toda subsucesión de una $(P)$-sucesión es una $(P)$-sucesión y por lo tanto, por el Lema 7.2 no alcanza la norma.

Supongamos ahora que la sucesión $(x_n)_n$ no tiene subsucesiones que alcancen la norma. Por la Proposición 6.6 tendremos que existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que

$$\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Aplicando ahora el Lema 7.2 tendremos que $(x_{n_k})_k$ es una $(P)$-sucesión. Para ver la segunda parte es suficiente ver que si hay una sucesión $(x_n)_n$ que no tiene subsucesiones que alcanzan la norma, entonces existe una sucesión normalizada que también cumple esta condición. Claramente tendremos que $(x_n)_n$ contiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|x_{n_k}\| = a > 0$. En tal caso, $\limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}/\|x_{n_k}\|) = \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})/a$ para todo $f \in X^*$. Por lo tanto, si $\sup_{S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ no se alcanza, tampoco lo hace $\sup_{S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}/\|x_{n_k}\|)$. ☐

**Lema 7.4 ([26, Lemma 4.1]).** *Sea $X$ un espacio de Banach separable que no contiene $(P)$-sucesiones y sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $X$. Entonces $(x_n)_n$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que para cada $x \in X$,*

$$\begin{aligned} \sup_{f\in S_{X^*}} (f(x) - \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})) &= \sup_{f\in S_{X^*}} (f(x) - \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k})), \\ \inf_{f\in S_{X^*}} (f(x) - \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})) &= \inf_{f\in S_{X^*}} (f(x) - \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k})) \end{aligned} \tag{7.2}$$

*y $\sup_{f\in S_{X^*}}(x - \limsup_{x\to\infty} x_{n_k})$ se alcanza.*

*Demostración.* Asumamos que $(x_n)_n$ tiene una subsucesión convergente. Por el Lema 6.6, tendremos que esta subsucesión tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que satisface (7.2). Entonces tendremos que para $f \in S_{X^*}$

$$f(x) - \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) - \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x - \lim_{k\to\infty} x_{n_k}) = f(y)$$

para $y = x - \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Así que en este caso, el supremo que es la norma de $y$ se alcanza.

Supongamos ahora que $(x_n)_n$ no tiene subsucesiones convergentes. Consideremos $X$ como un subconjunto de $\ell^\infty(S_{X^*})$. Por el Lema 6.6 existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que satisface (7.2). Supongamos que existe un $x \in X$ tal que

$$\sup_{f \in S_{X^*}} \left(f(x) - \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})\right) \tag{7.3}$$

no se alcance. Como $(x_n)_n$ es acotado, existe una subsucesión de $(x_{n_k})_k$ que denotaremos por $(y_n)_n$ tal que $\lim \|x - y_n\| = a$ existe. Como $(x_n)_n$ no tiene subsucesiones convergentes en norma, tendremos que $a > 0$ y además podemos suponer que $y_n \neq x$ para todo $n$. Sea $z_n = (x - y_n)/\|x - y_n\|$. Vamos a ver que $(z_n)_n$ es una $(P)$-sucesión con lo que llegaremos a una contradicción. Como $(y_n)_n$ es una subsucesión de $(x_{n_k})_k$ tendremos que $(y_n)_n$ también satisface (7.2). Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(z_n) &= a^{-1} \sup_{f \in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(x - y_n) \\
&= a^{-1} \sup_{f \in S_{X^*}} \liminf_{n\to\infty} f(x - y_n) \\
&= \sup_{f \in S_{X^*}} \liminf_{n\to\infty} f(z_n).
\end{aligned}$$

Si vemos que $\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(z_n)$ no se alcanza, junto a la igualdad anterior, por el Lema 7.2 tendremos que $(z_n)_n$ es una $(P)$-sucesión. Supongamos que se alcanza $\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(z_n)$. Vamos a ver que entonces (7.3) también se alcanzaría y con ello llegaríamos a una contradicción. Sea $f \in S_{X^*}$ tal que

$$\begin{aligned}
\sup_{f \in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(x - x_{n_k}) &= \sup_{f \in S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty} f(x - y_n) \\
&= \limsup_{n\to\infty} f(x - y_n) \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} f(x - x_{n_k}).
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que $\sup_{S_{X^*}} \limsup_{n\to\infty}(f(x - x_{n_k}))$ se alcanza y con ello terminamos la prueba. $\square$

**Proposición 7.5 ([26, Proposition 4.2]).** *Sea $X$ un espacio de Banach separable que no contiene $(P)$-sucesiones. Entonces, toda sucesión acotada $(x_n)_n$ en $X$ tiene una subsucesión que converge puntualmente en $S_{X^*}$ hacia algún $z \in X^{**}$ y $z$ alcanza su norma en $S_{X^*}$.*

*Demostración.* Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $X$. Supongamos sin perdida de generalidad que $(x_n)_n$ está contenida en la bola unidad. Tomemos una subsucesión $(x_{n_k})_k$ como la dada en el Lema 7.4 y sea $z$ una función definida sobre $X^*$ dada por $z(f) = \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Vamos a ver que

$z(f) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ para todo $s \in X^*$ de donde podremos deducir que $z$ es lineal y acotada en la bola unidad de $X^*$ y por lo tanto $z \in X^{**}$. Además, como $X$ no tiene $(P)$-sucesiones, tendremos que $\|z\| = \sup_{f\in S_{X^*}} \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ se alcanza por el Lema 7.3.

