UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

TESINA DE LICENCIATURA

CLASIFICACIÓN TOPOLÓGICA DE LOS ESPACIOS DE BANACH

Antonio José Guirao Sánchez

Octubre de 2005

CLASIFICACIÓN TOPLÓGICA DE LOS ESPACIOS DE BANACH

por
Antonio José Guirao Sánchez

Murcia, 11 de Octubre de 2005

Memoria realizada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia durante el curso académico 2004/2005 bajo la dirección del Doctor José Orihuela Calatayudpor Antonio José Guirao Sánchez, para optar al Grado de Licenciado.

V$^{\rm o}$B$^{\rm o}$ El Director de la Tesina

Fdo.: José Orihuela Calatayud

V$^{\rm o}$B$^{\rm o}$ El Director del Departamento

Fdo.: Pascual Lucas Saorín

Cuando un alumno, recién obtenida la licenciatura, se plantea el continuar estudiando y prepararse para poder desarrollar en un futuro una labor de investigación, el camino a seguir está claro. Tener claro que hay ciertas ramas de la matemática en las que te gustaría profundizar y cuáles son éstas es fundamental. Pero casi tan importante como el saber que a esto es a lo que quieres consagrar tu vida, es encontrar a alguien que guíe tus pasos. Así pues, he de dar las gracias a Bernardo Cascales Salinas y a José Orihuela Calatayud que aceptaron tutelarme en este proceso de aprendizaje. En particular a José Orihuela que es mi director de proyecto de tesis y sin el cual esta memoria no habría visto la luz.

Es sabido que cuando alguien emprende un largo camino, a veces desfallece, se desanima o incluso se ve tentado de volver sobre sus pasos. En mi camino he encontrado a grandes personas que me han hecho seguir trabajando. Por eso quiero darle las gracias a personas como José Rodríguez y Antonio Avilés que me han devuelto el amor por las matemáticas, a Mª Ángeles Hernández Cifre que me ha enseñado a disfrutar y a sorprenderme con cada nuevo resultado y que me ha ayudado de forma irremplazable en la elaboración de esta memoria, a Stanimir Troyanski por las conversaciones y las discusiones de matemáticas y a tantos otros compañeros.

Normalmente, como digo, el camino no se emprende solo. Alrededor de ti hay personas que te hacen el caminar más duro y otras que lo hacen más liviano. Por eso quiero darle las gracias a mis padres y a mis hermanas, por soportarme, por esperar en vano que les escuche cuando estoy “colgado” en mi mundo matemático, por apoyarme en todo, aunque a veces eso vaya en contra de sus instintos y sentimientos. Y en especial a Marta, una persona a la que tuve la suerte de conocer cuando empezaba el camino y la que ha conseguido, entre otras cosas, que éste sea mi mundo y que lo abrace con pasión e ilusión, por eso esta memoria le está dedicada. Gracias por tu apoyo incondicional.

A Marta, con mi amor y gratitud.

Quizás, la mayor realidad
está hecha de la materia
en que están hechos los sueños.

Índice general

Introducción

Dado un espacio topológico, se define el *carácter de densidad* como el menor cardinal de un subconjunto cuya adherencia es el total. Digamos que, topológicamente, el carácter de densidad es la cantidad de información necesaria para construir todo el espacio. No en vano, esta propiedad es un invariante topológico, esto es se conserva vía homeomorfismo.

La igualdad de dos espacios topológicos se establece mediante la herramienta del homeomorfismo; decimos que dos espacios topológicos son topológicamente iguales cuando existe un homeomorfismo entre ellos. Y, a las propiedades que conservan dichos homeomorfismos, como hemos mencionado, se las llama invariantes topológicos, puesto que dos espacios homeomorfos siempre las van a compartir, esto es, o la tienen los dos o no la tienen ninguno.

Sin embargo, el hecho de que una propiedad, como el carácter de densidad, sea un invariante topológico no es suficiente para caracterizar un espacio topológico. Esto es, si tenemos dos espacios topológicos que satisfacen un invariante no podemos asegurar, y en general no se dará, que ambos sean homeomorfos.

Nuestro campo de estudio, los espacios de Banach (def. 1.1.3), son casos particulares de espacios topológicos, dotados de estructura de espacio vectorial y donde la topología viene inducida por métricas completas muy particulares (ver def. 1.1.1). Así, nos podemos plantear, en esta subclase de espacios topológicos, la cuestión anterior.

Si dos espacios de Banach tienen distinto carácter de densidad, está claro, por ser éste un invariante topológico, que estos dos espacios nunca pueden ser homeomorfos, es decir, no hay posibilidad de encontrar un homeomorfismo entre ellos. Ahora bien, si dos espacios de Banach tienen el mismo carácter de densidad, ¿son homeomorfos?

Teorema de Toruńczyk

A lo largo de este texto daremos soluciones parciales a esta pregunta que, sin embargo, persiguen un objetivo mayor. Y es que dicha cuestión fue resuelta de forma afirmativa en 1979 por el matemático ruso H. Toruńczyk, en [27], de nombre: *Characterizing Hilbert space topology.* En realidad su resultado tiene mayor alcance.

La clase de los espacios de Fréchet, es aquélla formada por los espacios vectoriales topológicos localmente convexos completos y metrizables. Todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet pero, la inclusión contraria no es cierta. Un ejemplo de que la inclusión es estricta lo supone $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, esto es, el producto contable de rectas.

Toruńczyk estableció, en [27], el siguiente resultado.

Teorema 1. *Todo espacio de Fréchet, X, es homeomorfo a un espacio de Hilbert*

Ahora bien, es conocido el hecho de que todo espacio de Hilbert H es isométrico a $l_2(\Gamma)$, donde Γ es un conjunto de cardinalidad el carácter de densidad de H (ver el teorema 1.2.5), lo que nos permite afirmar el siguiente corolario.

Corolario 2. *Dos espacios de Fréchet con el mismo carácter de densidad son mutuamente homeomorfos.*

Demostración. Si X e Y son dos espacio de Fréchet con el mismo carácter de densidad, son homeomorfos a espacios de Hilbert, H_X y H_Y. Como el carácter de densidad es un invariante topológico, ambos espacios de Hilbert tienen el mismo carácter de densidad y, por tanto ambos son homeomorfos a $l_2(\Gamma)$, donde Γ tiene cardinalidad el carácter de densidad de los Hilbert, pero entonces:

$$X \cong H_X \cong l_2(\Gamma) \cong H_Y \cong Y$$

Lo que termina la prueba. □

Observación 3. *Hemos utilizado, como haremos a lo largo de la tesina, el símbolo $\cong$ para designar la relación* ser homeomorfo.

La prueba del teorema de Toruńczyk sigue las líneas de los teoremas fundamentales de los capítulos 3 y 4, manejando, en la notación del capítulo 4, el hecho de que l_2 sea un factor de X. Sin embargo, la herramienta fundamental para la prueba es de naturaleza topológica y profundiza en el estudio de las variedades de Hilbert manejando los conceptos de ANR y de Q-variedades, donde Q es el cubo de Hilbert.

Tipos de Homeomorfismos

Pero en esta tesina lo que buscamos es algo más que una clasificación topológica de los espacios de Banach. Buscamos las propiedades ora lineales ora geométricas que se conservan entre dos espacios de Banach que tienen el mismo carácter de densidad.

Ahora bien, a pesar de que un homeomorfismo, en principio, sólo contiene información topológica, podemos exigir mayor información. Los siguientes tipos de homeomorfismos en espacios de Banach nos dan información sobre la relación entre las estructuras lineales, métricas,. . . .

Definición 4. *Sean X e Y dos espacios de Banach y sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo, decimos*

(i) Cuando f es lineal recibe el nombre de isomorfismo.

(ii) Cuando $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$ y f es lineal, f recibe el nombre de isometría.

(iii) Si existe un cierto $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{K}\|x-y\| \leq \|f(x)-f(y)\| \leq K\|x-y\|.$$

decimos que f es un homeomorfismo de Lipschitz.

Encontrar homeomorfismos de estos tipos entre espacios de Banach es encontrar relaciones fuertes entre las estructuras de los espacios de Banach. El propio resultado antes mencionado de Toruńczyk establece el homeomorfismo de cualquier espacio de Banach con un espacio de Hilbert. Analizar si estos homeomorfismos conservan cierta información lineal y geométrica es de gran importancia y entra de lleno en el terreno del renormamiento.

Además, buscar normas equivalentes en espacios de Banach es encontrar isomorfismos entre espacios de Banach donde uno de ellos tiene ciertas propiedades especiales.

Estructura

El capítulo 1 está completamente dedicado a la introducción de los resultados y conceptos básicos y necesarios para la comprensión de esta tesina. Aquellas personas familiarizadas con la teoría de espacios de Banach, las bases de Schauder y la teoría de renormamiento pueden omitir, y aconsejamos que así sea, dicho capítulo.

En los 3 capítulos siguientes analizamos tres casos particulares del teorema de Toruńczyk, estudiando la construcción propia del homeomorfismo cuando es posible.

En el capítulo 2 bajo la hipótesis adicional de la reflexividad se analiza el caso en el que el carácter de densidad es numerable, esto es, los espacios son separables. En este caso el homeomorfismo se construye de forma explícita.

En el capítulo 3, gracias al teorema de Bartle-Graves conseguimos extender el resultado anterior eliminando la hipótesis adicional de la reflexividad. En este caso el homeomorfismo no es completamente constructible pero tiene ciertas propiedades adicionales.

En el capítulo 4 saltamos del carácter de densidad numerable y nos adentramos en los espacios de Banach no separables. Junto con la hipótesis de la reflexividad conseguimos, de forma análoga al capítulo anterior, el homeomorfismo deseado, que, si bien, no es tampoco constructible, posee buenas propiedades lineales y geométricas. Al final de este capítulo mostramos otro caso particular del teorema de Toruńczyk, debido a S. Troyanski, que establece que todo espacio $C_0(A)$ es homeomorfo a un Hilbert, dando el homeomorfismo de forma explícita.

Finalmente, en el capítulo 5 analizamos una clase de espacios de Banach introducidas por Dashiell y Lindenstrauss en 1973, en el artículo [6]. Y extendemos sus resultados de renormamiento en los mismos.

Los resultados presentados en el capítulo 2 siguen el esquema del texto [9]. Los resultados de los capítulos 2 y 4 siguen el esquema del texto de Van Mil, [29], y del de Bessaga y Pelczynski, [5]. El capítulo 5 presenta una profundización en el trabajo de Dashiell y Lindenstrauss en [6] que ha sido realizada por el autor de esta memoria.

Capítulo 1

Preliminares

En los capítulos siguientes iremos, poco a poco, profundizando en los espacios de Banach así como en las herramientas necesarias para poder establecer, entre otros, el teorema de Anderson-Kadec que nos asegura que todo espacio de Banach separable es homeomorfo al espacio de Hilbert l_2. Es por esto por lo que creemos que este capítulo es de especial importancia para aquéllos que no estén familiarizados con los conceptos y resultados básicos de la teoría de espacios de Banach.

En virtud de lo anterior hemos intentado reflejar de forma autocontenida, en las secciones que conforman este capítulo, los conceptos y resultados fundamentales en los espacios de Banach y en especial aquéllos que nos serán necesarios para la consecución de nuestros objetivos.

1.1. Espacios de Banach

Esta sección tiene como objetivo el introducir al lector en la teoría de los espacios de Banach. Por tanto, el lector que tenga un conocimiento suficiente sobre dicha teoría, podría seguir la lectura en las siguientes lecciones.

Empecemos a introducir los conceptos básicos.

Definición 1.1.1. *Sea X un espacio vectorial (real o complejo). Llamamos* norma *a toda aquella aplicación,* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *que satisface las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ *para todo* $x \in X$.
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para todos* x, $y \in X$.

3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *para todo* $x \in X$ *y* λ *escalar.*

4. $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.

Decimos que el par $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado. Si sólo se satisfacen las primeras tres condiciones entonces decimos que* $\|\cdot\|$ *es una* seminorma.

Definición 1.1.2. *Dado* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado llamaremos:*

1. Bola unidad *de* X *al conjunto* $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$*; y*

2. Esfera unidad *de* X *al conjunto* $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Definición 1.1.3. *Un espacio de Banach es un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *tal que junto a la métrica inducida por la norma* $d(x, y) = \|x - y\|$ *es un espacio métrico completo. Cuando hablemos de la topología del espacio de Banach haremos referencia a la inducida por la norma.*

Recordemos que un espacio métrico se dice completo cuando toda sucesión de Cauchy en dicho espacio es convergente.

Los ejemplos fundamentales son los espacios euclídeos, esto es, los espacios vectoriales finito-dimensionales dotados de la métrica euclídea.

En dimensión finita la clasificación de espacios de Banach es muy sencilla, teniendo que dos espacios finito-dimensionales son isomorfos si y solamente si tienen la misma dimensión.

El concepto de isometría entre espacios de Banach es paralelo al concepto de homeomorfismo entre espacios topológicos. Es decir, al igual que dos espacios topológicos homeomorfos tienen exactamente las mismas propiedades topológicas, dos espacios de Banach isométricos tienen las mismas propiedades topológicas, lineales y métricas.

Hay métodos diversos de construir espacios de Banach a partir de otros dados. En particular, dado un espacio de Banach X y un subespacio cerrado Y de X, se puede definir el espacio vectorial cociente X/Y de forma natural y considerar la norma $\|[x]\| = \text{dist}(x, Y)$, donde $[x]$ es un elemento del cociente y x es un representante arbitrario de $[x]$ en X. Este espacio normado es de Banach.

Observación 1.1.4. *Dicha norma induce en el espacio cociente la menor topología que hace que la proyección canónica, que a cada* $x \in X$ *le asigna su clase* $[x]$*, sea continua.*

Como aplicación de esta definición vamos a probar un lema que nos será de ayuda en los capítulos centrales.

Lema 1.1.5. *Sea* X *un espacio de Banach,* $A \subset X$ *con* $\dim(A) < \infty$ *y* $B \subset X$ *subespacio cerrado, entonces* $A + B$ *es cerrado.*

Demostración. Como B es cerrado y X de Banach, X/B también es de Banach, y la aplicación $p : X \to X/B$ es una aplicación lineal, continua y suprayectiva. $p(A)$ es de dimensión finita, luego $p(A)$ es un cerrado en X/B. Como p es continua se tiene que $p^{-1}(p(A))$ es cerrado en X. Ahora bien, si $x \in A + B$, entonces $x = a + b$ con $a \in A$ y $b \in B$. Por tanto, $p(x) = p(a + b) = [a] = p(a)$, y así, $x \in p^{-1}(p(A))$. Por otro lado, si $x \in p^{-1}(p(A))$, entonces existe $a \in A$ tal que $p(x) = p(a)$, de donde se deduce que $[x] = [a]$. En consecuencia, $x - a \in B$, y por tanto, existe un $b \in B$ de manera que $x = a + b$. Así hemos probado que $x \in A + B$. □

Veamos otros conceptos de interés.

Definición 1.1.6. *Dado $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, definimos el dual de X como el conjunto X^* formado por todos los funcionales lineales y continuos $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es el cuerpo de escalares. Dicho conjunto es un espacio vectorial que dotado con la norma*

$$\|f\| := \sup_{x \in B_X} \{|f(x)|\}$$

es un espacio de Banach.

Observación 1.1.7. Un espacio de dimensión finita coincide con su dual. No hay más que identificar cada uno de los vectores, e_i, de la base de X, con aquellos funcionales continuos que asignan uno a e_i y cero al resto de los elementos de la base.

Uno de los resultados fundamentales en la teoría de espacios de Banach es el teorema de Hanh-Banach. Lo podemos encontrar establecido siguiendo, principalmente, dos esquemas diferentes; por un lado como teorema de separación y por otro lado como teorema de extensión. A continuación enunciamos sin prueba dichos resultados.

Teorema 1.1.8. *Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si $f \in Y^*$, entonces existe, $F \in X^*$ que extiende a f y tal que $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.*

Teorema 1.1.9. *Sea C un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Banach X. Si $x_0 \notin C$ entonces existe $f \in X^*$ tal que*

$$\mathrm{Re}(f(x_0)) > \sup\{\mathrm{Re}(f(x)) : X \in C\}$$

Es a partir de aquí cuando se empiezan a obtener resultados profundos sobre la estructura de los espacios de Banach, siendo los siguientes sólo una muestra sucinta y suficiente para los resultados que perseguimos probar.

Proposición 1.1.10. *Cada espacio de Banach X está incluido isométricamente en su bidual.*

Demostración. En efecto, si consideramos la aplicación $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ tal que $\pi(x)(f) = f(x)$ para cada $x \in X$ y cada $f \in X^*$ tenemos, gracias al teorema de extensión de Hahn-Banach, que π es una isometría. □

Definición 1.1.11. *Un espacio de Banach se dice que es reflexivo cuando la isometría anterior es suprayectiva, esto es,* $\pi(X) = X^{**}$.