Consideremos $X$ como un subconjunto de $\ell^\infty(S_{X^*})$. Supongamos que existe algún $f_0 \in S_{X^*}$, una subsucesión $(p_m)_m$ de $(x_{n_k})_k$ y un $b > 0$ tales que

$$f_0(p_m - z) \geq b > 0 \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Tomemos $z_n = p_n - z$, $A_n = \operatorname{conv}\{z_i : i \geq n\}$ y fijemos $\delta > 0$ y $0 < \varepsilon < 1$ tales que $(1+\varepsilon)\delta + 2\varepsilon < b$. Construyamos las sucesiones $(y_n)_n$ y $(\alpha_n)_n$ dadas por el Lema 6.2. En tal caso tendremos

$$\begin{aligned} y_n + z \in A_n + z &= \operatorname{conv}\{p_i - z : i \geq n\} + z \\ &= \operatorname{conv}\{p_i : i \geq n\}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Definamos $v(f) = \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Como $(p_m)_m$ es una subsucesión de $(x_{n_k})_k$ e $y_n \in A_n = \operatorname{conv}\{z_i : i \geq n\}$, tendremos que

$$\begin{aligned} z = \liminf_{k\to\infty} x_{n_k} &\leq \liminf_{n\to\infty}(z_n + z) \leq \liminf_{n\to\infty}(y_n + z) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}(y_n + z) \leq \limsup_{n\to\infty}(z_n + z) \leq \limsup_{k\to\infty} x_{n_k} = v. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Por (7.4), $x = (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{k-1}(y_k + z) \in X$. Por lo tanto

$$\sup_{f\in S_{X^*}} (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{k-1} y_k(f) = \sup_{f\in S_{X^*}} (x-z)(f) = \sup_{f\in S_{X^*}} (x-v)(f) \tag{7.6}$$

donde la segunda igualdad se cumple porque habíamos tomado una subsucesión $(x_{n_k})_k$ dada por el Lema 7.4. Por este mismo Lema tendremos que existe un $g \in S_{X*}$ tal que

$$\sup_{f\in S_{X^*}} (x-v) = (x-v)(g).$$

Para $m \in \mathbb{N}$, por (7.6) y por la definición de $\alpha_n$ tendremos

$$\begin{aligned} (1-\varepsilon)\lim_n \alpha_n &= \sup_{f\in S_{X^*}} (1-\varepsilon)\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{k-1} y_k(f) = \sup_{f\in S_{X^*}} (x-v)(f) \\ &= [(1-\varepsilon)\sum_{k=1}^\infty \varepsilon^{k-1}(y_k + z - v)](g) \\ &\leq (1-\varepsilon)\sum_{k\neq m+1} \varepsilon^{k-1} y_k(g) + (1-\varepsilon)\varepsilon^m (y_{m+1} + z - v)(g) \\ &\leq (1-\varepsilon)\alpha_m + 2(1-\varepsilon)\sum_{k>m+1} \varepsilon^{k-1} \\ &+ (1-\varepsilon)\varepsilon^m (y_{m+1} + z - v)(g) \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad sale porque $(z-v)(g) \leq 0$ por (7.5). Por la desigualdad que acabamos de obtener y por el Lema 6.2 tendremos que

$$\begin{aligned}\varepsilon^m(y_{m+1}+z-v)(g) &\geq \operatorname{lím}\alpha_n - \alpha_m - \frac{2\varepsilon^{m+1}}{1-\varepsilon}\\ &\geq \alpha_m + \frac{\varepsilon^m}{1-\varepsilon}(\alpha_1-(1+\varepsilon)\delta) - \alpha_m - \frac{2\varepsilon^{m+1}}{1-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para $n \in \mathbb{N}$ tendremos que

$$(y_m+z-v)(g) \geq (\alpha_1-(1+\varepsilon)\delta-2\varepsilon)/(1-\varepsilon).$$

Como por (7.5), $\operatorname{lím\,inf}_{m\to\infty} y_m+z-v \leq 0$, tendremos que $\alpha_1 \leq (1+\varepsilon)\delta+2\varepsilon$. Por otro lado, como $y_1 = \sum t_i z_i$ para ciertos $t_i \geq 0$ tales que $\sum t_i = 1$ también tendremos

$$\alpha_1 = \sup_{f\in S_{X^*}} y_1(f) \geq \sum t_i z_i(f_0) \geq b > (1+\varepsilon)\delta + 2\varepsilon,$$

con lo que llegamos a una contradicción. □

**Teorema 7.6 ([26, Theorem 4.3]).** *Sea $X$ un espacio de Banach. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$X$ es reflexivo.*

(ii) *Toda sucesión acotada $(x_n)_n$ en $X$ tiene subsucesiones que alcanzan la norma.*

(iii) *Toda sucesión acotada $(x_n)_n$ en $X$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_k$ para la que se alcanza* $\sup_{f\in S_{X^*}} \operatorname{lím\,inf} f(x_{n_k})$.

(iv) *$X$ no contiene $(P)$-sucesiones.*

*Demostración.* (i) ⇒ (ii). Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada de un espacio de Banach reflexivo $X$. Tendremos entonces que existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ que converge débilmente a un $x \in X$. Sea $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Entonces, para cada $h \in S_{X^*}$ tendremos que

$$\operatorname{lím\,sup} h(x_{n_k}) = \operatorname{lím} h(x_n) = h(x) \leq \|x\|$$

y por lo tanto el supremo del límite superior se alcanza en $f$.

(ii) ⇒ (iii). Sea $(x_n)_n$ una sucesión acotada en $X$. Tendremos que existe $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_n$ y $h \in S_{X^*}$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} h(x_{n_k}) = \sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) &\geq \lim_{k\to\infty} h(x_{n_k}) = \sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \\ &\geq \sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k})\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\sup_{f\in S_{X^*}} \liminf f(x_{n_k})$ se alcanza en $h$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Por la Proposición 6.6, existe una una subsucesión $(y_n)_n$ de $(x_n)_n$ tal que para toda subsucesión $(y_{n_k})_k$ de $(y_n)_n$ se cumple que

$$\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = \sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Por hipótesis, existe una subsucesión $(y_{n_k})_k$ de $(y_n)_n$ y $h \in S_{X^*}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} h(y_{n_k}) = \sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{k\to\infty} f(y_{n_k}).$$