Además de la topología que tenemos en un espacio de Banach gracias a la norma, podemos definir ciertas topologías más débiles.

Definición 1.1.12. *Sea* X *un espacio de Banach definimos la topología débil de* X*, que denotaremos por* ω*, como aquélla que tiene como base los conjuntos*

$$\{y \in X : f_i(x - y) < \varepsilon, i = 1, \dots, k\}$$

para cualesquiera $x \in X$*,* $\{f_i\}_{i=1}^k \subset X^*$ *y* $\varepsilon > 0$ *fijados. De la misma forma en* X^* *se define la topología débil*, que denotaremos por* ω^**, como aquélla que tiene como base los conjuntos*

$$\{f \in X^* : (f - g)(x_i) < \varepsilon, i = 1, \dots, k\}$$

para cualesquiera $g \in X^*$*,* $\{x_i\}_{i=1}^k \subset X$ *y* $\varepsilon > 0$ *fijados.*

Una caracterización de dichas topologías en términos más manejables queda de manifiesto con la siguiente proposición.

Proposición 1.1.13. *Sea* X *un espacio de Banach, entonces:*

1. *Una red* $\{x_\alpha\}_\alpha$ *en* X *converge en la topología débil a* x *si y solamente si* $\{f(x_\alpha)\}_\alpha$ *converge a* $f(x)$ *para toda elección de* $f \in X^*$.

2. *Una red* $\{f_\alpha\}_\alpha$ *en* X^* *converge en la topología débil* a* f *si y solamente si* $\{f_\alpha(x)\}_\alpha$ *converge a* $f(x)$ *para toda elección de* $x \in X$.

Vamos a ver ahora los resultados fundamentales de la teoría de espacios de Banach. Si bien las pruebas hasta ahora no han sido expuestas, debido principalmente a que las consideramos básicas o innecesarias para la comprensión de los resultados, en adelante en esta sección acompañaremos cada resultado con su correspondiente prueba.

Teorema de Mazur

La topología débil es, como el nombre indica, más débil que la topología de la norma, así pues, los débil cerrados son cerrados en norma. La implicación contraria no es cierta en general, sin embargo, en los conjuntos convexos todo funciona de forma diferente.

Teorema 1.1.14 (Mazur). *Todo conjunto cerrado y convexo en un espacio de Banach* X *es débilmente cerrado. Por lo tanto, para conjuntos convexos, las clausuras en la norma y en la topología débil coinciden.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que X es un espacio de Banach real, y C un subconjunto de X cerrado y convexo. Si $x_0 \notin C$, por el teorema de separación de H-B elegimos $f \in X^*$ tal que $f(x_0) > \sup\{f(x) : x \in C\}$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\sup\{f(x) : x \in C\} < \alpha < f(x_0)$. Consideramos el conjunto $\Xi = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ que es un débil abierto en X. Claramente, $x_0 \in \Xi$ y $\Xi \cap C = \emptyset$. Esto muestra que $X \setminus C$ es ω-abierto y, por lo tanto C es ω-cerrado.

Sea C un conjunto convexo. Como la norma de la topología es más fuerte, obtenemos $\overline{C} \subset \overline{C}^{\omega}$. Ahora bien, como $\overline{C}$ es un cerrado convexo, es ω-cerrado, y así tenemos $\overline{C} = \overline{C}^{\omega}$. □

Teorema de Alaoglu

Es conocido que la bola unidad de un Banach es compacta en norma si y solamente si la dimensión del espacio es finita. Sin embargo, considerando las topologías débiles introducidas anteriormente podemos conseguir ciertas condiciones de compacidad sobre B_X. Entre estos resultados se cuenta el teorema de Alaoglu.

Teorema 1.1.15 (Alaoglu). *Sea X un espacio de Banach. Entonces B_{X^*} es ω^*-compacta.*

Demostración. Por el teorema de Tychonoff, el espacio $[-1,1]^{B_X}$ de todas las funciones reales sobre B_X con valores en $[-1,1]$ es un espacio topológico compacto en la topología producto (puntual). Consideramos el conjunto $B_{X^*}|_{B_X}$ de todas las restricciones de $f \in B_{X^*}$ en B_X, que es claramente un subconjunto de $[-1,1]^{B_X}$. Es fácil ver que la aplicación restricción es un homeomorfismo de (B_{X^*}, ω^*) en $B_{X^*}|_{B_X}$ en la topología puntual, por lo que para ver la ω^*- compacidad de B_{X^*} es suficiente ver que $B_{X^*}|_{B_X}$ es cerrado puntualmente.

Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una red en $B_{X^*}|_{B_X}$ que converge puntualmente a algún $F \in [-1,1]^{B_X}$. Definimos $f(0) = 0$ y $f(x) = \|x\|\, F(\frac{x}{\|x\|})$ para $x \in X \setminus \{0\}$. Como F es homogénea en B_X, tenemos también $f(x) = \delta F(\frac{x}{\delta})$ para cualquier $\delta \geq \|x\|$. Usando esto y la linealidad de F en B_X, fácilmente vemos que f es lineal en X. Como $f_\alpha \to F$ puntualmente y $\|f_\alpha\| \leq 1$, tenemos $\|f\| = \sup_{x \in B_X} |F(x)| \leq 1$. Así, $f \in B_{X^*}$ y $F = f|_{B_X} \in B_{X^*}|_{B_X}$, como queríamos. □

Caracterización de (B_X, ω)

Bajo ciertas hipótesis adicionales la bola unidad con la topología débil es un compacto metrizable. En efecto, las hipótesis a tener en cuenta serán la separabilidad y la reflexividad del espacio de Banach.

Antes de ver la prueba probamos el siguiente resultado necesario.

Proposición 1.1.16. *Si X es un espacio de Banach. X^* separable implica X separable.*

Demostración. Sea $\{f_n\}_n \subset S_{X^*}$ denso, para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $x_n \in S_X$ tal que $f_n(x_n) > \frac{1}{2}$. Sea $Y = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como Y es separable, es suficiente probar que $X = Y$. Si $X \neq Y$, gracias al teorema de Hahn-Banach, existe $f \in X^*$, $\|f\| = 1$ y tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in Y$. Sea n tal que $\|f_n - f\| < \frac{1}{4}$ entonces:

$$\begin{aligned} |f(x_n)| &= |f_n(x_n) - (f_n(x_n) - f(x_n))| \geq |f_n(x_n)| - |f_n(x_n) - f(x_n)| \\ &\geq |f_n(x_n)| - \|f_n - f\| \cdot \|x_n\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

que es una contradicción, puesto que f se anula sobre Y . Luego $X = Y$ y acabamos. $\square$

La siguiente proposición prueba que la hipótesis de separabilidad nos asegura que (B_{X^*}, ω^*) es compacto metrizable.

Proposición 1.1.17. *Si X es un espacio de Banach separable y $\{x_n\} \in S_X$ es denso en S_X. Definimos en B_{X^*} una métrica:*

$$\rho(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |(f - g)(x_i)|$$

Entonces la topología ω^* coincide con la de la métrica ρ. Y, en particular, (B_{X^*}, ρ) es un espacio métrico compacto.

Demostración. Por el teorema de Alaoglu (B_{X^*}, ω^*) es compacto, sólo tenemos que ver que la aplicación $I : (B_{X^*}, \omega^*) \to (B_{X^*}, \rho)$ es continua, pues al ser I biyectiva con un compacto como dominio y un T_2 como espacio imagen si es continua es homeomorfismo.

Sea $\Xi = \{g \in B_{X^*} : \rho(f, g) < \varepsilon\}$ para alguna $f \in B_{X^*}$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_0-i} < \frac{\varepsilon}{4}$. Para toda $g \in B_{X^*}$ tal que $|(g - f)(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2n_0}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |(f - g)(x_i)| = \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i} |(f - g)(x_i)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} |(f - g)(x_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i} \frac{\varepsilon}{2n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i+1} \leq n_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2n_0} + \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-n_0+1} = \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego

$$I\left(\left\{g \in B_{X^*} : |(g - f)(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2n_0}, i = 1, 2, \ldots, n_0\right\}\right) \subset B_\rho(f, \varepsilon).$$

Y, por tanto, I es continua como queríamos probar. $\square$

Y, finalmente, podemos probar el resultado anunciado, apoyándonos en el hecho de que π es una isometría y, por tanto $(B_X, \omega) = (\pi(B_X), \omega^*)$ y que X es reflexivo, es decir, $\pi(B_X) = B_{X^{**}}$.

Teorema 1.1.18. *Si X es un espacio de Banach, reflexivo y separable, entonces (B_X, ω) es compacto metrizable.*

Demostración. $X^{**} = X$ es separable, luego por la proposición 1.1.16 X^* es separable y, por la proposición 1.1.17 $(B_{X^{**}}, \omega^*)$ es compacto metrizable; así pues, también lo es (B_X, ω). $\square$

Teorema de Goldstine

Hemos visto en el apartado anterior que la propiedad de que la bola del bidual fuese exactamente la bola del espacio original, obtenido suponiendo la reflexividad del espacio, era crucial en la prueba. En general, nos preguntamos cual es la relación entre la bola del bidual y la bola original, en realidad $\pi(B_X)$. La respuesta dada por Goldstine y que presentamos en esta sección necesita el siguiente lema que es una versión especial del teorema de separación de Hahn-Banach, teorema 1.1.9.

Lema 1.1.19. *Sea X un espacio de Banach real. Si A es un conjunto ω^*-cerrado convexo en X^* y $f \in X^* \setminus A$, entonces existe un $x \in X$ tal que $f(x) > \sup\{g(x) : g \in A\}$.*

Demostración. Como A es ω^*-cerrado, existe un ω^*-entorno U del origen tal que $(f+U) \cap A = \emptyset$. Podemos suponer que U es convexo y de la forma $U = \{y^* \in X^* : |y^*(x_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$ para ciertos $x_1, x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por la simetría de U, tenemos $f \notin (A+U)$. Como $A+U$ es ω^*-abierto, esto es abierto, también convexo, por el teorema de separación de Hahn-Banach, teorema 1.1.9 existe $F \in X^{**}$ tal que $F(f) > \sup_{g \in A+U}\{F(g)\} \geq \sup_{g \in A}\{F(g)\}$.

Afirmamos que $F = \pi(x)$ para algún $x \in X$. Fijamos algún $g_0 \in A$ y observemos que $C = \sup_U(F) \leq F(f) - F(g_0)$ es finito. Consideramos los puntos x_i como funcionales en X^{**}. Consideremos $y^* \in \cap x_i^{-1}(0)$. Entonces $ty^* \in U$ para todo $t > 0$ y, por lo tanto $F(ty^*) \leq C$; esto es, $F(y^*) \leq \frac{C}{t}$. Similarmente, $F(-y^*) \leq \frac{C}{t}$. Consecuentemente $F(y^*) = 0$ y, por tanto, F es combinación lineal de x_i, esto es $F \in X$. $\square$

Y la relación buscada queda establecida de la siguiente forma.

Teorema 1.1.20 (Goldstine). *Sea X un espacio de Banach. La ω^*-clausura de B_X en X^{**} es $B_{X^{**}}$*

Demostración. Como $B_X \subset B_{X^{**}}$ y $B_{X^{**}}$ es ω^*-compacto por el teorema de Alaoglu, teorema 1.1.15, la ω^*-clausura de B_X en X^{**} está contenida en $B_{X^{**}}$.

Denotemos $W = \overline{B_X}^{\omega^*}$ y supongamos que $W \neq B_{X^{**}}$. Entonces existe $x_0^{**} \in B_{X^{**}}$ tal que $x_0^{**} \notin W$. El lema anterior aplicado a X^* afirma la existencia de una $f \in X^*$ tal que

$$x_0^{**}(f) > \sup_{y^{**} \in W}\{y^{**}(f)\}.$$

Como el supremo es positivo, podemos suponer que $\sup_{y^{**} \in W}\{y^{**}(f)\} = 1$. Como $B_X \subset W$, se tiene, en particular, $\|f\| \leq 1$. Pero también $\|x_0^{**}\| \leq 1$ y $x_0^{**}(f) > 1$, que es una contradicción. $\square$

Caracterización de reflexivos

Como hemos comentado anteriormente el hecho de que la bola unidad sea un compacto en norma caracteriza a los espacios finito-dimensionales. Ahora bien, sabemos que la bola unidad de un espacio separable y reflexivo es débil compacta. En realidad vamos a ver cómo para tener ω-compacidad no necesitamos la separabilidad. Es más vamos a probar que los espacios de Banach cuya bola unidad es débilmente compacta son una clase muy determinada.

Teorema 1.1.21. *Un espacio de Banach es reflexivo si y solamente si B_X es débilmente compacta.*

Demostración. Sabemos que X es reflexivo si, y sólo si, $X = X^{**}$. Entonces, $B_X = B_{X^{**}}$ es, por Alaoglu, teorema 1.1.15, ω^*-compacto en X^{**}. Así pues, B_X es ω-compacto.

Recíprocamente si B_X es ω-compacto se tiene que B_X es ω^*-cerrado en X^{**}. Así pues, por Goldstine, teorema 1.1.20, $B_X = \overline{B_X}^{\omega^*} = B_{X^{**}}$. Luego $B_X = B_{X^{**}}$ y así, $X = X^*$. □

1.2. Bases en espacios de Banach

En cualquier espacio vectorial de dimensión finita se estudia el concepto de base, herramienta que permite describir dicho espacio y desarrollar herramientas de cálculo que en otras circunstancias no podrían darse.

Sin embargo, en un espacio vectorial de dimensión infinita, en particular en un espacio de Banach de dimensión infinita el concepto de base algebraica, pierde sentido y potencia. Es por eso, que hay diversos intentos de generalización de las bases algebraicas a bases en espacios de Banach infinito-dimensionales. Sólo estudiaremos aquéllas que han resultado ser de una mayor aplicabilidad y que, por ende, utilizaremos a lo largo del texto.

1.2.1. Bases en espacios de Hilbert

Definición 1.2.1. *Un espacio de Banach cuya norma está inducida por un producto escalar, esto es, tal que para todo x, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, se llama espacio de Hilbert.*

Es un hecho conocido que para cualquier $x \in H$ fijo, para H un espacio de Hilbert, la aplicación $\langle x, \cdot\rangle : H \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal y continua.

Definición 1.2.2. *Sean x e $y \in H$. Decimos que x es ortogonal a y, lo que denotaremos por $x \perp y$, si $\langle x, y\rangle = 0$. Sea $M \subset H$. Decimos que x es ortogonal a M, lo que denotaremos por $x \perp M$, si $x \perp y$ para todo $y \in M$.*

Sea F un subespacio de un Hilbert H. Definimos el complemento ortogonal de F en H como el conjunto $F^\perp = \{h \in H : h \perp F\}$.

Definición 1.2.3. *Sea H un espacio de Hilbert y $S \subset H$. Decimos que S es un conjunto ortonormal si $x \perp y$ para todo par x, $y \in S$ y $\langle x, x \rangle = 1$ para todo $x \in S$. Un conjunto ortonormal maximal (en el sentido de la inclusión) en un espacio de Hilbert recibe el nombre de Base ortonormal.*

Claramente toda base ortonormal S es una familia de vectores linealmente independientes. Y de que sea maximal se deduce que $\overline{\text{span}\{S\}} = H$. El primer resultado que debemos conocer es que

Teorema 1.2.4. *Todo espacio de Hilbert tiene una base ortonormal.*

Estas bases permiten describir completamente los elementos de los espacios de Hilbert, gracias a la igualdad de Parseval y a los coeficientes de Fourier que no vamos a exponer aquí. Sólo queremos poner de manifiesto el siguiente resultado.

Teorema 1.2.5. *Sea H un espacio de Hilbert, y A un conjunto no vacío con* $\text{Card}(A) = \text{Dens}(H)$. *Entonces H es isométrico a $l_2(A)$.*

Demostración. Tomamos una base ortonormal de H; ésta vendrá indexada en cierto conjunto A satisfaciendo las hipótesis. Entonces construimos la aplicación que a cada x en H le asocia el elemento $(\langle x, e_a \rangle)_{a \in A}$. Esta aplicación es la isometría que buscamos. $\square$

Un espacio de Hilbert se caracteriza por ser un espacio de Banach que satisface la igualdad del paralelogramo

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Y estos espacios están, gracias al teorema 1.2.5, isométricamente caracterizados por su carácter de densidad. Esto es, no sólo en términos exclusivamente topológicos, sino lineales y geométricos.