Tendremos entonces que

$$\begin{aligned}\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(y_{n_k}) &\geq \lim_{k\to\infty} h(y_{n_k}) = \sup_{f\in S_{X^*}} \liminf_{k\to\infty} f(y_{n_k}) \\ &= \sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(y_{n_k})\end{aligned}$$

y por lo tanto, $\sup_{f\in S_{X^*}} \limsup_{k\to\infty} f(x_{n_k})$ se alcanza en $h$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iv) es el Lema 7.3.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Supongamos que $X$ no tiene $(P)$-sucesiones y supongamos que $X$ no es reflexivo. Sea $Y$ un subespacio no reflexivo separable de $X$. Por el Lema 7.1 tendremos que $Y$ no contiene ninguna $(P)$-sucesión. Vamos a ver que $Y$ contiene una copia isomórfica de $\ell^1$. Si $Y$ no tuviese una copia de $\ell^1$, entonces por el Teorema de Odell-Rosenthal (véase [10, Chapter XIII, Theorem 10]) tendremos que $S_X$ es $w^*$-sucesionalmente denso en $S_{X^{**}}$, es decir, cada elemento de $S_{X^{**}}$ será el $w^*$-límite de una sucesión en $S_X$. Como $X$ no es reflexivo, por el Teorema de James (Teorema 6.1) tendremos que existe un $\varphi \in S_{X^{**}}$ tal que su supremo sobre $S_{X^*}$ no se alcanza. Tomemos entonces una sucesión $(x_n)_n \subset S_X$ tal que $w^*$-$\lim x_n = \varphi$. Claramente $(x_n)_n$ es una $(P)$-sucesión, lo que es imposible por estar afirmando (iv). Por lo tanto $Y$ contiene una copia isomórfica de $\ell^1$. Sea $(x_n)_n$ una $\ell^1$-base isomórfica en $Y$. Por la proposición 7.5, existe una subsucesión de $(y_n)_n$ de $(x_n)_n$ que converge puntualmente en $Y^*$ y esta subsucesión vuelve a ser una $\ell^1$-base. Tomemos

$T : \ell^1 \hookrightarrow Y$ la aplicación lineal dada por $T(e_n) = y_n$, donde $(e_n)_n$ es la base usual de $\ell^1$. Tendremos que la aplicación dual $T^* : Y^* \to \ell^\infty$ es suprayectiva por lo que podremos tomar un $f \in Y^*$ tal que $T^* f = (-1, 1, -1, 1, \dots)$. En tal caso, $f(y_n) = f(Te_n) = T^* f(e_n)$ y por lo tanto, $f(y_n) = (-1)^n$ y de aquí tendremos que $f(y_n)$ no es convergente lo que es imposible porque $(y_n)_n$ convergía puntualmente sobre $Y^*$. Así concluimos que $X$ es reflexivo. $\square$

## 7.2 Compacidad débil en $L^1(\mu, X)$

Vamos a ver ahora una caracterización de la compacidad débil que en $L^1(\mu, X)$ donde $L^1(\mu, X)$ es el espacio de las clases de equivalencia de las funciones integrables Bochner sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mu)$ en un espacio de Banach, dotando a este espacio con la norma $\|f\|_1 = \int \|f\| d\mu$. Esta caracterización aparece en [11] aunque inicialmente fue obtenida por Ülger (véase [34]) para conjuntos uniformemente acotados. De este resultado se puede obtener una caracterización de la compacidad en espacios de Banach, tal como se hace en [11], que también se puede obtener directamente del Teorema de James como se ve en [34].

**Definición 7.3.** *Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Una función $f : \Omega \to X$ se dice que es simple si existen $x_1, \dots, x_n \in X$ y $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ tales que $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} x_i$.*

**Definición 7.4.** *Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida finita y $X$ un espacio de Banach. Se dice que $f : \Omega \to X$ es fuertemente medible, medible Bochner o $\mu$-medible si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_n f_n(w) = f(w) \text{ en casi todo } w \in \Omega.$$

**Definición 7.5.** *Sea $f = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} x_i$ una función simple. Se define la integral de Bochner de $f$ como*

$$\int_\Omega f \; d\mu = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) x_i.$$

**Definición 7.6.** *Una función $f : \Omega \to X$ medible Bochner se dice integrable Bochner si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_n$ tal que*

$$\lim_n \int_\Omega \|f - f_n\| \; d\mu = 0.$$

*En tal caso, el límite* $\lim_n \int_\Omega f_n d\mu$ *existe y es independiente de la elección de* $(f_n)_n$. *Se define la integral de Bochner de* $f$ *como*

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n d\mu.$$

**Definición 7.7.** *Sea* $A$ *un subconjunto de* $L^1(\mu, X)$. *Se dice que* $A$ *es uniformemente integrable si*

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |f| d\mu = 0$$

*uniformemente para* $f \in A$.

**Definición 7.8.** *Sea* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ *un espacio de medida finita y* $X$ *un espacio de Banach. Se dice que* $f : \Omega \to X$ *es débilmente medible si para cada* $x^* \in X^*$ *se tiene que* $x^* f$ *es* $\mu$*-medible.*

**Teorema 7.7 (de medibilidad de Pettis).** *Una función* $f : \Omega \to X$ *es fuertemente medible si, y sólo si, es esencialmente separable (es decir, que existe un conjunto cuyo complementario es de medida nula tal que su imagen es un conjunto separable en norma) y débilmente medible.*

**Teorema 7.8 ([11, Theorem 1.1]).** *Sea* $A$ *un subconjunto acotado de* $L^1(\mu, X)$. *Son equivalentes*

(i) *$A$ es débilmente relativamente compacto.*

(ii) *$A$ es uniformemente integrable, y dada cualquier sucesión* $(f_n)_n \subset A$ *existe una sucesión* $(g_n)_n$ *con* $g_n \in \operatorname{conv}\{f_k : k \geq n\}$ *tal que* $(g_n(w))_n$ *es convergente en norma en* $X$ *para casi todo* $w \in \Omega$.

(iii) *$A$ es uniformemente integrable y dada una sucesión* $(f_n)_n \subset A$ *existe una subsucesión* $(g_n)_n$ *con* $g_n \in \operatorname{conv}\{f_k : k \geq n\}$ *tal que* $(g_n(w))_n$ *es débilmente convergente en* $X$ *para casi todo* $w \in \Omega$.