Nos preguntamos pues si, suavizando las propiedades, esto es, considerando espacios de Banach con propiedades parecidas a la igualdad del paralelogramo, conseguiremos resultados parecidos. No perseguimos la isometría, pues somos conscientes de que dos espacio de Banach no son isométricos por tener el mismo carácter de densidad.

También sabemos, como dijimos en la introducción que dos espacios de Banach con el mismo carácter de densidad son homeomorfos. La pregunta es, ¿bajo que hipótesis adicional se consigue que ese homeomorfismo nos dé, además de información topológica, información lineal y geométrica?

1.2.2. Bases de Schauder

En general, los espacios que no tienen estructura prehilbertiana (aquéllos que no tienen producto escalar) carecen de una definición satisfactoria de base. En esta sección estudiamos una extensión del concepto de base que tiene sentido exclusivamente en los espacios separables y, en el capítulo 4 estudiaremos las bases de proyecciones que generalizan las bases de Schauder a los espacios de dimensión infinita no separables.

Definición 1.2.6. *Sea X un espacio normado infinito-dimensional. Una sucesión $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ en X se dirá que es una Base de Schauder de X cuando para cada $x \in X$ exista una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, que llamaremos las coordenadas de x, tales que*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i.$$

Tras la definición se deducen varias cosas, entre ellas que los vectores que forman la base son linealmente independientes y que un espacio de Banach que tenga base de Schauder es separable.

Si $\{e_i\}_i$ es una base de Schauder de un espacio normado X, entonces la *proyecciones canónicas* $P_n : X \longrightarrow X$ se definen, para cada $n \in \mathbb{N}$, como:

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Si cada base de Schauder tiene asociadas una familia numerable de proyecciones que estructuran el espacio, bajo qué condiciones, dada una familia de proyecciones, podemos asegurar que dicho espacio tiene base de Schauder y que además las proyecciones canónicas son aquellas de las que se partía. El siguiente lema responde a nuestra pregunta.

Lema 1.2.7. *Sea $\{e_i\}_i$ una base de Schauder de un espacio normado X. Las proyecciones canónicas P_n satisfacen:*

1. $\dim(P_n(X)) = n$;
2. $P_n P_m = P_m P_n = P_{\text{mín}(m,n)}$;
3. $P_n(x) \to x$ *en X para todo $x \in X$.*

Inversamente, si $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de proyecciones acotadas en un espacio normado X y satisfacen las tres condiciones anteriores, entonces P_n son las proyecciones canónicas asociadas a una base de Schauder en X.

Demostración. Comprobar que las proyecciones canónicas asociadas a una base de Schauder satisfacen las tres propiedades enunciadas es cuestión de rutina.

En lo referente a la propiedad inversa, si $\{P_n\}_n$ son una sucesión de proyecciones continuas en X que satisfacen las tres condiciones, entonces, definiendo, por conveniencia, $P_0 = 0$ y eligiendo $e_i \in P_i(X) \cap \ker(P_{i-1})$, tenemos

$$x = \lim_{n\to\infty}(P_n(x)) = \lim_{n\to\infty}(P_n(x) - P_0(x)) = \sum_{i=1}^{\infty}(P_i(x) - P_{i-1}(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$$

para ciertos escalares α_i. La unicidad de estos escalares α_i fijado $x \in X$ se sigue del hecho de que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$, entonces, por continuidad de P_n, tendríamos $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$, y, por tanto, que $\beta_i e_i = P_i(x) - P_{i-1}(x) = \alpha_i e_i$. Luego, $\{e_i\}_i$ es una base de Schauder en X y P_n son sus proyecciones canónicas asociadas. □

Un teorema de Banach nos asegura que las proyecciones canónicas asociadas a una base de Schauder en un espacio de Banach están uniformemente acotadas.

Consideremos una base de Schauder, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, de un espacio de Banach X. Para cada $j \in \mathbb{N}$ y $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$, si denotamos $f_j(x) = a_j$, es inmediato que f_j está en X^*. Los funcionales f_j reciben el nombre de *funcionales asociados biortogonales* o funcionales coordenada, a $\{e_i\}_i$ y suelen escribirse, siguiendo la notación estandar, como e_i^*.

En cada uno de los capítulos que siguen a éste de carácter introductorio se definen propiedades en relación a las base de Schauder, pero, como viene siendo costumbre, no las incluimos aquí. Creemos que el mejor lugar para dichos conceptos y resultados no es este capítulo de preliminares. Sin embargo, cuando dicho resultados nos sean necesarios serán debidamente justificados.

Para terminar esta sección sobre bases de Schauder creemos necesaria la introducción de una caracterización de estas bases que nos da un criterio más práctico para su búsqueda y comprobación.

Proposición 1.2.8. *Sea $\{e_i\}_i$ una sucesión de vectores en un espacio de Banach X. $\{e_i\}_i$ es una base de Schauder en X si y solamente si verifica las siguientes dos condiciones.*

(i) $X = \overline{\operatorname{span}\{e_i\}}$.

(ii) Existe $K > 0$ tal que para cada elección de n y m con $n < m$ y de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_m$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|$$

Demostración. Una implicación es clara, puesto que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| = \left\| P_n \left(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right) \right\| \leq \|P_n\| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|$$

Por otro lado, suponiendo que se satisfacen las dos condiciones anteriores. Podemos definir proyecciones P_n en $\operatorname{span}\{e_i\}$ mediante

$$P_n \left(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

para cada $m > n$ y escalares a_i. Está claro que P_n tienen norma a lo más K, extendiendo las proyecciones P_n sobre $X = \overline{\operatorname{span}\{e_i\}}$, tenemos que son una familia de proyecciones que satisfacen las condiciones del lema 1.2.7 y, por tanto, $\{e_i\}_i$ es una base de Schauder en X. $\square$

1.3. Renormamiento

A lo largo de los capítulos siguientes a éste, utilizaremos conceptos relativos a propiedades que tienen las normas en ciertos espacios de Banach. Así pues, el objetivo de esta sección es presentar el concepto de renormamiento en espacios de Banach y el estudio de las herramientas necesarias para entender los resultados presentados en este texto.

1.3.1. Las normas

En la sección 1.1 se ha introducido el concepto de norma en un espacio vectorial. Dicha definición es estándar y todas las condiciones exigidas son necesarias. Sin embargo las propiedades destacables que poseen las normas no se ciñen a éstas.

En esta sección vamos suponer que trabajamos en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma tal y como se definía en 1.1.1. Como consecuencia inmediata de la desigualdad triangular tenemos:

Lema 1.3.1. *Para cualesquiera x e $y \in X$ tenemos $\|x - y\| \geq |\, \|x\| - \|y\|\, |$.*

Demostración. Se tiene de forma inmediata que

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

de donde $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$. Como los papeles de x e y son intercambiables, tenemos también $\|x - y\| \geq \|y\| - \|x\|$. Y terminamos la prueba. □

Los espacios de Hilbert, gracias a que satisfacen la igualdad del paralelogramo, tienen muy buenas propiedades de diferenciabilidad, y sus bolas unidad tienen unas propiedades de convexidad excelentes.

Proposición 1.3.2. *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

- *Si $\|x + y\| = 2$ y $\|x\| = \|y\| = 1$ entonces $x = y$.*
- *Si $\{x_n\}_n \subset S_H$, $x \in S_H$ y $\|x_n + x\|$ converge a 2 entonces x_n converge a x.*
- *Si $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ están en S_H y $\|x_n + y_n\|$ converge a 2 entonces $\{x_n - y_n\}_n$ converge a cero.*

Demostración. Es claro que la tercera condición implica las otras dos restantes. Ahora bien, gracias a la igualdad del paralelogramo tenemos:

$$\|x_n - y_n\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) - \|x_n + y_n\|^2 = 4 - \|x_n + y_n\|^2$$

Claramente el lado derecho de la ecuación tiende a cero y, por tanto, se tiene el resultado. □

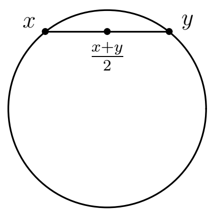
1.3.2. Renormar en los Espacios de Banach

Decimos que dos normas definidas en un mismo espacio vectorial son equivalentes, si ambas inducen la misma topología. Es un hecho conocido que en los espacios de dimensión finita todas las normas son equivalentes. Pero en espacios de dimensión infinita esto no es cierto. Es precisamente en los espacios de dimensión infinita donde nos planteamos el problema de encontrar normas equivalentes con las propiedades deseadas.

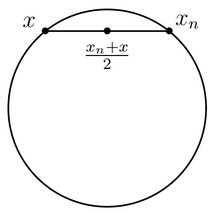
El estudio de los espacios que poseen una norma equivalente LUR ocupa un papel central en la teoría del renormamiento en espacios de Banach. El problema de obtener una norma equivalente diferenciable en un espacio de Banach X está relacionado con propiedades de convexidad de la norma dual en X^* a través del criterio de Šmulyan. Por ejemplo, la norma en X será Fréchet diferenciable si la norma dual en X^* es LUR. La obra de referencia básica sobre la teoría del renormamiento es el libro de Deville, Godefroy y Zizler [8].

En el capítulo 2 mostramos que todo espacio separable es renormable LUR. Así pues, la teoría de renormamiento LUR se adentra en la teoría de espacios de Banach infinito-dimensionales no separables. En este trabajo precisaremos, esencialmente, las siguientes propiedades de las normas.

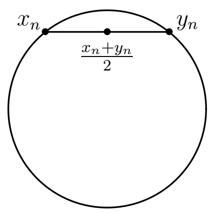
Definición 1.3.3. *Una norma $\|\cdot\|$ se dice que es estrictamente convexa (R) si la esfera unidad no contiene segmentos no degenerados. Esto es, satisface la primera afirmación de la proposición 1.3.2.*



Definición 1.3.4. *Una norma $\|\cdot\|$ se dice que es localmente uniformemente convexa (LUR) si satisface la segunda condición de la proposición 1.3.2.*



Definición 1.3.5. *Una norma $\|\cdot\|$ se dice que es uniformemente convexa (UR) si satisface la tercera condición de la proposición 1.3.2.*



Por lo comentado anteriormente, es de gran importancia la caracterización de los espacios de Banach que admiten una norma cuya norma dual sea LUR. De la misma forma lo es el caracterizar los espacios que admitan renormamientos con propiedades más débiles que la propiedad LUR.

1.3.3. Las propiedades de las normas

Los apartados anteriores dentro de esta sección pretendían ser una introducción sencilla a la teoría de renormamiento en los espacios de Banach. Ésta, sin embargo, tampoco es excesivamente complicada. Ahora, nuestro objetivo es estudiar unas definiciones más precisas que las ya dadas, así como equivalencias de las mismas y las herramientas necesarias para la comprensión de los resultados del texto.

Hemos definido con anterioridad el concepto de norma estrictamente convexa (def. 1.3.3), el concepto de norma localmente uniformemente convexa (def. 1.3.4) y el concepto de norma uniformemente convexa (def. 1.3.5). En este apartado nos vamos a centrar en los conceptos de norma Kadec, y en una generalización del concepto de norma LUR. Veamos las siguientes definiciones.

Definición 1.3.6. *Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial normado X es una norma de Kadec respecto de un subconjunto total A del dual X^* si, para cada sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en X se satisfacen las siguientes propiedades*

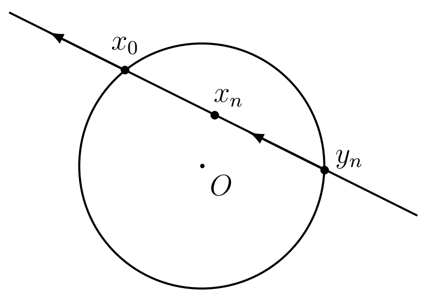
K_1) *Si* $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$ *para todo* $f \in A$, *entonces* $\liminf_n \|x_n\| \geq \|x_0\|$.

K_2) *Si* $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$ *para todo* $f \in A$, *y* $\lim_n \|x_n\| = \|x_0\|$, *entonces* $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

Recordemos que un subconjunto $A \subset X^*$ es total si $f(x) = 0$ para todo $f \in A$ implica que $x = 0$.

Observación 1.3.7. *La condición (K_1) es una consecuencia de (K_2). En efecto, sea $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en X tal que* $\lim_n f(x_n) = f(x_0)$ *para todo $f \in A$. Supongamos por el contrario que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que* $\sup_k \|x_{n_k}\| \leq c < 1 = \|x_0\|$.

Como para cada k la función $\psi_k(\lambda) = \|\lambda x_0 + (1-\lambda)x_{n_k}\|$ tiende a infinito para $\lambda \to -\infty$ y $\psi_k(0) \leq c < 1$, existen $\lambda_k < 0$ tales que $\|y_k\| = 1$ donde $y_k = \lambda_k x_0 + (1-\lambda_k)x_{n_k}$.



Tenemos

$$\lim_k f(y_k) = \lim_k f(x_{n_k}) = f(x_0) \quad \textit{para todo } f \in A$$

Puesto que

$$f(y_k - x_0) = (1-\lambda_k) f(x_{n_k} - x_0) \qquad y$$

$$|\lambda_k| \leq \|y_k - x_{n_k}\| \cdot \|x_0 - x_{n_k}\|^{-1} \leq (1+c)(1-c)^{-1} < +\infty$$

ya que

$$\|x_0 - x_{n_k}\| \geq \|x_0\| - \|x_{n_k}\| \geq 1-c$$
$$\|y_k - x_{n_k}\| \leq \|y_k\| + \|x_{n_k}\| \leq 1+c$$

Así, por (K_2)*, tenemos que* $\lim_k \|y_k - x_0\| = 0$*. Equivalentemente*

$$\lim_k \|\lambda_k x_0 + (1-\lambda_k) x_{n_k} - x_0\| = \lim_k (1-\lambda_k) \|x_{n_k} - x_0\| = 0.$$

Por lo tanto $\lim_k \|x_{n_k} - x_0\| = 0$*. Así,* $\lim_k \|x_{n_k}\| = \|x_0\|$*, una contradicción.*

Observación 1.3.8. *Si consideramos a* X^* *como el conjunto total, la definición anterior es equivalente a que la topología de norma y la topología débil coincidan en la esfera unidad. En este caso la norma recibe el nombre de norma Kadec.*

Observación 1.3.9. *En una terminología más actual una norma que es Kadec respecto de un conjunto total* A *es lo que se denomina* $\sigma(X, A)$*-Kadec. Esto es, en la esfera unidad, la topología de la norma y la topología* $\sigma(X, A)$ *coinciden.*

Por tanto, en la observación anterior estamos diciendo que cuando una norma satisface la condición de Kadec-Klee es de Kadec.

Definición 1.3.10. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado y* τ *una topología en* X*. Diremos que la norma* $\|\cdot\|$ *es* τ*-LUR si*

$$\tau - \lim_n x_n = x$$

siempre que

$$\lim_n \|(x_n + x)/2\| = \lim_n \|x_n\| = \|x\|.$$

La última expresión de la definición anterior es el reflejo analítico de la propiedad geométrica de ser LUR, es, como se comentó, una generalización de la igualdad del paralelogramo que satisfacen las normas en los espacios de Hilbert. En efecto,

Lema 1.3.11. *Sean* $(x_n)_n$ *y* x *en* $(X, \|\cdot\|)$ *cualesquiera. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\lim_n 2(\|x_n\|^2 + \|x\|^2) - \|x + x_n\|^2 = 0$,

(ii) $\lim_n \|(x + x_n)/2\| = \lim_n \|x_n\| = \|x\|$.

Demostración. Si suponemos que se cumple (ii) se tiene

$$\lim_n 2(\|x_n\|^2 + \|x\|^2) - \|x + x_n\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|x\|^2) - (2\|x\|)^2 = 0$$

que es exactamente (i). Si suponemos que se cumple (i) entonces, en primer lugar, se tiene:

$$2(\|x_n\|^2 + \|x\|^2) - \|x + x_n\|^2 \geq 2(\|x_n\|^2 + \|x\|^2) - (\|x\| + \|x_n\|)^2 = (\|x_n\| - \|x\|)^2$$

luego

$$\lim_n \|x_n\| = \|x\|.$$

Y, en segundo lugar

$$\lim_n \|x + x_n\|^2 = \lim_n 2(\|x\|^2 + \|x_n\|^2) = 2(2\|x\|^2) = 4\|x\|^2.$$

luego $\lim_n \|(x + x_n)/2\| = \|x\|$ que es lo que queríamos probar. □

Además de estas equivalencias, si en la definición dada de τ-LUR consideramos unas topologías particulares, en realidad no muy restrictivas pues todas las topologías que se utilizan con tal condición son de este tipo, podemos dar otra equivalencia.

Lema 1.3.12. *Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado, τ una topología en X de forma que el producto por escalares es τ-continuo, entonces son equivalentes:*

a) $\|\cdot\|$ *es τ-LUR.*

b) Dados x_n y $x \in S_X$ tal que $\lim_n \|x_n + x\| = 2$ entonces $\tau - \lim_n x_n = x$.

Demostración. Que $a)$ implica $b)$ es claro, pues si consideramos x_n y x como en b) entonces se cumple la condición (ii) del lema 1.3.11, con lo que por a) se tiene que $\tau - \lim_n x_n = x$. Obsérvese que en esta implicación no es necesaria ninguna hipótesis sobre τ. Para demostrar la implicación contraria supongamos que tenemos x_n y x en X satisfaciendo la condición (ii) del lema 1.3.11, esto es, la expresión que define τ-LUR, entonces, definimos los siguientes vectores: $y_n := \|x_n\|^{-1} x_n$, e $y := \|x\|^{-1} x$. Es claro que estos nuevos vectores están en la esfera unidad. Pero, además

$$\begin{aligned} 2 \quad &\geq \quad \|y_n + y\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{x + x_n}{\|x\|} - \left(\frac{x_n}{\|x\|} - \frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| \\ &\geq \quad \left\| \frac{x + x_n}{\|x\|} \right\| - \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|x_n\|} \right) \|x_n\| \longrightarrow 2. \end{aligned}$$

Luego los nuevos vectores satisfacen las condiciones en b) y, por tanto se tiene que $\tau - \lim_n y_n = y$, pero gracias a que el producto por escalares es τ-continuo se tiene que $\tau - \lim_n x_n = x$ con lo que terminamos la prueba. □

Definición 1.3.13. *Si X es un subespacio de Banach de $l_\infty(\Gamma)$, para algún conjunto no vacío Γ. Podemos definir la topología de la convergencia puntual, esto es, una red x_α en X converge puntualmente a $x \in X$ si y solamente si, $x_\alpha(\gamma)$ converge a $x(\gamma)$ para cada $\gamma \in \Gamma$. Si consideramos está topología τ_p, entonces una norma con la propiedad τ_p-LUR se denomina* puntualmente localmente uniformemente convexa.

Llegados a este punto podríamos estudiar los principales teoremas de renormamiento en espacios separables, por ejemplo. Sin embargo preferimos que los resultados de renormamiento que se incluyan en este texto sean exclusivamente los necesarios y que éstos sean expuestos y desarrollados dentro de los correspondientes apartados. Y es que consideramos que el mejor lugar para estos resultados no es el capítulo de los preliminares.

Algunos límites al renormamiento

Cabe plantearse por qué, teniendo el concepto de convexidad uniforme que es muy cercano a la igualdad del paralelogramo, buscamos nuevos conceptos como LUR o τ_p-LUR. La respuesta se encuentra en la imposibilidad de encontrar renormamientos uniformemente convexos en espacios de Banach clásicos como c_0, l_1 o l_∞. Los siguientes resultados ponen de manifiesto esta situación.

Teorema 1.3.14 (Milman). *Todo espacio de Banach que admite una norma equivalente uniformemente convexa es reflexivo.*

Demostración. Sea $x^{**} \in X^{**}$ con $\|x^{**}\| = 1$. Por el teorema de Goldstine (teorema 1.1.20), la bola unidad B_X es ω^*-densa en la bola unidad del bidual $B_{X^{**}}$. Como $\|\cdot\|$ es uniformemente convexa, existe un $\delta > 0$ tal que si $(x, y) \in (S_X)^2$ satisfacen que $\|x + y\| > 2(1 - \delta)$, entonces $\|x - y\| < \varepsilon$. Como la norma bidual en X^{**} es ω^*-inferiormente semicontinua, existe un entorno convexo V de x^{**} en $(B_{X^{**}}, \omega^*)$ tal que $\|u\| > 1 - \delta$ para todo $u \in V$. Se sigue que el $\|\cdot\|$-diámetro del conjunto no vacío $B_X \cap V$ es menor que ε. Como x^{**} está en la ω^* clausura de dicho conjunto, tenemos por la ω^*-semicontinuidad inferior de la norma que $\|\cdot\| - \mathrm{dist}(x^{**}, X) \leq \varepsilon$. Como ε es arbitrario, se sigue que x^{**} está en X, por lo que $X = X^{**}$. □

Así pues, en cualquier espacio de Banach que no sea reflexivo no tiene sentido buscar normas equivalentes uniformemente convexas. Esto es, por ejemplo, c_0 o l_1 nunca pueden admitir una norma uniformemente convexa, puesto que no son reflexivos.

El resultado anterior se puede extender y obtenerse una completa caracterización de los espacios que admite una norma uniformemente convexa. Este resultado, debido a P. Enflo y a Pisier, maneja un nuevo concepto que introducimos a continuación.

Definición 1.3.15. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Decimos que Y es finitamente representable en X si, para cada subespacio finito-dimensional F de Y y para cada $\varepsilon > 0$ existe un isomorfismo T de F en $T(F) \subset X$ tal que $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| < 1 + \varepsilon$.*

Un resultado de interés es el hecho de que para X un espacio de Banach, su dual X^{**} es siempre finitamente representable en X.

Definición 1.3.16. *Decimos que un espacio de Banach X es superreflexivo si todo espacio de Banach Y finitamente representable en él es reflexivo.*

El resultado al que hacíamos referencia con anterioridad establece la siguiente caracterización.

Teorema 1.3.17. *Un espacio de Banach es superreflexivo si y solamente si admite una norma uniformemente convexa.*

Demostración. Ver [9], capítulo 9; Representabilidad Finita. $\square$

Capítulo 2

Espacios Reflexivos y Separables

A lo largo de éste y de los siguientes capítulos, el objetivo principal para nosotros será establecer de la forma más explícita posible homeomorfismos entre espacios de Banach que comparten el mismo carácter de densidad. Como dijimos en la introducción, Torunczyk, ver [27], probó al final de la década de los setenta que, en efecto, si dos espacios de Banach tienen el mismo carácter de densidad entonces son homeomorfos.

En este capítulo estudiaremos el caso particular en el que ambos espacios son separables y reflexivos, esto es, calcularemos el homeomorfismo de forma explícita bajo la hipótesis adicional de la reflexividad y sólo en el caso del carácter de densidad numerable.

Este resultado queda establecido en el teorema 2.4.7. Para su prueba necesitamos varias herramientas, entre ellas, los renormamientos LUR en los espacios separables, las bases de Markushevich, la existencia de mejores aproximaciones en los espacio reflexivos... Veamos pues todos estos resultados que nos llevarán a poder probar, en la última sección del capítulo, el resultado deseado.

2.1. Normas LUR y renormamiento en separables

De vital importancia en la consecución de nuestro objetivo principal, los renormamientos LUR son, además, una vía de estudio que ha solventado gran número de problemas. Nos vamos a centrar en el caso separable, pues es suficiente para nuestra prueba.

Probaremos en esta sección que todo espacio de Banach separable admite un renormamiento LUR (teorema 2.1.4).

Recordemos en primer lugar la definición de norma LUR.

Definición 2.1.1. *Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio de Banach X se llama LUR (Locally Uniformly Rotund) si, para todos x_n, $x \in X$ que satisfagan*

$$\lim_n (2\|x\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x + x_n\|^2) = 0,$$

se tiene que $\lim_n \|x - x_n\| = 0$.

Nótese que esta definición es equivalente a que dados $\{x_n\}_n$ y x en S_X tales que la sucesión $\left\{\left\|\frac{x_n+x}{2}\right\|\right\}_n$ converge a uno, entonces $\{x_n\}_n$ converge a x, ver capítulo 1.

Un primer resultado auxiliar que usaremos en la prueba del teorema 2.1.4 es el siguiente:

Lema 2.1.2. *Sea X un espacio de Banach y $A \subset X$ compacto en norma. Sea $\{f_n\}_n$ una familia de funcionales continuos que separan puntos de X. Entonces, en A, la topología de la norma y la topología de la convergencia puntual en dicha familia coinciden.*

Demostración. El resultado se basa en que la topología de convergencia puntual de la familia de funcionales es de Hausdorff, gracias a que éstos separan puntos de X y, por tanto, la identidad entre ambas topologías es un homeomorfismo. $\square$

Lema 2.1.3. *Si X es un espacio de Banach separable podemos encontrar una familia numerable de funcionales continuos que separan puntos de X.*

Demostración. Sea D un conjunto denso numerable en X. Para cada par de puntos distintos de D definimos un funcional lineal continuo en la esfera dual que lleve los puntos a 1 y a 0 respectivamente. Llamemos F a la familia formada por todos estos funcionales. Es claro que F es numerable. Nos queda probar que separa puntos de X. Sean $x \neq y$ en X y $\varepsilon < \frac{1}{2}$ de forma que las bolas de centro, respectivamente, x e y con radio ε sean disjuntas. Como D es denso en X existen x_1 e y_1 en D que están, respectivamente, en las bolas anteriores. Sea $f \in F$ el funcional tal que $f(x_1) = 1$ y $f(y_1) = 0$. Como la norma de f es 1 tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x) - 1| = |f(x) - f(x_1)| &\leq \|x - x_1\| < \varepsilon \\ |f(y)| = |f(y) - f(y_1)| &\leq \|y - y_1\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon &\leq f(x) \leq 1 + \varepsilon \\ -\varepsilon &\leq f(y) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

con lo que $f(y)$ es, a lo más, ε y $f(x)$ es, a lo menos, $1 - \varepsilon$. Y, claro, si $f(x) = f(y)$ entonces $1 - \varepsilon \leq \varepsilon$ pero esto implica que $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ lo que por hipótesis es una contradicción, con lo que acabamos la prueba. $\square$

Una prueba alternativa a la anterior y que muestra más elocuentemente que la clave de la existencia radica en el teorema de extensión de H-B, pues elude los detalles técnicos, es la siguiente:

Demostración. Sea $(x_n)_n \subset S_X$ denso en S_X. Para cada uno de ellos tomamos $f_n \in S_{X^*}$ tal que $f_n(x_n) = \|x_n\| = 1$. La colección de estos funcionales es numerable y, en efecto, separa puntos, pues dado $x \neq 0$ existe un cierto x_n tal que $\left\|x_n - \frac{x}{\|x\|}\right\| < \frac{1}{2}$, luego $f_n\big(\frac{x}{\|x\|}\big) \geq \frac{1}{2}$ y así $f(x) \neq 0$. □

Teorema 2.1.4 (Kadec). *Todo espacio de Banach separable admite una norma LUR equivalente.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach separable. Podemos tomar $\{x_n\}_n$ denso en S_X y, por el lema 2.1.3, $(f_n)_n \subset S_{X^*}$ que separa puntos de X. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos $F_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ y observamos que $\operatorname{dist}(x, F_n) \to 0$ para todo $x \in X$.

En efecto, si x es nulo es evidente por ser F_n subespacio vectorial. Si x es no nulo, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que converge a $\frac{x}{\|x\|}$. Luego $\|x\|\, x_{n_k}$ converge a x. Así, dado $\varepsilon > 0$ existe un k_0 tal que $\forall k \geq k_0$ se cumple $\big\|\|x\|\, x_{n_k} - x\big\| < \varepsilon$. Por construcción se tiene que $\|x\|\, x_{n_k} \in F_m$, $\forall m \geq n_k$, luego para cualquier $n \geq n_{k_0}$ se tiene que $0 \leqslant \operatorname{dist}(x, F_n) \leqslant \left\|\|x\|\, x_{n_{k_0}} - x\right\| < \varepsilon$ que es exactamente $\operatorname{dist}(x, F_n) \to 0$.

Definimos una norma $|||\cdot|||$ en X por:

$$|||x|||^2 := \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{dist}(x, F_n)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n(x)^2$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma original de X, y la distancia es en la norma $\|\cdot\|$. Como $\operatorname{dist}(x, F_i)$ es una función positivamente homogénea y subaditiva, $|||\cdot|||$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$. Veamos:

i) $|||\cdot|||$ es norma. Para que sea una norma, $|||\cdot|||$ debe cumplir las propiedades

   1. $|||x||| \geq 0$ y $|||x||| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   2. $|||\lambda x||| = \lambda |||x|||$.
   3. $|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$.

   Las dos primeras condiciones son triviales. En cuanto a la segunda sólo es necesario el uso de la desigualdad de Minkowski para $p = 2$, la propiedad triangular de la norma original, y así la misma propiedad heredada para $\operatorname{dist}(\cdot, F)$, y la linealidad de los funcionales f_n.

ii) $|||\cdot|||$ es equivalente a $\|\cdot\|$.

   Todos los sumandos que definen $|||\cdot|||$ son positivos, así pues, se tiene que $\|x\|^2 \leq |||x|||^2$ y, por tanto: $\|x\| \leq |||x|||$. Por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned} |||x|||^2 &\leq \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_n(x)|^2 \\ &\leq 2\|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \|f_n\|^2 \|x\|^2 = 3\|x\|^2 \end{aligned}$$

   Luego, $|||x||| \leq \sqrt{3}\, \|x\|$. Y acabamos.

Veremos ahora que $|||\cdot|||$ es LUR. Para este fin, supongamos dados $x_n, n \in X$ tales que: $\lim_n(2|||x|||^2 + 2|||x_n|||^2 - |||x+x_n|||^2) = 0$. Ahora bien:

$$\begin{aligned}2|||x|||^2 + 2|||x_k|||^2 - |||x+x_k|||^2 &= 2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x+x_k\|^2 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(2\operatorname{dist}(x,F_n)^2 + 2\operatorname{dist}(x_k,F_n)^2 - \operatorname{dist}(x+x_k,F_n)^2) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(2f_n(x)^2 + 2f_n(x_k)^2 - f_n(x+x_k)^2)\end{aligned}$$

Y la desigualdad triangular de $\|\cdot\|$ nos da:

$$2\|x\|^2 + 2\|x_k\|^2 - \|x+x_k\|^2 \geq 2(\|x\| - \|x_k\|)^2 \geq 0$$

$$2\operatorname{dist}(x,F_n)^2 + 2\operatorname{dist}(x_k,F_n)^2 - \operatorname{dist}(x+x_k,F_n)^2 \geq (\operatorname{dist}(x,F_n) - \operatorname{dist}(x_k,F_n))^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}2f_n(x)^2 + 2f_n(x_k)^2 - f_n(x+x_k)^2 &= 2f_n(x)^2 + 2f_n(x_k)^2 - (f_n(x) + f_n(x_k))^2 \\ &= (f_n(x) - f_n(x_k))^2 \geq 0\end{aligned}$$

existen los límites de estas tres expresiones y también valen 0.

Así pues, concluimos:

(1) $\lim_k \|x_k\| = \|x\|$.

(2) $\lim_k \operatorname{dist}(x_k, F_n) = \operatorname{dist}(x, F_n)$ para todo n.

(3) $\lim_k f_n(x_k) = f_n(x)$ para todo n.

Como $\{f_n\}$ separa puntos de X, la topología de la convergencia puntual en $\{f_n\}$ es una topología Hausdorff en X. Veremos más tarde que $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ es compacto en la norma. Por lo tanto, en $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ la topología de la convergencia en $\{f_n\}$ es equivalente a la topología de la norma (lema 2.1.2), y así, como por (3) $f_n(x_k) \to f_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_k \to x$ en norma, que es lo que queríamos probar. Sólo nos queda probar que $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ es compacto en norma.

Usando (1), elegimos $K > 0$ tal que $\|x_k\| \leq K$, $\forall k$. Sea $\varepsilon \in (0,1)$ dado. Elegimos n tal que $dis(x, F_n) < \varepsilon$ y tomamos $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ tales que las bolas $B(y_i, \varepsilon)$ cubren $(K+1)B_{F_n}$. Éstos existen por ser F_n finito dimensional y, por ende B_{F_n}compacta. Usando (2), elegimos k_0 tal que $\operatorname{dist}(x_k, F_n) < \varepsilon$, $\forall k > k_0$. Afirmamos que $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}\} \cup F$ es una 2ε-red para $\{x_k\} \cup \{x\}$.

En efecto, $\forall k > k_0$ existe $x'_k \in F_n$ tal que $\|x_k - x'_k\| < \varepsilon$. Como $\|x_k\| \leq K$, $\forall k$ y $\varepsilon < 1$, tenemos que $\|x'_k\| \leq \|x_k\| + \|x'_k - x_k\| \leq K + \varepsilon < K+1$. Como F es una ε-red para $(K+1)B_{F_n}$, existe $x''_k \in F$ tal que $\|x''_k - x'_k\| < \varepsilon$ y, por tanto: $\|x_k - x''_k\| < 2\varepsilon$.