*Demostración.* Supongamos que se da (i). Entonces $A$ es uniformemente integrable (véase por ejemplo [12, p. 104]), y si $(f_n)_n$ es una sucesión en $A$, entonces alguna subsucesión $(f_{n_k})_k$ converge débilmente a algún $f \in \mathrm{L}^1(\mu, X)$ y por lo tanto, $f$ está en la clausura débil de todos los conjuntos de la forma $\operatorname{conv}\{f_{n_m} : m \geq k\}$, pero estos conjuntos son convexos, con lo que la clausura en la topología débil coincide con su clausura en norma $\|\cdot\|_1$, así que existe una sucesión $h_k \in \operatorname{conv}\{f_{n_m} : m \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $\|h_k - f\|_1 \to 0$. De aquí podemos deducir que existe una subsucesión $(g_n)_n$ de $(h_k)_k$ que converge a $f$ en casi todo punto en la norma de $X$.

(ii) implica (iii) es inmediato.

Veamos (iii) implica (i). Por el Teorema 5.14 es suficiente ver que tenemos la propiedad del intercambio de límites con la bola unidad de $L^1(\mu, X)^*$. Sean $(f_m)_m \subset A$ y $(\varphi_n)_n \subset B_{L^1(\mu,X)^*}$ dos sucesiones tales que los siguientes límites existan:

$$\alpha := \lim_n \lim_m \varphi_n(f_m) \qquad \beta := \lim_m \lim_n \varphi_n(f_m).$$

Sea $(g_n)_n$ con $g_n \in \mathrm{conv}\{f_k : k \geq n\}$ tal que $(g_n(w))_n$ es débilmente convergente en $X$ para todo $w \in \Omega \backslash E$ para cierto $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$. Sea $g : \Omega \to X$ la función definida como el límite débil puntual de $(g_n)_n$ en $\Omega \backslash E$ y definida como 0 en $E$. De la definición de $g$ tendremos claramente que es esencialmente separable y débilmente medible, y por lo tanto, por el Teorema 7.7, $g$ es fuertemente medible. Por el Lema de Fatou, al ser $A$ uniformemente acotado y $\mu$ una probabilidad, tendremos que

$$\int \|g\| d\mu \leq \int \liminf \|g_n\| d\mu \leq \liminf \int \|g_n\| d\mu < \infty,$$

así que $g \in L^1(\mu, X)$. Veamos que la sucesión $(g_n)_n$ converge débilmente en $L^1(\mu, X)$ a $g$. Como $g_n$ es fuertemente medible tendremos que es esencialmente separable y por lo tanto existe un conjunto $A_n$ con complementario de medida nula tal que su imagen es un conjunto separable en norma. Tomemos una base de entornos numerable de $g_n(A_n)$ y denotemos por $\Sigma_n$ al conjunto de las anti-imágenes de estos entornos. Si de forma análoga para $g$ construimos $\Sigma_0$, tomando $\Sigma'$ el $\sigma$-álgebra generado por la unión de todos los $\Sigma_i$ tendremos que $(g_m)_m$ y $g$ están contenidos en $L^1(\mu, \Sigma', X)$ y de esta forma, podemos considerar que $L^1(\mu)$ es separable. En tal caso, usando [14, Ch. VI.8, Corollary 7] tendremos que los funcionales lineales $\tilde{h}$ en $L^1(\mu, X)$ son representados por funciones $w^*$-medibles $h : \Omega \to X^*$ con $\|h(\cdot)\| \in L^\infty(\mu)$, mediante $\tilde{h}(f) = \int \langle h, f \rangle d\mu$ para todo $f \in L^1(\mu, X)$. Tomemos $h$ de dicha forma, la integrabilidad uniforme de $\langle h, g_n \rangle$ y el hecho de que $\langle h(\cdot), g_n(\cdot) \rangle \to \langle h(\cdot), g(\cdot) \rangle$ para casi todo $\Omega$, junto con el teorema de convergencia de Vitali (véase por ejemplo [14, Ch. III.6, Theorem 15]) implica que $\langle \tilde{h}, g_n \rangle \to \langle \tilde{h}, g \rangle$. Por lo tanto $(g_n)_n$ converge débilmente a $g$.

Si $h_m = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_{k_i}$ es una combinación convexa de $(f_m)_m$ y $\varphi \in L^1(\mu, X)^*$ es tal que $\gamma := \lim_m \varphi(f_m)$ existe, entonces

$$|\gamma - \varphi(h_m)| = |\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\gamma - \varphi(f_{k_i}))| \leq \max_{1 \leq i \leq r} \{|\gamma - \varphi(f_{k_i})|\}$$

y de aquí obtendremos que $\alpha = \varphi(g) = \beta$, donde $\varphi$ es un $w^*$-punto de aglomeración de $(\varphi_n)_n$ y por lo tanto tenemos la propiedad del intercambio de límites. $\square$

Tomando $\Omega$ como un sólo elemento obtendremos:

**Corolario 7.9.** *Para un subconjunto $A$ de un espacio de Banach $X$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *$A$ es débilmente relativamente compacto.*

(ii) *Para cada sucesión $(x_n)_n \subset A$ contenida en $A$, existe una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in \operatorname{conv}\{x_k : k \geq n\}$ que es convergente en norma.*

(iii) *Para cada sucesión $(x_n)_n \subset A$ contenida en $A$, existe una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in \operatorname{conv}\{x_k : k \geq n\}$ débilmente convergente.*

Utilizando el Teorema de James podemos dar una prueba directa del Corolario anterior tal como se hace en [34]. Vamos a mostrar esa prueba en la siguiente Proposición.

**Proposición 7.10 ([34, Lemma 2.1]).** *Sea $A$ un subconjunto acotado de un espacio de Banach $X$. Entonces $A$ es débilmente relativamente compacto si, y sólo si, para toda sucesión $(x_n)_n$ en $A$, existe una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in \operatorname{conv}\{x_m : m \geq n\}$ que converge débilmente.*

*Demostración.* Supongamos que $A$ es débilmente relativamente compacto. Tendremos entonces que dada una sucesión cualquiera $(x_n)_n$ existe una subsucesión $(y_n)_n$ débilmente convergente.