Así pues, queda probado que $\{x_k\} \cup \{x\}$ es totalmente acotado y por tanto $\overline{\{x_k\} \cup \{x\}}$ es compacto. $\square$

Este último lema se aleja de los objetivos de la sección. Aún así, lo incluimos en ella pues será de utilidad en la prueba final y sólo maneja la hipótesis de que el espacio de Banach tenga una norma LUR.

Lema 2.1.5. *Un espacio de Banach X con norma LUR tiene la propiedad de Kadec-Klee. Esto es la topología débil y la topología de la norma coinciden en la esfera unidad.*

Demostración. Sean x_n, $x \in S_X$ tales que $x_n \xrightarrow{\omega} x$. Sea $f \in S_{X^*}$ con $f(x) = 1$. Se tiene que $f(x_n + x) \to 2$. Como $f(x_n + x) \leq \|f\| \|x_n + x\| = \|x_n + x\|$ se tiene $\lim_n \|x_n + x\| \geq 2$. Pero claro $\|x_n + x\| \leq \|x_n\| + \|x\| = 2$. Luego $\lim_n \|x_n + x\| = 2$, y como la norma es LUR tenemos $x_n \to x$. □

2.2. Existencia de mejores aproximaciones

Una pieza clave en la construcción que necesitaremos hacer para la prueba del teorema final es la existencia de mejores aproximaciones, esto es; dado un cerrado convexo del espacio y un punto cualquiera exista un único elemento del cerrado para el cual se alcanza la distancia del punto al conjunto.

Para obtener este resultado nos serán necesarias las hipótesis de reflexividad y de que la norma que manejamos es LUR, en el contexto separable, como sabemos, tenemos dichos tipos de norma.

Veamos antes un concepto necesario en las prueba de la proposición 2.2.3

Definición 2.2.1. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, donde X es un espacio topológico. Se dice que f es inferiormente semicontinua si cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes*

- $f^{-1}(-\infty, \alpha]$ *es cerrado para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $f^{-1}(\alpha, \infty)$ *es abierto para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 2.2.2. *Sea f una función inferiormente semicontinua y x_n una sucesión en X que converge a un cierto $x \in X$, de forma que la sucesión $f(x_n)$ está acotada. Entonces* $\liminf_n f(x_n) \geq f(x)$.

Demostración. Llamamos $d = \liminf_n f(x_n)$ y supongamos que $f(x) > d$. Podemos suponer, tomando una adecuada subsucesión, que $d = \lim_n f(x_n)$ y que $\{f(x_n)\}$ está por debajo del punto medio del segmento $[d, f(x)]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, si llamamos $A = f^{-1}(\frac{d+f(x)}{2}, \infty)$, por ser f inferiormente semicontinua A es un entorno de x, luego debería contener a partir de un momento a la sucesión x_n pero esto implicaría que, a partir de un momento, $f(x_n) > \frac{d+f(x)}{2}$ que supone una contradicción. □

Proposición 2.2.3. *Si un espacio de Banach X es reflexivo entonces la distancia de cualquier punto a un subconjunto dado convexo y cerrado se alcanza.*

Demostración. Sea $x \in X$ y $d = \operatorname{dist}(x, C)$, donde C es un subconjunto de X cerrado y convexo. Consideremos $\{c_n\}_n \subset C$ tales que $\|x - c_n\| \to d$. La desigualdad $\|c_n\| \leq \|x - c_n\| + \|x\|$ nos asegura que la sucesión $\{c_n\}_n$ está acotada. Si suponemos que la sucesión $\{c_n\}$ tiene una subsucesión convergente en la topología débil a un cierto c, entonces,como C es cerrado y convexo, C es ω-cerrado (teorema de Mazur 1.1.14), y, por tanto $c \in C$. La norma es ω-inferiormente semicontinua pues los conjuntos $\|\cdot\|^{-1}(-\infty, \alpha]$ son convexos y cerrados, y así, ω-cerrados. Luego, por el corolario anterior, $\|x - c\| \leq d$. Y, como, por la definición de d, no puede ocurrir $\|x - c\| < d$, se tiene $d = \|x - c\|$.

El hecho de que la sucesión $\{c_n\}$ tenga tal subsucesión es consecuencia del lema 2.2.4, que demostramos a continuación. □

Lema 2.2.4. *Se satisface:*

(i) Toda sucesión acotada en el dual de un espacio de Banach separable tiene una subsucesión ω^* convergente.

(ii) Toda sucesión acotada en un espacio de Banach reflexivo tiene una subsucesión débil convergente.

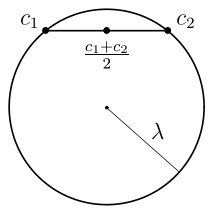
Demostración. Veamos (i). Consideremos una sucesión $\{f_n\}$ en X^* acotada. Gracias a la proposición 1.1.17, sabemos que (B_{X^*}, ω^*) es métrico compacto. Y, por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ tiene una subsucesión ω^* convergente.

Para ver (ii), sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada y consideremos $Y = \overline{\operatorname{span}(x_n)}$. Entonces Y es separable y reflexivo y, por tanto, también lo es Y^{**}. Así pues, Y^* también es separable (Prop. 1.1.16). Luego, $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en Y^{**} que es dual de un separable, y por el punto anterior, existe una subsucesión ω^* convergente en Y^{**}. Es decir, una subsucesión que converge débilmente en Y, y, así en X. □

Proposición 2.2.5. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y estrictamente convexo (ver definiciones 1.1.11 y 1.3.3), y C un cerrado convexo en X. Entonces, para cada $x \in X$ existe un único punto $y \in C$ tal que* $\operatorname{dist}(x, C) = \|x - y\|$.

Demostración. La existencia queda asegurada por la proposición anterior. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x = 0$ y $\operatorname{dist}(x, C) = 1$, sea $c_1 \neq c_2 \in C$ con $\|c_1\| = \|c_2\| = 1$ entonces $\frac{1}{2}(c_1 + c_2) \in C$, y por ser X estrictamente convexo se tiene $\left\|\frac{1}{2}(c_1 + c_2)\right\| < 1$, una contradicción.

Para mayor claridad mostramos una prueba más elocuente:



Dado $x \in X$ tal que $\operatorname{dist}(x, C) = \lambda$ y sean $c_1 \neq c_2$ tales que $\|x - c_1\| = \lambda = \|x - c_2\|$ entonces $\frac{1}{2}(c_1 + c_2) \in C$, y

$$\left\| x - \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \right\| = \left\| \frac{1}{2}(x - c_1) + \frac{1}{2}(x - c_2) \right\| < \frac{1}{2}(\|x - c_1\| + \|x - c_2\|) = \lambda$$

lo que constituye una contradicción. □

Nótese que la existencia viene asegurada únicamente por la reflexividad de X y la unicidad por la convexidad estricta.

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es el siguiente corolario. Sólo hemos de tener en cuenta que una norma LUR es siempre estrictamente convexa.

Corolario 2.2.6. *Sea X un espacio de Banach reflexivo y LUR, y C un cerrado convexo en X. Entonces, para cada $x \in X$ existe un único punto $y \in C$ tal que* $\operatorname{dist}(x, C) = \|x - y\|$.

2.3. Bases de Markushevich en separables

El objetivo de esta sección es demostrar el corolario 2.3.3 que afirma que todo espacio separable admite una base de Markushevich. Para ello, una pieza fundamental es el teorema 2.3.2. Pero antes de nada debemos ver la definición de tal concepto:

Sea X un espacio de Banach, y consideremos vectores $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset X$. Una familia de funcionales $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset X^*$ se dice que es biortogonal a $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ si $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ para $\alpha, \beta \in \Gamma$. En este caso, a la familia $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ se le denomina **sistema biortogonal** en X.

Definición 2.3.1. *Sea X un espacio de Banach. Un sistema biortogonal en X, $\{x_\alpha, f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$, es una base de Markushevich de X si $\overline{\operatorname{span}}\{x_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} = X$ y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ separa los puntos de X.*

Como dijimos antes, el siguiente es el teorema central de la sección. En realidad, sólo es una generalización del método de ortogonalización de Gram-Smith, que permite obtener bases ortonormales en cualquier espacio de Hilbert. Veamos:

Teorema 2.3.2. *Sea X un espacio de Banach separable. Si $\{z_i\}_i \subset X$ satisface $\overline{\operatorname{span}}\{z_i\}_i = X$ y $\{g_i\}_i \subset X^*$ separa puntos de X, entonces, existe una base de Markushevich $\{x_i, f_i\}$ de X tal que* $\operatorname{span}\{x_i\} = \operatorname{span}\{z_i\}$ *y* $\operatorname{span}\{g_i\} = \operatorname{span}\{f_i\}$.

Demostración. Definimos: $x_1 = z_1$ y $f_1 = g_{k_1}/g_{k_1}(z_1)$, donde $k_1 \in \mathbb{N}$ es el primer índice para el que $g_{k_1}(z_1) \neq 0$. Ahora, buscamos el entero más pequeño h_2 de forma que $g_{h_2} \notin \operatorname{span}\{f_1\}$ y definimos $f_2 = g_{h_2} - g_{h_2}(x_1)f_1$. A continuación, buscamos un índice k_2 tal que $f_2(z_{k_2}) \neq 0$ y definimos $x_2 = (z_{k_2} - f_1(z_{k_2})x_1)/f_2(z_{k_2})$. Sea h_3 el índice más pequeño tal que $z_{h_3} \notin \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$. Escribimos $x_3 = z_{h_3} - f_1(z_{h_3})x_1 - f_2(z_{h_3})x_2$ y $f_3 = (g_{k_3} - g_{k_3}(x_1)f_1 - g_{k_3}(x_2)f_2)/g_{k_3}(x_3)$ con k_3 el primer índice tal que $g_{k_3}(x_3) \neq 0$. Inductivamente continuamos la construcción del siguiente modo:

- En el paso $2n$, tomamos h_{2n} el menor entero tal que $g_{h_{2n}}$ no está en $\text{span}\{f_1, f_2, \ldots, f_{2n-1}\}$ y construimos

$$f_{2n} = g_{h_{2n}} - \sum_{i=1}^{2n-1} g_{h_{2n}}(x_i)f_i \quad \text{y} \quad x_{2n} = \frac{z_{k_{2n}} - \sum_{i=1}^{2n-1} f_i(z_{k_{2n}})x_i}{f_{2n}(z_{k_{2n}})},$$

  donde k_{2n} es el menor entero tal que $f_{2n}(z_{k_{2n}}) \neq 0$.

- En el paso $2n+1$, construimos

$$x_{2n+1} = z_{h_{2n+1}} - \sum_{i=1}^{2n} f_i(z_{h_{2n+1}})x_i \quad \text{y} \quad f_{2n+1} = \frac{g_{h_{2n+1}} - \sum_{i=1}^{2n} g_{k_{2n+1}}(x_i)f_i}{g_{k_{2n+1}}(x_{2n+1})}.$$

  Donde h_{2n+1} y k_{2n+1} son los menores enteros que cumplen respectivamente $g_{k_{2n+1}}(x_{2n+1}) \neq 0$ y $z_{h_{2n+1}} \notin \text{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_{2n}\}$.

Con un argumento de inducción es sencillo probar que $\{x_i, f_i\}$ es biortogonal, que $\text{span}\{x_i\} = \text{span}\{z_i\}$, $\text{span}\{g_i\} = \text{span}\{f_i\}$ y que $\{f_i\}$ separa los puntos de X.

Nótese que como hipótesis de inducción para la prueba de lo anterior se puede utilizar que $\{x_i, f_i\}_i^n$ es biortogonal y que:

- Si $n = 2m$
  - $\text{span}\{f_i\}_{i=1}^{2m} = \text{span}\{g_j\}_{j=1}^{h_{2m}}$
  - $\text{span}\{x_i\}_{i=1}^{2m} = \text{span}\{z_j\}_{j=1}^{k_{2m}}$
- Si $n = 2m-1$
  - $\text{span}\{f_i\}_{i=1}^{2m-1} = \text{span}\{g_j\}_{j=1}^{k_{2m-1}}$
  - $\text{span}\{x_i\}_{i=1}^{2m-1} = \text{span}\{z_j\}_{j=1}^{h_{2m-1}}$ □

Finalmente podemos demostrar el resultado buscado, apoyándonos para ello en el teorema anterior y en las propiedades fundamentales de los espacios separables.

Corolario 2.3.3. *Si X es un espacio de Banach separable, tiene una base de Markushevich.*

Demostración. Tomamos $\{z_i\}_i$ un conjunto denso en X. Por el lema 2.1.3 podemos encontrar una familia de funcionales continuos $\{g_i\}_i$ que separan puntos de X. Si aplicamos ahora el teorema anterior obtenemos $\{x_i, f_i\}$ una base de Markusevich para X. □

La razón de que introduzcamos el concepto de base de Markusevich es que en general en un espacio de Banach separable no existen bases de Schauder. Está pregunta que formuló Mazur fue contestada por Enflo de forma afirmativa, esto es, existen espacios de Banach separables sin base de Schauder.

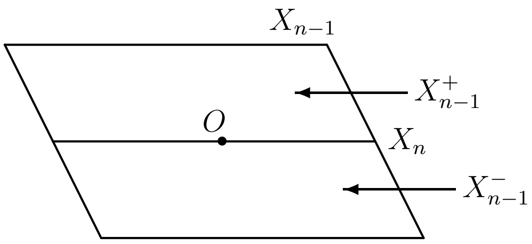
2.4. Prueba del Teorema

En primer lugar, haremos una construcción sobre un espacio de Banach separable, reflexivo e infinito dimensional cualquiera, para después poder establecer el homeomorfismo entre dos de ellos (teorema 2.4.7). Sea pues, X un espacio de Banach separable, reflexivo e infinito dimensional. Gracias al teorema 2.1.4 y al corolario 2.3.3, podemos suponer que nuestra norma es LUR y que existe una base de Markushevich $\{x_i, f_i\}$ en X.

Para $n \in \mathbb{N}_0$, definimos $X_n := \overline{\text{span}}\{x_{n+1}, \dots\}$. Dado $i \in \mathbb{N}$, tenemos $f_i(x) = 0$, $\forall x \in X_i$ y, por tanto $f_i(x) = 0$, $\forall x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$, $\forall i$. Como por definición $\{f_i\}$ separa puntos de X tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{0\}$. Además, $X_n + \text{span}\{x_n\}$ es cerrado en X_{n-1} y $X_n + \text{span}\{x_n\}$ contiene a $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$, por lo tanto $X_n + \text{span}\{x_n\} = X_{n-1}$.

En efecto, X_n es cerrado, y la dimensión de $\text{span}\{x_n\}$ es uno, finita. Por tanto, $X_n + \text{span}\{x_n\}$ es cerrado (Lema 1.1.5). Además, como $\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subset X_n + \text{span}\{x_n\}$ y, en consecuencia, $\text{span}\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subset X_n + \text{span}\{x_n\}$, tenemos $X_{n-1} = \overline{\text{span}}\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \subset X_n + \text{span}\{x_n\}$. La otra inclusión es evidente por la construcción de los X_n.

Por tanto, X_n es un hiperplano de X_{n-1} (pues $X_n \cap \text{span}\{x_n\} = 0$) generado por f_n que divide X_{n-1} en tres partes mutuamente disjuntas: X_n y los semiespacios abiertos: $X_{n-1}^{+} = f_n^{-1}(0, \infty)$, $X_{n-1}^{-} = f_n^{-1}(-\infty, 0)$. En efecto, pues $X_{n-1} = X_n \oplus \text{span}\{x_n\}$ y X_n es un hiperplano de X_{n-1} que cumple $f_n|_{X_n} = 0$.



Por inducción, la codimensión de X_n es n. En efecto, si $n = 0$, $X_0 = \overline{\text{span}}\{x_1, x_2, \dots\} = X$ luego su codimensión es 0. Supuesto cierto para $n \geq 0$, como $X_n = X_{n+1} \oplus \text{span}\{x_{n+1}\}$ se tiene que la codimensión de X_{n+1} es la codimensión de X_n, que por hipótesis de inducción es n, más uno, esto es $n + 1$.

Veamos un par de lemas acerca del buen comportamiento de esta construcción.

Lema 2.4.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ la función $D_n(x) := \text{dist}(x, X_n)$ es ω-continua.*

Demostración. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ fijo. Sean $z_k, z \in X$ tales que $z_k \xrightarrow{\omega} z$. Denotemos $\hat{z_k}$, $\hat{z}$ a sus respectivas clases en X/X_n. Veamos que $\hat{z_k} \xrightarrow{\omega} \hat{z}$ en X/X_n, para ello, tomemos $g \in (X/X_n)^*$ y sea $p : X \to X/X_n$ la proyección natural que es lineal y continua. Tenemos, así que $g \circ p \in X^*$ y, por tanto $|g(\hat{z_k}) - g(\hat{z})| = |g \circ p(z_k) - g \circ p(z)|$, luego, en efecto $\hat{z_k} \xrightarrow{\omega} \hat{z}$.

Como X/X_n es de dimensión finita la topología débil y de la norma coinciden, luego $\hat{z_k} \to \hat{z}$ y como, por definición $\operatorname{dist}(x, X_n) = \|\hat{x}\|$ para todo $x \in X$ y $|\,\|\hat{z_k}\| - \|\hat{z}\|\,| \leq \|\hat{z_k} - \hat{z}\|$, se tiene que $D_n(z_k) \to D_n(z)$. $\square$

Lema 2.4.2. *Para cada $x \in X$ tenemos*

$$0 \leq D_n(x) \leq D_{n+1}(x) \leq \|x\|$$

y, además

$$\lim_{n\to\infty} D_n(x) = \|x\|\,.$$

Demostración. Gracias a que la sucesión de subespacios X_n es decreciente tenemos de forma directa que la sucesión $D_n(x)$, para cada $x \in X$ fijo es no decreciente. Claramente $D_n(x) \geq 0$ para cada $x \in X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$. Y como, para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es un espacio vectorial, entonces $D_n(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in X_n\} \leq \|x - 0\| = \|x\|$ y, por tanto, las desigualdades iniciales han sido probadas.

Para probar la segunda afirmación, fijado $x \in X$ podemos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$, gracias a la proposición 2.2.5, un cierto $z_n \in X_n$ tal que $D_n(x) = \|x - z_n\|$.

Es claro que $z_n \xrightarrow{\omega} 0$. En efecto, dado $i \in \mathbb{N}$ tenemos $f_i(z_n) = 0$ para todo $n \geq i$, pues $f_i = 0$ en X_n. Como B_X es ω-compacta (teorema 1.1.21) y la topología de convergencia puntual de $\{f_i\}$ sobre B_X es Hausdorff, la topología débil y la $\{f_i\}$-topología coinciden en B_X. Como además $\|z_n\| \leq \|x\| + \|x - z_n\| = \|x\| + D_n(x) \leq 2\,\|x\| = M$, se tiene que $\frac{z_n}{M} \in B_X$; pero claro, $\frac{z_n}{M}$ converge a 0 en la $\{f_i\}$-topología y por tanto en la débil, es decir, sea cual sea $f \in X^*$ se tiene que $f(\frac{z_n}{M})$ converge a 0, luego $f(z_n)$ también lo hace.

Por otro lado, el hecho de que la norma sea ω-inferiormente semicontinua nos permite obtener que $\|x\| \leq \liminf_n \|x - z_n\|$ (ver prop. 2.2.3 y lema 2.2.2). Por tanto

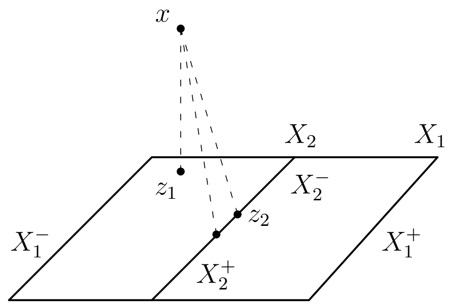
$$\|x\| \leq \liminf_n \|x - z_n\| \leq \limsup_n \|x - z_n\| \leq \|x\|\,,$$

ya que $\|x - z_n\| = D_n(x) \leq \|x\|$ para todo n. Luego, en efecto, $\lim_{n\to\infty}(\operatorname{dist}(x, X_n)) = \|x\|$. $\square$

Para $n \in \mathbb{N}$, y $x \in X$ tenemos $D_n(x) = \|x - z_n\|$ para únicos $z_n \in X_n$ determinados por x. Además, para cada $x \in X$ asignamos una sucesión $\{d_n(x)\}_n$ definida inductivamente por:

$$d_1(x) = \begin{cases} D_1(x) & \text{si } x \in X_0^+ \cup X_1, \\ -D_1(x) & \text{si } x \in X_0^-. \end{cases}$$

$$d_{n+1}(x) = \begin{cases} D_{n+1}(x) & \text{si } z_n \in X_n^+, \\ d_n(x) & \text{si } z_n \in X_{n+1}, \\ -D_{n+1}(x) & \text{si } z_n \in X_n^-. \end{cases}$$



$$d_1 = \|x - z_1\|$$
$$d_2 = -\|x - z_2\|$$
$$d_3 = -\|x\|$$

A la función $d_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la llamaremos n-distancia signada.

Para cada $x \in X$, por tanto, tenemos una sucesión de números reales que satisfacen ciertas propiedades de interés.

Lema 2.4.3. *Supongamos dado $x \in X$ con $\|x\| = 1$ y consideremos la sucesión $\{d_n(x)\}_{n<\omega}$. Entonces*

1. $|d_{n+1}(x)| \geq |d_n(x)|$.
2. $\sup_n |d_n(x)| = 1$.
3. *Si* $|d_{n+1}(x)| = |d_n(x)|$ *entonces* $d_{n+1}(x) = d_n(x)$.

Demostración. La primera de las propiedades del lema es evidente, puesto que $D_n(x) = |d_n(x)|$. La segunda propiedad se sigue de la siguiente igualdad

$$\sup_n |d_n(x)| = \sup_n D_n(x) = \|x\| = 1.$$

Para probar la tercera propiedad observemos que gracias a la unicidad de la mejor aproximación si z_n no está en X_{n+1} entonces $D_n(x) < D_{n+1}(x)$. Esto es $|d_{n+1}(x)| > |d_n(x)|$. Luego si suponemos que $|d_{n+1}(x)| = |d_n(x)|$ entonces, z_n está en X_{n+1} y, por definición de d_n, $d_{n+1}(x) = d_n(x)$. □

A la vista de este lema, la siguiente proposición resulta ser la clave para la construcción del homeomorfismo deseado, ya que nos permitirá establecer una biyección entre las esferas unidad de dos espacios de Banach separables y reflexivos.

Proposición 2.4.4. *Sea d_n una sucesión de números reales que cumplen $|d_{n+1}| \geq |d_n|$ para cada n, $\sup_n |d_n| = 1$, y $d_{n+1} = d_n$ si $|d_{n+1}| = |d_n|$. Entonces existe un único $x \in S_X$ tal que $d_n(x) = d_n$ para todo n.*

La prueba de ésta se basa en el siguiente lema.

Lema 2.4.5. *Sean $d_1, \ldots, d_n$ una sucesión de números reales que cumplen $|d_{i+1}| \geq |d_i|$ para todo $i < n$ y $d_{i+1} = d_i$ si $|d_{i+1}| = |d_i|$. Sea Q_n el conjunto de todos los $x \in X$ tales que $d_i(x) = d_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces*

$$Q_n = a_n + X_n \quad \textit{para algún } a_n \in X$$

Demostración. Para $n = 1$, el conjunto Q_1 es una traslación de X_1 y el resultado se tiene. En efecto, definimos $Q_{1,\lambda} = X_1 + \lambda y$, tomando $y \in X_0^+$ cualquiera. Si tomamos $x_\lambda \in Q_{1,\lambda}$ se tiene que

$$d_1(x_\lambda) = \text{sgn } \lambda \cdot D_1(x_\lambda) = \text{sgn } \lambda \cdot |\lambda| D_1(y) = \lambda \cdot d_1(y).$$

Así, pues, si llamamos $h_1 = \frac{d_1}{d_1(y)}$ se tiene $Q_{1,h_1} = X_1 + h_1 y \subset Q_1$. Ahora bien si existe $x \in Q_1$ con $x \notin Q_{1,h_1}$ entonces existe $\lambda \neq h_1$ tal que $x \in Q_{1,\lambda}$, pero entonces $d_1(x) = \lambda \cdot d_1(y) \neq h_1 d_1(y) = d_1$, que constituye una contradicción junto con que $x \in Q_1$.

Luego $Q_1 = X_1 + h_1 y$.

Asumimos que nuestra afirmación es cierta para $d_1, \ldots, d_{n-1}$ y denotamos el espacio afín resultante por Q_{n-1}. El conjunto Q_n es, obviamente, un subconjunto de Q_{n-1}.

Podemos tomar un elemento x de Q_{n-1} con norma mínima, en particular $\|x\| = |d_{n-1}|$. En efecto, dado a_{n-1} existe un cierto $z \in X_{n-1}$ tal que $\|a_{n-1} - z\| = D_{n-1}(a_{n-1})$. Pero claro, por un lado, $a_{n-1} - z \in Q_{n-1}$ y, por otro lado $|d_{n-1}| = D_{n-1}(a_{n-1}) = \inf_{x \in X_{n-1}} \|a_{n-1} + x\| = \inf_{x \in Q_{n-1}} \|x\|$.

Sea y un punto arbitrario de X_{n-1}^+. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, para cada elemento x_λ del subespacio afín $Q_{n,\lambda} = X_n + x + \lambda y$, tenemos $D_i(x_\lambda) = |d_i|$ para $i = 1, \ldots, n-1$, pues $Q_{n,\lambda} \subset Q_{n-1}$, y definimos $\psi(\lambda) := D_n(x_\lambda) = D_n(x + \lambda y)$. Si variamos λ, tenemos que la función $\psi(\lambda)$ es estrictamente convexa. En efecto, dados λ_1 y λ_2, sean z_1 y z_2 tales que $\psi(\lambda_i) = \|z_i - (x + \lambda_i y)\|$, para $i = 1, 2$, entonces

$$\psi\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) \leq \left\| \frac{z_1 + z_2}{2} - \left(x + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y\right)\right\| < \frac{\psi(\lambda_1) + \psi(\lambda_2)}{2}.$$

Alcanza su mínimo en 0 con $\psi(0) = |d_{n-1}|$, pues $\psi(\lambda) = D_n(x_\lambda) \geq D_{n-1}(x_\lambda) = |d_{n-1}|$, y $\psi(0) = \|x\| = |d_{n-1}|$. La ecuación $\psi(\lambda) = |d_n|$ para $|d_n| > |d_{n-1}|$ tiene exactamente una solución positiva λ_1 y otra negativa λ_2, ambas únicas, ya que $|d_n| > |d_{n-1}|$. Y cuando $|d_n| = |d_{n-1}|$ la única solución es $\lambda = 0$.

Cada una de estas soluciones nos da un subespacio afín $Q_{n,0}$, Q_{n,λ_1} y Q_{n,λ_2}, cuyos elementos satisfacen $d_n(x_0) = d_{n-1}(x_0)$, $d_n(x_{\lambda_1}) = |d_n|$, y $d_n(x_{\lambda_2}) = -|d_n|$, respectivamente, por definición de d_n. Análogamente al caso $n = 1$ se ve que cualquier x que cumple esas condiciones está respectivamente en $Q_{n,0}$, Q_{n,λ_1} y Q_{n,λ_2}. Esto termina la prueba del lema. □

Demostración (de la proposición 2.4.4). El conjunto S de todos los elementos $x \in X$ tales que $d_n(x) = d_n$ para cada n es la intersección de los conjuntos Q_n del lema anterior. Como Q_n es una traslación de X_n, si la intersección de todos los Q_n contiene dos puntos, esto es x, $y \in \cap Q_n$ entonces $x - y \in \cap X_n$ pero $\cap X_n = \{0\}$ luego $x = y$.

Por tanto, el conjunto S es como mucho unipuntual. Para ver que S es no vacío, consideramos la intersección de Q_n con B_X. Como $|d_n| \leq 1$ y la distancia de Q_n a X_n es $|d_n|$, tenemos $B_X \cap Q_n \neq \emptyset$, pues puedo tomar $x \in Q_n$, $\|x\| = |d_n|$ y, por tanto, $x \in B_X \cap Q_n$.

Los conjuntos ω-compactos $B_X \cap Q_n$ forman una familia encajada de ω-compactos, y, por tanto su intersección es no vacía y contenida en S_X, puesto que $\sup_n |d_n| = 1$. En efecto, cualquier $x \in \cap_n (B_X \cap Q_n) = B_X \cap (\cap_n Q_n)$ satisface que $d_n(x) = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $|d_n|$ tiende a 1 entonces $D_n(x)$ converge a 1, pero claro, $D_n(x)$ converge a $\|x\|$. $\square$

Lema 2.4.6. *Sean X e Y dos espacios de Banach. Si $S_X \cong S_Y$ entonces $X \cong Y$.*

Demostración. Sea $\varphi : S_X \longrightarrow S_Y$ un homeomorfismo. Definimos ahora la aplicación ϕ de la siguiente forma: $\phi(0) = 0$ y $\phi(x) = \|x\| \cdot \varphi(x/\|x\|)$ si $x \neq 0$. Está claro que ϕ es un homeomorfismo. Para probarlo sólo hemos de considerar la aplicación $\psi : Y \longrightarrow X$ definida por $\psi(0) = 0$ y $\psi(y) = \|y\| \cdot \varphi^{-1}(y/\|y\|)$ y comprobar las igualdades:

- $\phi \circ \psi = I_Y$: Dado $y \in Y$ no nulo, se tiene que
$$\|\psi(y)\| = \|y\| \cdot \left\| \varphi^{-1}\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \|y\|,$$
entonces
$$\begin{aligned} \phi \circ \psi(y) &= \|\psi(y)\| \cdot \varphi\left(\frac{\psi(y)}{\|\psi(y)\|}\right) = \|y\| \cdot \varphi\left(\frac{\|y\| \cdot \varphi^{-1}\left(\frac{y}{\|y\|}\right)}{\|y\|}\right) \\ &= \|y\| \cdot \varphi\left(\varphi^{-1}\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right) = \|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|} = y. \end{aligned}$$
Para $y = 0$ es evidente.

- $\psi \circ \phi = I_X$: Dado $x \in X$ no nulo, tenemos
$$\|\phi(x)\| = \|x\| \cdot \left\| \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\|,$$
entonces
$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(x) &= \|\phi(x)\| \, \varphi^{-1}\left(\frac{\phi(x)}{\|\phi(x)\|}\right) = \|x\| \, \varphi^{-1}\left(\frac{\|x\| \, \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)}{\|x\|}\right) \\ &= \|x\| \, \varphi^{-1}\left(\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) = \|x\| \, \frac{x}{\|x\|} = x. \end{aligned}$$
Para $y = 0$ es evidente. $\square$

Teorema 2.4.7 (Kadec, versión reflexivo). *Todos los espacios de Banach reflexivos y separables son mutuamente homeomorfos.*

Demostración. Sean X e Y espacios de Banach infinito dimensionales separables y reflexivos. Asumimos que sus normas son LUR y que $\{x_i, f_i\}$ e $\{y_i, g_i\}$ son bases de Markusevich de X e Y respectivamente. Construimos subespacios cerrados X_n de X e Y_n de Y como antes, y definimos D_n^X, d_n^X en X y D_n^Y, d_n^Y en Y de la misma forma.

Construimos una aplicación φ de S_X en S_Y como sigue: Dado $x \in S_X$, sea $\varphi(x)$ el único elemento de S_Y tal que $d_n^Y(\varphi(x)) = d_n^X(x)$, para todo n. Esto queda asegurado por la proposición 2.4.4. Entonces, de nuevo por la proposición 2.4.4 φ es inyectiva y está bien definida. Como los papeles de X e Y son intercambiables, para probar que φ es un homeomorfismo de S_X en S_Y sólo necesitamos ver que φ es continua.

Para este fin, suponemos que $x_k,\ x \in S_X$, y $x_k \to x$. Ahora bien por el lema 2.1.5 en S_Y la topología de la norma y la débil coinciden y como $\varphi(x_k),\ \varphi(x) \in S_Y$, es suficiente ver que $\varphi(x_k) \overset{\omega}{\to} \varphi(x)$. Supongamos lo contrario. Entonces por el teorema 1.1.18 $\varphi(x_{k_l}) \overset{\omega}{\to} y \in B_Y$ para cierta subsucesión de $\{x_k\}$, $y \neq \varphi(x)$.

Sea $n_0 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : d_n^Y(y) \neq d_n^X(x)\}$. Entonces se tiene una de las siguientes situaciones:

1. $\left|d_{n_0}^Y(y)\right| > \left|d_{n_0-1}^Y(y)\right|$,
2. $\left|d_{n_0}^X(x)\right| > \left|d_{n_0-1}^X(x)\right|$,
3. $\left|d_{n_0}^Y(y)\right| = \left|d_{n_0-1}^Y(y)\right|$ y $\left|d_{n_0}^X(x)\right| y \left|d_{n_0-1}^X(x)\right|$.

En el último caso, se tiene que $d_{n_0}^Y(y) = d_{n_0-1}^Y(y)$ y $d_{n_0}^X(x) = d_{n_0-1}^X(x)$. Luego $d_{n_0}^X(x) = d_{n_0}^Y(y)$, que supone una contradicción.