Veamos el recíproco. Por el Teorema de James (Teorema 6.1) es suficiente ver que cada elemento $x^* \in X^*$ alcanza su supremo en $B := \overline{\operatorname{conv} A}$. Sea $x^* \in X^*$ no nulo y sea $\beta = \sup_{x \in A} x^*(x) = \sup_{x \in B} x^*(x)$. Tendremos entonces que existe una sucesión $(x_n)_n$ en $A$ tal que $\beta = \lim_n x^*(x_n)$. Por hipótesis, existe una sucesión $(y_n)_n$ con $y_n \in \operatorname{conv}\{x_m : m \geq n\}$ que converge débilmente a un elemento $a \in B$. Cada $y_n$ es de la forma

$$y_n = \sum_{i=n}^{k_n} \lambda_i^n x_i, \quad \text{con} \quad \lambda_i^n \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=n}^{k_n} \lambda_i^n = 1.$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $\beta = \lim_n x^*(x_n)$ existe $N$ tal que para todo $n \geq N$ tenemos que $x^*(x_n) > \beta - \varepsilon$ y por lo tanto, para $n \geq N$,

$$x^*(y_n) = \sum_{i=n}^{k_n} \lambda_i^n x^*(x_i) > \sum_{i=n}^{k_n} \lambda_i^n (\beta - \varepsilon) = \beta - \varepsilon.$$

Así que $x^*(a) \geq \beta - \varepsilon$ y como $\varepsilon$ es arbitrario tendremos que $x^*(a) \geq \beta$. Por otro lado, $a \in B$ y $\beta = \sup_{x \in B} x^*(x)$ de donde concluimos que $x^*(a) = \beta$. Por el Teorema 6.1 tendremos que $B$ es débilmente compacto y por lo tanto $A$ es débilmente relativamente compacto. $\square$

## 7.3 Topologías de convergencia sobre fronteras

En esta sección vamos a mostrar algunos resultados que se pueden deducir a partir del Teorema de James que relacionan algunas nociones de compacidad débil con nociones de compacidad en topologías de convergencia sobre algunos subconjuntos del dual. Para ello necesitamos mostrar primero algunos resultados previos. Empecemos recordando lo que es la compactificación de Stone-Čech de un espacio $(X, \tau)$ completamente regular. Consideremos la inclusión

$$S : (X, \tau) \hookrightarrow (\mathbb{R}^{C^*(X)}, \tau_p)$$

dada por $S(x) = (f(x))_f$. Teniendo en cuenta que $X$ es completamente regular es fácil ver que la topología producto induce sobre $X$ su topología original.

**Definición 7.9.** *En las condiciones anteriores, la compactificación de Stone-Čech de $X$ (que se denotará por $\beta X$) se define como $\overline{S(X)}$.*

Como $S(X)$ es puntualmente acotado, gracias al Teorema de Tychonoff podremos asegurar que es relativamente compacto y por lo tanto $\beta X$ es compacto. Además, $\beta X$ tiene la propiedad de que toda función continua $f \in C^*(X)$ tiene una única extensión $f^\beta \in C(\beta X)$. Esta extensión única nos permite identificar $C^*(X)$ con $C(\beta X)$ que además coincidirán en norma (del supremo) ya que por un argumento de compacidad tendremos que

$$f^\beta(\beta X) = \overline{f(X)}$$

y por lo tanto

$$\sup_{x \in X} |f(x)| = \sup_{x \in \beta X} |f^\beta(\beta X)|.$$

**Proposición 7.11.** *Sea $X$ un espacio topológico completamente regular y sea $H \subset C^*(X)$. Entonces son equivalentes:*

(i) *$H$ es débilmente relativamente compacto.*

(ii) *$H$ es uniformemente acotado en $X$ y $w_{\beta X}$-relativamente compacto.*

(iii) *$H$ es uniformemente acotado en $X$ e intercambia límites dobles con $X$.*

*Demostración.* Teniendo en cuenta que $C^*(X) = C(\beta X)$ como espacios normados tendremos que la equivalencia de (i) con (ii) es debida al Corolario 2.25. La equivalencia entre (ii) y (iii) nos la da el Corolario 2.8. $\square$

Gracias a la Proposición anterior podremos ligar la noción de intercambio de límites con la noción de compacidad en $\ell^\infty(X)$ para $X$ un conjunto cualquiera.

**Lema 7.12.** *Sea $X$ un conjunto y $Q \subset \ell^\infty(X)$ un conjunto uniformemente acotado que además intercambia límites con $X$. Entonces $\overline{Q}^{w_X}$ es compacto en la topología débil $w$ del espacio normado $\ell^\infty(X)$ y $w = w_X$ en $\overline{Q}^{w_X}$.*

*Demostración.* Si dotamos a $X$ de la topología discreta (es decir, todos los subconjuntos de $X$ son abiertos) tendremos que $X$ es completamente regular y $\ell^\infty(X) = C^*(X) = C(\beta X)$ como espacios normados. Tendremos entonces por la Proposición 7.11 que $Q$ es débilmente relativamente compacto y por lo tanto $(\overline{Q}^w, w)$ es compacto. Como la topología $w_X$ es más gruesa que la topología $w$ tendremos que coinciden en $\overline{Q}^w$ de donde se deduce que $\overline{Q}^w$ es $w_X$ compacto y por lo tanto $\overline{Q}^w = \overline{Q}^{w_X}$. $\square$

**Proposición 7.13.** *Sea $X$ un conjunto y $L$ un subespacio de $\ell^\infty(X)$ tal que todo $f \in L$ alcanza su supremo en $X$. Si $Q \subset L$ es un subconjunto convexo y $w_X$-relativamente numerablemente compacto en $L$, entonces $\overline{Q}^{w_X}$ es uniformemente acotado en $X$ y compacto en la topología débil $w$ del espacio normado $\ell^\infty(X)$ y además las topologías $w$ y $w_X$ coinciden en $\overline{Q}^{w_X}$.*

*Demostración.* Basta con aplicar el Teorema 6.9 y el Lema 7.12. $\square$

Veamos que podemos asegurar cuando tenemos que las funciones alcanzan su supremo sobre $X$ en un subconjunto $Y \subset X$.