Por la simetría los dos primeros casos se pueden asumir uno sólo. Así, vamos a probar sólo el primer caso. Como sgn $d_{n_0}^Y$ es continua en la $\{f_i\}$-topología en los puntos donde $z_{n_0-1} \notin Y_{n_0}$, tenemos que sgn $d_{n_0}^Y$ es continua en la $\{g_i\}$-topología en los puntos $p \in B_Y$ donde se verifica que $|d_{n_0-1}^Y(p)| < |d_{n_0}^Y(p)|$. Y, por lo tanto $d_{n_0}^Y$ es ω- continua en dichos puntos. Consecuentemente:

$$\lim_l d_{n_0}^Y(\varphi(x_{k_l})) = d_{n_0}^Y(y).$$

Por hipótesis, sin embargo, $\text{lím}_l\, |d_{n_0}^Y(\varphi(x_{k_l}))| = \text{lím}_l\, |d_{n_0}^X(x_{k_l})| = |d_{n_0}^X(x)|$, puesto que $|d_n| = D_n$, y esto implica claramente la tercera condición y, por tanto, nos lleva a una contradicción.

Por tanto, φ es continua y φ es un homeomorfismo de S_X en S_Y. Aplicando ahora el lema 2.4.6 acabamos. $\square$

Capítulo 3

Espacios Separables

En este capítulo vamos a prescindir de la hipótesis adicional de la reflexividad. Esto va a suponer que ya no podamos construir de forma explícita el homeomorfismo debido a que para poder establecer dicho homeomorfismo será necesaria la utilización del teorema de Bartle-Graves.

3.1. Preliminares

3.1.1. Un resultado de interés sobre espacios de Banach

Definición 3.1.1. *Dado E un espacio topológico, se define su peso,* $\mathrm{Wgh}(E)$*, como el ínfimo de los cardinales de las bases de la topología.*

Por ejemplo, un espacio topológico E que sea segundo axioma de numerabilidad, tiene una base de la topología numerable luego $\mathrm{Wgh}(E) \leq \aleph_0$. Sin embargo, un espacio primer axioma de numerabilidad no tiene por qué tener una base de cardinal menor que uno dado, sólo hemos de considerar un conjunto con el cardinal que queramos y dotarlo de la topología discreta. El concepto topológico de carácter de densidad es bien conocido, sin embargo, en nuestro trabajo vamos a manejar una modificación de éste.

Definición 3.1.2. *Dado X un espacio vectorial topológico metrizable. Se denomina carácter de densidad de X,* $\mathrm{Dens}(X)$*, al cardinal siguiente:*

- $\dim(X)$ *si X es finito dimensional.*
- $\mathrm{Wgh}(X)$ *si X es infinito dimensional.*

Teorema 3.1.3. *Sea X un espacio de Banach. Entonces X es isomorfo a un cociente de $l_1(A)$, donde* $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Dens}(X)$.

Demostración. En el caso en que X es finito dimensional la afirmación es obvia. Por tanto, asumiremos que $\operatorname{Dens}(X) \geq \aleph_0$. Sea $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, la bola unidad cerrada de X, y sea A un subconjunto denso en B tal que $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Dens}(X)$. Definimos un operador lineal $T : l_1(A) \to X$ por la fórmula

$$T(y) = \sum_{a \in A} y(a) \cdot a \text{ para } y = (y(a)) \in l_1(A)$$

Como $\sum_{a \in A} |y(a)| < \infty$ para $y \in l_1(A)$ y $\|a\| \leq 1$ para $a \in A$, concluimos que $\|T\| \leq 1$ y, en particular, que T es continuo. Veamos que

$$T(l_1(A)) \supset B$$

Para este fin, supongamos dado $x \in B$. Elegimos un punto $a_0 \in A$ con $\|x - a_0\| < 2^{-1}$. Supongamos que hemos elegido distintos puntos a_0, a_1,..., a_{n-1} en A tales que $\|x - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} a_i\| < 2^{-n}$. Por tanto, el punto $z = 2^n(x - \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} a_i)$ está en B. Como A es denso en B, existe un punto a_n tal que $\|z - a_n\| < 2^{-1}$. Por tanto $\|x - \sum_{i=0}^{n} 2^{-i} a_i\| < 2^{-n-1}$. Así, de forma inductiva construimos una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de A tales que

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} a_i.$$

Esto significa que $x = T(y)$, donde $y \in l_1(A)$ es el punto definido por las condiciones $y(a_i) = 2^{-i}$ para $i = 0, 1, \ldots$, $y(a) = 0$ para $a \in A \setminus \{a_0, a_1, \ldots\}$, que establece lo buscado. Por la homogeneidad del operador T y por lo anterior, obtenemos que $T(l_1(A)) = X$. Por tanto X es isomorfo (en particular, homeomorfo) a $l_1(A)/\ker T$. $\square$

3.1.2. La propiedad de Kadec-Klee en l_2

Lema 3.1.4. *En la esfera unidad de l_2 la convergencia coordenada a coordenada coincide con la convergencia en norma.*

Demostración. Sea $x_n = (x_n(i))$ en la esfera unidad de l_2 para $n = 0, 1, \ldots$. Si $\lim_n x_n(i) = x_0(i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$4 = \lim_n (\|x_n\| + \|x_0\|)^2 \geq \limsup_n \|x_n + x_0\|^2 \geq \liminf_n \|x_n + x_0\|^2$$

Y como, fijado $m \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\|x_n + x_0\|^2 \geq \|P_m(x_n + x_0)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} |x_n(i) + x_0(i)|^2$$

se tiene, por tanto

$$\liminf_n \|x_n + x_0\|^2 \geq \sum_{i=1}^{m} |x_0(i) + x_0(i)|^2 = 4 \sum_{i=1}^{m} |x_0(i)|^2$$

y así

$$\liminf_n \|x_n + x_0\|^2 \geq 4 \sup_n \sum_{i=1}^{n} |x_0(i)|^2 = 4.$$

Luego $\lim_n \|x_n + x_0\|^2 = 4$ y, por la identidad del paralelogramo,

$$\lim_n \|x_n - x_0\| = \lim_n \left(2(\|x_n\|^2 + \|x\|^2) - \|x_n + x_0\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

La implicación contraria es evidente. $\square$

Una consecuencia inmediata del lema es el siguiente corolario, que es, a su vez un corolario del resultado visto anteriormente de que un espacio de Banach con una norma LUR tiene la propiedad de Kadec-Klee. Es más el propio lema es corolario de dicho resultado.

Corolario 3.1.5. *l_2 tiene la propiedad de Kadec-Klee.*

3.1.3. Cubrimientos, particiones de la unidad y paracompacidad

Sea $\mathscr{A}$ una colección de subconjuntos de un espacio topológico X. $\mathscr{A}$ es abierta (cerrada) si cada elemento de $\mathscr{A}$ es abierto (cerrado). $\mathscr{A}$ es localmente finita (discreta) si cada punto de X tiene un entorno que corta como mucho a una cantidad finita de elementos de $\mathscr{A}$ (como mucho un elemento de $\mathscr{A}$). $\mathscr{A}$ es σ-discreta si $\mathscr{A}$ puede representarse como unión de a lo más una cantidad contable de colecciones discretas.

Sea Z un subconjunto de X. Decimos que una colección $\mathscr{A}$ de subconjuntos de X es un cubrimiento de Z si $\cup_{A\in\mathscr{A}} A \supset Z$. La colección $\mathscr{A}$ se llama cubrimiento abierto de Z, cubrimiento cerrado, cubrimiento localmente finito, cubrimiento discreto, cubrimiento σ-discreto respectivamente si $\mathscr{A}$ cubre a Z y la colección $\mathscr{A}$ tiene la correspondiente propiedad.

Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ colecciones de subconjuntos de X (resp. cubrimientos de un conjunto $Z \subset X$). Decimos que $\mathscr{A}$ refina a $\mathscr{B}$ o que $\mathscr{A}$ es un refinamiento de $\mathscr{B}$ si cada elemento de $\mathscr{A}$ está contenido en alguno de $\mathscr{B}$.

El siguiente resultado expresa una de las propiedades más importantes de los espacios métricos.

Teorema 3.1.6. *Todo cubrimiento abierto de un espacio métrico admite un refinamiento que es un cubrimiento abierto localmente finito y σ-discreto.*

Demostración. Sea X un espacio métrico con una métrica d y sea $\mathscr{U} = \{U_s\}_{s\in S}$ un cubrimiento abierto de X. Supongamos que el conjunto de índices S está bien ordenado por una relación $<$. Así, podemos definir inductivamente, para $n = 1, 2, \ldots$ colecciones abiertas $\mathscr{V}_n = \{V_{s,n}\}_{s\in S}$ por

$$V_{s,n} = \cup B(c, 2^{-n})$$

donde la unión se extiende sobre todas las bolas métricas $B(c, 2^{-n})$ cuyos centros satisfacen las siguientes condiciones

(1) s es el primer elemento de S tal que $c \in U_s$

(2) $c \notin V_{t,m}$ para $m < n$ y para $t \in S$

(3) $B(c, 3 \cdot 2^{-n}) \subset U_s$

Se sigue de (3) que $V_{s,n} \subset U_s$. Fijamos $x \in X$ y sea s el primer elemento de S tal que $x \in U_s$ y sea el entero n elegido de forma que $B(x, 3 \cdot 2^{-n}) \subset U_s$. Entonces, o bien $x \in V_{t,m}$ para algún $m < n$ y para algún $t \in S$, o $x \in V_{s,n}$. Por tanto $\mathscr{V} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathscr{V}_n$ es un cubrimiento abierto de X que refina $\mathscr{U}$.

Demostraremos ahora que

$$(4) \qquad \text{si } x_1 \in V_{s_1,n}, \quad x_2 \in V_{s_2,n} \text{ y } s_1 < s_2, \text{ entonces } d(x_1, x_2) > 2^{-n}$$

de donde se sigue que cada colección $\mathscr{V}_n$ es discreta, puesto que cada bola de radio 2^{-n-1} corta, como mucho, a un elemento de $\mathscr{V}_n$. Para demostrar (4) notemos que, por la definición de los conjuntos $V_{s_1,n}$ y $V_{s_2,n}$, existen puntos c_1 y c_2 que cumplen las condiciones (1)-(3) para $s = s_1$ y $s = s_2$ respectivamente y tales que $x_i \in B(c_i, 2^{-n}) \subset V_{s_i,n}$ para $i = 1, 2$. Por tanto, por (3), $B(c_1, 3 \cdot 2^{-n}) \subset U_{s_1}$ y, por (1), $c_2 \notin U_{s_1}$. Así $d(c_1, c_2) > 3 \cdot 2^{-n}$, y

$$d(x_1, x_2) \geq d(c_1, c_2) - d(c_1, x_1) - d(c_2, x_2) > 2^{-n}$$

que claramente es (4).

Para acabar la prueba es suficiente ver:(5) si $B(x, 2^{-k}) \subset V_{t,m}$, entonces $B(x, 2^{-m-k}) \cap V_{s,n} = \emptyset$ para $n \geq m + k$ y para $s \in S$, porque para cada $x \in X$ existe un índice k, un punto $t \in S$ y un $m \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, 2^{-k}) \subset V_{t,m}$ y, por lo tanto la bola $B(x, 2^{-m-k})$ corta, como mucho, a $m+k-1$ elementos de $\mathscr{V}$. (Por (5), $B(x, 2^{-m-k}) \cap V_{s,n} = \emptyset$ para $n \geq m + k$ y $s \in S$, y, por (4), para cada $n \leq m + k - 1$, existe como mucho un $s = s(n)$ tal que $B(x, 2^{-m-k}) \cap V_{s(n),n} \neq \emptyset$.)

Para ver (5) fijamos un conjunto $V_{s,n}$ con $n \geq m + k$. Se sigue de (2) que los puntos c que aparecen en la definición de $V_{s,n}$ no pertenecen a $V_{t,m}$. Así, para cada uno de estos c, $d(x, c) \geq 2^{-k}$ porque $B(x, 2^{-k}) \subset V_{t,m}$. Por lo tanto

$$B(x, 2^{-m-k}) \cap B(c, 2^{-n}) = \emptyset$$

puesto que $m+k \geq k+1$ y $n \geq k+1$. En efecto, si existiera y en la intersección anterior tendríamos: $d(x, c) \leq d(x, y) + d(y, c) < 2^{-m-k} + 2^{-n} \leq 2 \cdot 2^{-k-1} = 2^{-k}$ que es una contradicción. Con esto queda probado (5) y por ende el teorema. $\square$

Un espacio Hausdorff X se dice *paracompacto* si cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito. La clase de los espacios paracompactos contiene la clase de los espacios métricos. En efecto, el teorema 3.1.6 muestra que

Corolario 3.1.7. *Todo espacio métrico es paracompacto.*

El concepto de paracompacidad y los relacionados con él han sido cuidadosamente estudiados en varios libros de topología general (Dugundji, Engelking, Kelley) donde, en particular, varias propiedades de los espacios topológicos equivalentes a la paracompacidad han sido examinadas.

Estamos especialmente interesados en la relación existente entre paracompacidad y existencia de suficientes particiones de la unidad. Estos resultados nos permitirán, en la siguiente sección, la obtención de los teoremas de selectores continuos de multifunciones.

Una familia $\mathscr{B}$ de funciones continuas no negativas en un espacio topológico X se llama una partición localmente finita de la unidad si para cada $x \in X$ existe un entorno $U(x)$ y un subconjunto finito $\mathscr{B}(x)$ de $\mathscr{B}$ tal que:

(i) $\sum_{b\in\mathscr{B}(x)} b(y) = 1$ para $y \in U(x)$.

(ii) $b(y) = 0$ para $y \in U(x)$ y $b \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}(x)$.

Claramente, se tiene que si $\mathscr{B}$ es una partición localmente finita de la unidad, entonces la colección $\mathscr{U}_{\mathscr{B}} = \{b^{-1}((0;1])\}_{b\in\mathscr{B}}$ es un cubrimiento abierto localmente finito de X. Una partición localmente finta de la unidad $\mathscr{B}$ se dice inscrita en un cubrimiento $\mathscr{V}$ de X si existe una función $V \to b_V$ de $\mathscr{V}$ en $\mathscr{B}$ tal que $\overline{b_V^{-1}((0;1])} \subset V$.

El objetivo primordial de esta sección es caracterizar los espacios T_2 y paracompactos. Así, queremos probar

Teorema 3.1.8. *Un espacio topológico Hausdorff X es paracompacto si y solamente si para cada cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ de X existe una partición localmente finita de la unidad inscrita en $\mathscr{U}$.*

Demostración. La suficiencia es trivial. La necesidad es una consecuencia inmediata de la definición de paracompacidad y la proposición 3.1.15 para la que necesitaremos ciertos resultados previos y que mostramos a continuación. □

Empezamos con los siguientes lemas.

Lema 3.1.9. *Sean A y B subconjuntos cerrados y disjuntos de un espacio paracompacto X. Si, para cada $x \in B$, existen conjuntos abiertos U_x y V_x tales que*

$$A \subset U_x,\ x \in V_x,\ U_x \cap V_x = \emptyset$$

entonces existen conjuntos abiertos U y V tales que

$$A \subset U,\ B \subset V,\ U \cap V = \emptyset$$

Demostración. La colección $\mathscr{V} = \{X \setminus B\} \cup \{V_x\}_{x \in B}$ cubre X. Así, por la paracompacidad de X, existe un cubrimiento abierto localmente finito $\mathscr{W}_1$ de X que refina a $\mathscr{V}$. Definamos los conjuntos: $\mathscr{W} = \{W \in \mathscr{W}_1 : W \subset V_x \text{ para algún } x \in B\}$, $V = \bigcup_{W \in \mathscr{W}} W$ y $U = X \setminus \overline{V}$. Claramente U y V son disjuntos, abiertos y $B \subset V$. Además $A \cap \overline{W} = \emptyset$ para $W \in \mathscr{W}$. Así, $A \subset \bigcup_{W \in \mathscr{W}} \overline{W}$. La conclusión deseada se sigue de

Lema 3.1.10. *Si $\mathscr{W}$ es una colección localmente finita, entonces*

$$\bigcup_{W \in \mathscr{W}} \overline{W} = \overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W}} W}.$$

En efecto, este lema nos daría que $\bigcup_{W \in \mathscr{W}} \overline{W} = \overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W}} W} = \overline{V}$, luego $A \subset U$. □

Veamos la prueba del lema.