**Corolario 7.14.** *Sea $X$ un conjunto, $Y \subset X$ un subconjunto y $L$ un subespacio de $\ell^\infty(X)$ tal que todo $f \in L$ alcanza su supremo sobre $X$ en $Y$. Entonces todo conjunto $Q$ convexo $w_Y$-relativamente numerablemente compacto de $L$ es $w_X$-relativamente numerablemente compacto en $L$. Además, sobre $\overline{Q}^{w_X}$ las topologías $w_X$, $w_Y$, $\sigma(\ell^\infty(Y), \ell^\infty(Y)')$, y $\sigma(\ell^\infty(X), \ell^\infty(X)')$ coinciden.*

*Demostración.* Debido a que todo $f \in L$ alcanza su supremo en $Y$ tendremos que la aplicación restricción

$$L \to \ell^\infty(Y)$$

es inyectiva. En particular tendremos que $w_Y$ es una topología Hausdorff sobre $L$ y aplicando la Proposición 7.13 podremos deducir que $Q$ es un subconjunto $\sigma(\ell^\infty(X), \ell^\infty(X)')$-relativamente numerablemente compacto. Usando de nuevo que cada $f \in L$ alcanza su supremo sobre $Y$ tendremos que la inclusión

$$L \to \ell^\infty(X)$$

es una isometría si equipamos a $L$ con la norma $\|\cdot\|_Y$ y $\ell^\infty(X)$ con la norma $\|\cdot\|_X$ y por lo tanto es continua con las respectivas topologías débiles. Tendremos así que $Q$ es $\sigma(\ell^\infty(X), \ell^\infty(X)')$-relativamente numerablemente compacto en $L$ y en particular $w_X$-relativamente numerablemente compacto en $L$. De nuevo por la Proposición 7.13 tendremos que las topologías $w_X$ y $\sigma(\ell^\infty(X), \ell^\infty(X)')$ coinciden sobre el conjunto $\sigma(\ell^\infty(X), \ell^\infty(X)')$-compacto $\overline{Q}^{w_X}$ y por lo tanto, también coinciden con las topologías más gruesas $w_Y$ y $\sigma(\ell^\infty(Y), \ell^\infty(Y)')$. □

**Definición 7.10.** *Dado $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo, $F \subset E'$ un subespacio del dual topológico y $\mathcal{U}$ un conjunto de entornos de 0 en $E$ tal que $\{\varepsilon U : \varepsilon > 0, U \in \mathcal{U}\}$ es una base de entornos de 0, diremos que $F$ tiene la propiedad $R$ si para todo $U \in \mathcal{U}$ y todo $x \in E$ se cumple que*

$$\max_{\varphi \in U^\circ} \varphi(x) = \max_{\varphi \in U^\circ \cap F} (x).$$

Obsérvese que en la definición se habla de máximo, es decir, estamos diciendo que este se debe de alcanzar en algún elemento de $U^\circ \cap F$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Obsérvese también que todo subespacio $F \subset E'$ con la propiedad $R$ debe de ser $\sigma(E', E)$-denso en $E'$ por lo que tendremos que $\sigma(E, F)$ es una topología de Hausdorff en $E$.

**Teorema 7.15.** *Sea $(E, \tau)$ un espacio localmente convexo, $F \subset E'$ un subespacio con la propiedad $R$ y $A \subset E$ convexo y $\sigma(E, F)$-relativamente numerablemente compacto. Entonces el conjunto*

$$\overline{A}^{\sigma(E,F)}$$

*es $\tau$-acotado y las topologías $\sigma(E, F)$ y $\sigma(E, E')$ coinciden sobre él.*

*Demostración.* Si tomamos $X = U^\circ$, $Y = U^\circ \cap F$, $L = E|_{U^\circ}$, $Q = A|_{U^\circ}$ y consideramos la inclusión

$$A|_{U^\circ} \subset E|_{U^\circ} \to \ell^\infty(U^\circ),$$

estamos en la situación del Corolario 7.14 por lo que tendremos que las topologías $w_{U^\circ}$ y $w_{U^\circ \cap F}$ coinciden en el conjunto

$$\overline{A|_{U^\circ}}^{w_{U^\circ}} = \overline{A|_{U^\circ}}^{w_{U^\circ \cap F}}$$

que es $w_{U^\circ}$ compacto y $w_{U^\circ \cap F}$ compacto. Además, este conjunto está uniformemente acotado en $U^\circ$ y por lo tanto es $\tau$-acotado. Ahora considerando

$$\overline{A}^{\sigma(E,F)} \hookrightarrow \prod_{U\in\mathcal{U}} \overline{A|_{U^\circ}}^{w_{U^\circ\cap F}}$$

donde $\mathcal{U}$ es el conjunto de entornos de 0 en $E'$ tendremos que las topologías producto $\prod_{w_{U^\circ}}$ y $\prod_{w_{U^\circ\cap F}}$ inducen $\sigma(E,E')$ y $\sigma(E,F)$ respectivamente sobre $\overline{A}$ por los que estas últimas coinciden en $\overline{A}$. □

**Corolario 7.16 (M. De Wilde).** *Sean $E$ y $F$ como en el Teorema anterior y sea $A$ un conjunto convexo de $E$. Tendremos que:*

(i) *$A$ es $\sigma(E,F)$-compacto si, y sólo si, es $\sigma(E',E)$ compacto. Lo mismo ocurre con numerablemente compacto, sucesionalmente compacto y las nociones relativas.*

(ii) *Si $\overline{A}$ es $\mu(E,E')$-completo y $\sigma(E,F)$-relativamente numerablemente compacto, entonces es $\sigma(E,E')$-relativamente compacto.*

*Demostración.* La primera parte es inmediata a partir del Teorema 7.15. Si $\overline{A}$ es $\mu(E,E')$ completo, entonces, por el Teorema de Eberlein-Grothendieck (Teorema 5.14) tendremos que $A$ es $\sigma(E,E')$-relativamente compacto si es $\sigma(E,E')$-relativamente numerablemente compacto. Esto junto a (i) demuestra (ii). □

**Corolario 7.17 (I. Tweddle).** *En las condiciones del Teorema 7.15, si $E$ además es un espacio sucesionalmente completo y $(x_n)_n$ es una sucesión $\sigma(E,E')$-acotada que converge a 0 en la topología $\sigma(E,F)$, entonces dicha sucesión está contenida un subconjunto de $E$ $\sigma(E,E')$-compacto y absolutamente convexo.*

*Demostración.* Como la sucesión $(x_n)_n$ es $\sigma(E,E')$-acotada (y por lo tanto $\tau$-acotada) y $E$ es sucesionalmente completo tendremos que

$$\begin{array}{rccl} T: & \ell^1 & \to & E \\ & (\xi_n)_n & \rightsquigarrow & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \end{array}$$

está bien definida. Como $(x_n)_n$ $\sigma(E,F)$-converge a 0 tendremos que para cada $\varphi \in F$

$$S\varphi := (\varphi(x_n))_n \in c_0$$

y además $c_0' = \ell^1$, así que

$$\varphi(T((\xi_n)_n)) = \sum_n \xi_n \varphi(x_n) = (\xi_n)_n(S\varphi)$$

donde en el último miembro de la igualdad estamos viendo $(\xi_n)_n$ como un elemento del dual de $c_0$. De esta última igualdad se deduce inmediatamente que $T$ es $\sigma(\ell^1, c_0)$-$\sigma(E,F)$-continuo. Por lo tanto, $T(B_{\ell^1})$ es $\sigma(E,F)$ compacto y por el Corolario 7.16 tendremos que es $\sigma(E,E')$-compacto por lo que $T(B_{\ell^1})$ es el conjunto que buscábamos. $\square$

**Corolario 7.18.** *Las sucesiones de Cauchy $\tau$-acotadas son las mismas para $\sigma(E,F)$ y $\sigma(E,E')$.*

*Demostración.* Basta con que apliquemos el Corolario 7.17 y el Teorema 7.15 a la $\tau$-compleción de $E$ dada por el Teorema 5.7 y tengamos en cuenta que una sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy si, y sólo si, para toda subsucesión $(y_m)_m$ de $(x_n)_n$ se tiene que la sucesión $(y_{m+1} - y_m)_m$ converge a 0. $\square$

**Corolario 7.19.** *En las condiciones del Teorema 7.15, si $E$ es un espacio sucesionalmente completo y $A$ es un conjunto $\tau$-acotado, entonces $A$ es $\sigma(E,F)$-sucesionalmente compacto si, y sólo si, es $\sigma(E,E')$-sucesionalmente compacto. La equivalencia se da también con las respectivas nociones relativas.*

*Demostración.* Basta ver que si $(x_n)_n$ es una sucesión $\sigma(E,F)$-convergente, entonces también es $\sigma(E,E')$ convergente. Si $(x_n)_n$ es $\sigma(E,F)$-convergente entonces es de Cauchy en la topología $\sigma(E,F)$ y por el Corolario 7.18 también lo será en $\sigma(E,E')$. Sea $x$ el $\sigma(E,F)$-límites de $(x_n)_n$. Tendremos entonces que $(x_n - x)_n$ está en las condiciones del Corolario 7.17 y por lo tanto, está contenida en un subconjunto $A$ de $E$ que es $\sigma(E,E')$-compacto. Por lo tanto, como $(x_n)_n$ es de Cauchy en $\sigma(E,E')$ y está contenida en $A+x$ que es $\sigma(E,E')$-compacto tendremos que es convergente (y de hecho el límite tiene que ser $x$). $\square$

**Definición 7.11.** *Sea $X$ un espacio de Banach y $B$ un subconjunto de $B_{X^*}$. Se dice que:*

(i) *$B$ es un conjunto normante de $B_{X^*}$ si, para cada $x \in X$, se tiene que $\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B\}$;*

(ii) *$B$ es una frontera de James para $B_{X^*}$ si $\|x\| = \max\{|x^*(x)| : x^* \in B\}$ para cada $x \in X$.*

Dado un espacio de Banach $X$, el primer ejemplo de frontera que se nos debería ocurrir es el de los puntos extremales $\operatorname{ext} B_{X^*}$ de la bola dual. Un problema que se plantea asociado a esta definición es el problema de la frontera, que se pregunta si la compacidad débil de un subconjunto $A$ de un espacio de Banach $X$ es equivalente a la $\sigma(X,B)$-compacidad del mismo conjunto donde $B$ es una frontera de $B_{X^*}$. Gracias al Corolario 7.16 se puede dar una respuesta positiva cuando $A$ es convexo.

**Corolario 7.20.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $B$ una frontera de $B_{X^*}$ y $A$ un subconjunto convexo acotado de $X$. Entonces $A$ es $\sigma(X,B)$-compacto si, y sólo si, es débilmente compacto.*

*Demostración.* Si tomamos $F = \operatorname{span} B$, tendremos claramente que $F$ tiene la propiedad $R$ (en este caso $\mathcal{U} = \{B_X\}$). Por lo tanto, aplicando el Corolario 7.16, teniendo en cuenta que $\sigma(X,F) = \sigma(X,B)$ tendremos que un conjunto $A$ es $\sigma(X,B)$-compacto si, y sólo si, es débilmente compacto. $\square$

El problema de la frontera en general sigue abierto. Se tienen respuestas afirmativas en varios casos como cuando $B = \operatorname{ext}(B_{X^*})$ (véase por ejemplo [5]), cuando $X$ no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(\Gamma)$ con $|\Gamma| = \mathfrak{c}$ (véase [9, 18]) y cuando $X = C(K)$, dotado con su norma canónica $\|\cdot\|_\infty$, donde $K$ es un espacio compacto arbitrario (véase [8]).

Si cambiamos compacto por sucesionalmente compacto, podremos obtener la equivalencia aunque $A$ no sea convexo gracias al Corolario 7.19.

**Corolario 7.21.** *Sea $X$ un espacio de Banach, $B$ una frontera de $B_{X^*}$ y $A$ un subconjunto acotado de $X$. Entonces $A$ es $\sigma(X,B)$-sucesionalmente compacto si, y sólo si, es débilmente compacto.*

De aquí podemos ver la respuesta afirmativa del problema de la frontera en el caso $(X,\|\cdot\|)$ separable (caso particular de $\ell^1(\Gamma) \nsubseteq X$).

**Corolario 7.22.** *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable, $B$ una frontera de $B_{X^*}$ y $A$ un subconjunto acotado de $X$. $A$ es $\sigma(X,B)$-compacto si, y sólo si, es débilmente compacto.*

*Demostración.* Supongamos que $A$ es $\sigma(X,B)$-compacto. Como $X$ es separable, tendremos que $(B_{X^*}, w^*)$ es un espacio métrico compacto, y por lo tanto, $B$ es separable. Sea $D$ un conjunto $w^*$-denso numerable de $B$. Tendremos en tal caso que $B_{X^*} = \overline{B}^{w^*} = \overline{D}^{w^*}$ y por lo tanto, $\sigma(X,D)$ es una topología Hausdorff más gruesa que $\sigma(X,B)$. Como $A$ es $\sigma(X,B)$-compacto tendremos que $(A,\sigma(X,B)) = (A,\sigma(X,D))$ y por lo tanto, $A$ es $\sigma(X,D)$ compacto, y como $D$ es numerable tendremos que $A$ es $\sigma(X,D)$-sucesionalmente compacto y por lo tanto, $\sigma(X,B)$-sucesionalmente compacto. Aplicando ahora el Corolario 7.21 tendremos que $A$ es débilmente compacto. $\square$

# Bibliografía


[1] K. Astala and H. O. Tylli, *Seminorms related to weak compactness and to Tauberians operators*, Math. Porc. Camb. Phil. Soc. 107 (1990), 367-375.

[2] J. Banas and A. Martinón, *Measures of weak noncompactness in Banach sequence spaces*, Portugaliae Math. 52 (1995), 131-138.

[3] Y. Benyamini and J. Lindestrauss, *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*, American Mathematical Society, Providencd, RI, 2000.

[4] B. Cascales, W. Marciszewsky and M. Raja, *Distance to space of continuous functions.* To appear in Topology and its Appl. 2005

[5] B. Cascales,I. Namioka, J Orihuela and M. Raja, *Banach spaces and topology I*, Encyclopedia of General Topology. Elsevier Science B. B. Editors J. I. Nagata, J. E. VAughan, K. P. Hart., 2002.

[6] G. Choquet, *Lectures on analysis*, vol. 2. W.A. Benjamin Inc., New York, 1969.

[7] F.S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in a Banach space*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. J. 65 (1992), 333-343.

[8] R. Deville, V. Fonf and P. Hájek, *Analytic and polyhedral approximation of convex bodies in separable polyhedral Banach spaces*, Israel J. Math. 105 (1998), 139–154.

[9] R. Deville, G. Godefroy and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 64. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993. xii+376 pp.

[10] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, 92. Springer-Verlag, New York, 1984. xii+261 pp. ISBN: 0-387-90859-5.

[11] J. Diestel, W. M. Ruess and W. Schachermayer, *On weak compactness in* $L^1(\mu, X)$, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), no. 2, 447–453.

[12] J. Diestel and J. J. Uhl, *Vector measures*, With a foreword by B. J. Pettis. Mathematical Surveys, No. 15. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. xiii+322 pp.

[13] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, Mass. 1966 xvi+447 pp.

[14] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators. Part I. General theory*, With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle. Reprint of the 1958 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988. xiv+858 pp. (46-01).

[15] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, J. Pelant, V. Montesinos and V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite Dimensional Topology*, CMS Books in Mathematics 8. canadian Mathematical Society. Springer Verlag. 2001.

[16] M. Fabian, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler, *A quantitative version of Krein's theorem*, To apppear Rev. Mat. Iberoamericana, 2005.

[17] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 82b:46001.

[18] G. Godefroy, *Renormings of Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, 781–835, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[19] A. S. Granero, *An extension of the Krein-Šmulian theorem*, To apppear Rev. Mat. Iberoamericana, 2005.

[20] A. S. Granero, P. Hájek and V. Montesinos Santalucía, *Convexity and* $w^*$*-compactness in Banach spaces*, To appear Math. Ann., 2005.

[21] A. Grothendieck, *Criteres de compacité dans les espaces fontionnelles généraux*, Amer. J. Math 74 (1952), 168-186.

[22] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York, 1974. xv+408 pp

[23] J. L. Kelley and I. Namioka, *Linear topological spaces*, Springer-Verlag, New York, 1976, With the collaboration of W. F. Donoghue, Jr., Kenneth R. Lucas, B. J. Pettis, Ebbe Thue Poulsen, G. Baley Price, Wendy Robertson, W. R. Scott, and Kennan T. Smith, Second corrected printing, Graduate Texts in Mathematics, No. 36. MR 52 ♯ 14890.

[24] G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.k MR 40 ♯ 1750.

[25] A. Kryczka, S. Prus and M. Szczepanik, *Measure of weak noncompactness and real interpolation of operators*, Bull Austral. Math. Soc. 62 (2000), 389-401.

[26] E. Matoušcova and S. Reick, *Reflexivity and approximate fixed points*, Studia Math. 159 (2003), no. 3, 403–415.

[27] E. Oja, *A proof of the Simons inequality*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. No. 2 (1998), 27–28.

[28] J. Orihuela, *Pointwise compactness in spaces of continuous functions*, J. London Math. Soc. (2) 36 (1987), no. 1, 143–152.

[29] J. D. Pryce, *Weak compactness in locally convex spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 1966 148–155.

[30] I. Shafrir, *The approximate fixed point property in Banach and hyperbolic spaces*, Israel J. Math. 71 (1990), no. 2, 211–223.

[31] S. Simons, *A convergence theorem with boundary*, Pacific J. Math. 40 (1972), 703–708.

[32] C. Stegall, *Applications of Descriptive Topology in Functional Analysis*, Universität Linz, 1985.

[33] M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathcal{K}$-analytiques.* (French) Ann. of Math. (2) 110 (1979), no. 3, 407–438.

[34] A. Ülger, *A. Weak compactness in* $L^1(\mu, X)$, Proc. Amer. Math. Soc. 113 (1991), no. 1, 143–149.