Demostración. Claramente $\bigcup_{W \in \mathscr{W}} \overline{W} \subset \overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W}} W}$. Para verificar la inclusión inversa observemos que, por ser $\mathscr{W}$ localmente finito, para cada $x \in \overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W}} W}$ existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$, y una colección $\mathscr{W}(x) = \{W \in \mathscr{W} : W \cap U \neq \emptyset\}$ finita. En consecuencia se tiene que, $x \notin \overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W} \setminus \mathscr{W}(x)} W}$. Como

$$x \in \overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W}} W} = \left(\overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W}(x)} W}\right) \cup \left(\overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W} \setminus \mathscr{W}(x)} W}\right)$$

deducimos que

$$x \in \overline{\bigcup_{W \in \mathscr{W}(x)} W} = \bigcup_{W \in \mathscr{W}(x)} \overline{W} \subset \bigcup_{W \in \mathscr{W}} \overline{W}.$$

con lo que acabamos la prueba. □

Definición 3.1.11. *Un espacio topológico X es regular, si para cada conjunto cerrado $A \subset X$ y para cada $x \in X \setminus A$, existen $U, V \subset X$ conjuntos abiertos y disjuntos tales que $x \in U$ y $A \subset V$.*

Definición 3.1.12. *Un espacio topológico X es normal, si todo par de cerrados disjuntos de X admiten entornos disjuntos.*

Proposición 3.1.13. *Todo espacio paracompacto es normal.*

Demostración. Como X es Hausdorff podemos aplicar el lema 3.1.9 a cualquier conjunto A unipuntual, con lo que tenemos que todo espacio paracompacto es regular. Ahora bien, en estas condiciones podemos aplicar el lema en toda su generalidad y acabar concluyendo que, en efecto, todo espacio paracompacto es normal. □

Lema 3.1.14. *Para cada cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ de un espacio paracompacto X existe un cubrimiento abierto localmente finito $\mathscr{W}$ de X tal que $\{\overline{W}\}_{W \in \mathscr{W}}$ refina a $\mathscr{U}$ y un cubrimiento abierto $\{V_U\}_{U \in \mathscr{U}}$ de X tal que $\overline{V}_U \subset U$ para todo $U \in \mathscr{U}$.*

Demostración. Por la proposición 3.1.13, X es normal. Por lo tanto para todo $U \in \mathscr{U}$ y todo $x \in U$ existe un abierto $G_{x,U}$ tal que $x \in G_{x,U} \subset \overline{G_{x,U}} \subset U$. Sea $\mathscr{W}$ cualquier cubrimiento abierto localmente finito de X que refine al cubrimiento $\mathscr{G} = \{G_{x,U}\}_{x\in U; U\in\mathscr{U}}$. Entonces, claramente $\{\overline{W}\}_{W\in\mathscr{W}}$ refina $\mathscr{U}$. Definamos ahora

$$V_U = \bigcup_{\overline{W}\subset U} W \quad \text{para } U \in \mathscr{U}.$$

Si no existe, dado U, ningún W tal que $\overline{W} \subset U$ definimos $V_U = \emptyset$. Claramente, para cada $y \in X$ existe un $W \in \mathscr{W}$ tal que $y \in W$. Como $\mathscr{W}$ refina $\mathscr{G}$, existe $U \in \mathscr{U}$ y $x \in U$ tal que $W \subset G_{x,U}$. Entonces $y \in V_U$. Por lo tanto $\{V_U\}_{U\in\mathscr{U}}$ cubre X. Se sigue del lema 3.1.10 que $\overline{V_U} \subset U$ para todo $U \in \mathscr{U}$. □

Proposición 3.1.15 (Stone). *Para cada cubrimiento abierto $\mathscr{U}$ de un espacio paracompacto X existe una partición localmente finita de la unidad inscrita en $\mathscr{U}$.*

Demostración. Gracias al lema 3.1.14 construimos, en primer lugar, un cubrimiento abierto localmente finito $\mathscr{W}$ de X tal que $\{\overline{W}\}_{W\in\mathscr{W}}$ refine a $\mathscr{U}$, y ahora un cubrimiento abierto $\{V_W\}_{W\in\mathscr{W}}$ tal que $\overline{V_W} \subset W$ para cada $W \in \mathscr{W}$. Por la proposición 3.1.13, X es normal. Por lo tanto, aplicando el lema de Urysohn existe, para cada $W \in \mathscr{W}$, una aplicación $g_W : X \to [0;1]$ continua tal que $g_W^{-1}(1) \supset V_W$ y $g_W^{-1}((0;1]) \subset W$. Sea $j : \mathscr{W} \to \mathscr{U}$ una función refinamiento tal que $j(W) \supset \overline{W}$ para $W \in \mathscr{W}$. Definimos

$$\begin{aligned} b_U &:= \left(\sum_{j(W)=U} g_W\right)\left(\sum_{W\in\mathscr{W}} g_W\right)^{-1} \qquad \text{para } j^{-1}(U) \neq \emptyset \\ b_U &:= 0 \quad \text{para } j^{-1}(U) = \emptyset \end{aligned}$$

Como $\{V_W\}_{W\in\mathscr{W}}$ cubre X, existe, para cada $x \in X$, un conjunto $W \in \mathscr{W}$ tal que $x \in V_W$, por tanto $g_W(x) = 1$. Así, $\sum_{W\in\mathscr{W}} g_W(x) \geq 1$. Como $\mathscr{W}$ es un cubrimiento localmente finito, para cada $x \in X$, existe un conjunto abierto $O(x)$ tal que $x \in O(x)$ y las siguientes colecciones son finitas

$$\begin{aligned} \mathscr{W}(x) &:= \{W \in \mathscr{W} : W \cap O(x) \neq \emptyset\} \\ \mathscr{W}(U,x) &:= \{W \in \mathscr{W}(x) : j(W) = U\} \quad (U \in \mathscr{U}, x \in X) \end{aligned}$$

Así, para cada $y \in O(x)$ tenemos que $g_W(y) = 0$ para $W \notin \mathscr{W}(x)$ y

$$\sum_{W\in\mathscr{W}} g_W(y) = \sum_{W\in\mathscr{W}(x)} g_W(y).$$

Por lo tanto la función $\sum_{W\in\mathscr{W}} g_W$ es continua, pues es localmente igual a una suma finita de funciones continuas. También los numeradores de las funciones b_U son localmente iguales a sumas finitas de funciones continuas. Así las b_U's son funciones continuas no negativas en X. Es claro que, para cada $y \in O(x)$, tenemos $b_U(y) = 0$ para todo $U \in \mathscr{U} \setminus j(\mathscr{W}(x))$, y

$$\sum_{U \in \mathscr{U}} b_U(y) = \sum_{U \in j(\mathscr{W}(x))} b_U(y) = \left(\sum_{U \in j(\mathscr{W}(x))} \sum_{W \in \mathscr{W}(U,x)} g_W(y) \right) \left(\sum_{W \in \mathscr{W}(x)} g_W(y) \right)^{-1}$$

que es igual a 1. Así, $\{b_U\}_{U \in \mathscr{U}}$ es una partición localmente finita de la unidad. Finalmente, para todo $U \in \mathscr{U}$, tenemos

$$\{x \in X : B_U(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{\overline{W} \subset U} W.$$

Por lo tanto, por el lema 3.1.10 $\overline{\{x \in X : B_U(x) \neq 0\}} \subset U$. Así, $\{b_U\}_{U \in \mathscr{U}}$ está inscrita en $\mathscr{U}$. □

3.2. Teorema de Bartle-Graves.

Sean X e Y dos espacios topológicos. Denotamos por 2^Y a la colección de todos los subconjuntos no vacíos de Y. Una multifunción de X en Y es una función $\phi : X \to 2^Y$. Si $\phi(x)$ es un subconjunto cerrado (compacto) de Y para cada $x \in X$, entonces de ϕ se dice que es cerrada (compacta). Si Y es un espacio métrico y $\phi(x)$ es un subconjunto completo de Y para cada $x \in X$, entonces diremos que ϕ es completa. Si Y es un espacio vectorial y $\phi(x)$ es convexo para cada $x \in X$, entonces decimos que ϕ es convexa. Si, para cualquier abierto $U \subset Y$, el conjunto

$$\phi^{-1}(U) = \{x \in X : \phi(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

es abierto, entonces decimos que ϕ es inferiormente semicontinua.

Una función $f : X \to Y$ es una selección de la multifunción $\phi : X \to 2^Y$ si $f(x) \in \phi(x)$ para cada $x \in X$.

Teorema 3.2.1 (Michael). *Sea X un espacio topológico paracompacto y sea E un espacio métrico localmente convexo. Sea $\phi : X \to 2^E$ una multifunción completa, convexa e inferiormente semicontinua. Entonces ϕ admite una selección continua f.*

Empezamos con el siguiente lema que utilizaremos en la prueba inductiva del teorema.

Lema 3.2.2. *Sean X y E como antes. Sea $\phi : X \to 2^E$ una multifunción convexa e inferiormente semicontinua. Entonces para cualquier entorno del origen, V, abierto y convexo en E existe una función continua $f_{\phi,V} : X \to E$ tal que, para cada $x \in X$*

$$\psi(x) = (f_{\phi,V}(x) + V) \cap \phi(x)$$

es no vacío y $\psi : X \to 2^Y$ es una multifunción convexa e inferiormente semicontinua.

Demostración. Como ϕ es inferiormente semicontinua y $\{V+e\}_{e\in E}$ es un cubrimiento abierto de E, la colección $\mathscr{W}=\{\phi^{-1}(V+e)\}_{e\in E}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es paracompacto, existe una partición localmente finita de la unidad para X, digamos $\{b_s\}_{s\in S}$, que está inscrita en $\mathscr{W}$. Por tanto para cada $s\in S$ existe un e_s en E tal que $b_s(x)=0$ para $x\notin\phi^{-1}(V+e_s)$. Definimos

$$f_{\phi,V}(x):=\sum_{s\in S} b_s(x)e_s$$

Como $\{b_s\}$ es partición localmente finita de la unidad, $f_{\phi,V}$ es continua y, para todo $x\in X$, el conjunto $S_x=\{s\in S: b_s(x)\neq 0\}$ es finito. Para cada $s\in S_x$ existe un $e_s^{'}\in\phi(x)$ tal que $e_s^{'}-e_s\in V$ puesto que $x\in\phi^{-1}(V+e_s)$. Obviamente $\sum_{s\in S_x} b_s(x)=1$ y $f_{\phi,V}(x)=\sum_{s\in S_x} b_s(x)e_s$. Por tanto, por la convexidad de $\phi(x)$ y V, se sigue que

$$\sum_{s\in S_x} b_s(x)e_s^{'}\in\phi(x) \quad \text{y} \quad \sum_{s\in S_x} b_s(x)e_s^{'}-f_{\phi,V}(x)\in V$$

que es equivalente a la primera afirmación del lema. Por tanto ψ es una multifunción bien definida. La convexidad de ψ es una clara consecuencia de la convexidad de V y ϕ. Para establecer que ψ es inferiormente semicontinua fijamos un subconjunto abierto U de E. Tenemos

$$\psi^{-1}(U)=\{x\in X:\phi(x)\cap U\cap(f_{\phi,V}(x)+V)\neq\emptyset\}=\phi^{-1}(U)\cap f_{\phi,V}^{-1}(U-V).$$

Por la inferior semicontinuidad de ϕ y la continuidad de f, se sigue que $\psi^{-1}(U)$ es abierto, pues la diferencia algebraica $U-V$ de abiertos en un espacio vectorial topológico es abierto. $\square$

Demostración del teorema 3.2.1. Sea $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de entornos abiertos convexos y simétricos del origen tales que $V_n\supset\overline{V_{n+1}}$ para $n=1,2,\ldots$. Usando el lema anterior definimos inductivamente una sucesión de multifunciones convexas e inferiormente semicontinuas $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X en 2^E y una sucesión de funciones continuas $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X en E tales que $\phi_0=\phi$; $f_n=f_{\phi_{n-1},V_n}$;

$$\phi_n(x)=(f_n(x)+V_n)\cap\phi_{n-1}(x) \quad \text{para } x\in X \quad (n=1,2,\ldots).$$

Ahora, elegimos $e_m(x)$ en $\phi_m(x)$ tal que $e_m(x)-f_m(x)\in V_m$ para $x\in X$ y para $m=1,2,\ldots$ Como $\phi_n(x)\supset\phi_{n+1}(x)$ y $e-f_n(x)\in V_n$ para $e\in\phi_{n+1}(x)$, deducimos que

$$f_m(x)-f_n(x)=f_m(x)-e_m(x)+e_m(x)-f_n(x)\in V_m+V_n\subset 2V_n$$

para $m>n$ y $x\in X$. Así, $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ y, por tanto, $\{e_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ son sucesiones de Cauchy. Como $e_m(x)\in\phi_m(x)\subset\phi(x)$ para $x\in X$ y para todo m, se sigue de la completitud de $\phi(x)$ que existen los límites

$$\lim_m e_m(x)=\lim_m f_m(x)=f(x)$$

y $f(x)\in\phi(x)$ para $x\in X$. Como $V_n\supset\overline{V_{n+1}}$ y $f_m(x)-f_n(x)\in V_n+V_m$ para $m>n$ y $x\in X$, deducimos que $f_n(x)-f(x)\in 2V_n$ para $x\in X$ y para todo n. Por tanto la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas converge uniformemente a f en X. Así, f es la selección continua de ϕ que buscábamos. $\square$

Definición 3.2.3. *Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial topológico localmente convexo metrizable y completo.*

Corolario 3.2.4 (Bartle and Graves). *Sea $u : E \longrightarrow X$ un operador suprayectivo, continuo y lineal entre espacios de Fréchet. Entonces existe una función continua $f : X \to E$ tal que $uf = id_X$ y $f(0) = 0$. Así, existe un homeomorfismo $h : E \to \ker u \times X$ definido por*

$$h(e) = (e - fu(e), u(e)) \quad \textit{para } e \in E$$

tal que

$$p_2 h = u; h(e) = (e, 0) \quad \textit{para } e \in \ker u$$

donde $p_2 : \ker u \times X \to X$ es la proyección natural.

Demostración. Consideremos la multifunción $\phi : X \to 2^E$ definida por $\phi(x) = u^{-1}(x)$ para cada $x \in X$. Claramente ϕ es convexa y completa. Obviamente $\phi^{-1}(U) = u(U)$ para cualquier subconjunto U de E. Se sigue del teorema de la aplicación abierta que u es abierta y, por tanto $u(U)$ es abierto cualquiera que sea U subconjunto abierto de E. Por tanto ϕ es inferiormente semicontinua. Observemos, ahora, que el espacio X es paracompacto por ser metrizable. Por lo tanto existe una elección continua de ϕ, $f_1 : X \to E$. Claramente $uf_1 = id_X$. Finalmente definimos $f = f_1 - f_1(0)$. Entonces $f(0) = 0$ y $uf = uf_1 - uf_1(0) = uf_1 = id_X$, puesto que $f_1(0) \in u^{-1}(0)$. Veamos que, en efecto, h verifica las propiedades deseadas:

- h está bien definida:

  $u(e - fu(e)) = u(e) - uf(u(e)) = u(e) - u(e) = 0$. Luego, en efecto $e - fu(e) \in \ker u$ y, así, h está bien definida.

- h es inyectiva:

  Sean e_1 y e_2 tales que $h(e_1) = h(e_2)$ entonces $e_1 - fu(e_1) = e_2 - fu(e_2)$ y $u(e_1) = u(e_2)$. Por tanto $fu(e_1) = fu(e_2)$ y, así $e_1 = e_2$ y h es inyectiva.

- h es suprayectiva:

  Dado $(a, x) \in \ker u \times X$ consideramos el elemento $a + f(x) \in E$. Entonces se verifica que $h(a + f(x)) = \Big(a + f(x) - f\big(u(a + f(x))\big), u(a + f(x))\Big) = (a + f(x) - f(x), x) = (a, x)$. Luego, en efecto, h es suprayectiva. Es más $h^{-1}(a, x) = a + f(x)$.

- h es bicontinua.

  Por cómo ambas funciones, h y h^{-1} están definidas se tiene de forma directa que son continuas.

Así pues, h es un homeomorfismo. El resto de condiciones deseadas son evidentes. $\square$

Corolario 3.2.5. *Sea E_0 un subespacio cerrado de un espacio de Fréchet E. Sea $u : E \to E/E_0$ la aplicación cociente. Entonces existe un homeomorfismo $h : E \to E_0 \times E/E_0$ tal que*

$$p_2 h = u; \quad h(e) = (e_0, 0) \quad \textit{para}\, e_0 \in \ker u = E_0$$

donde $p_2 : \ker u \times X \to X$ es la proyección natural.

Corolario 3.2.6. *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional. Entonces existe un subespacio cerrado Z de $l_1(A)$ con $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Dens}(X)$ tal que $l_1(A)$ es homeomorfo a $Z \times X$.*

Demostración. En la prueba del teorema 3.1.3 se establece la existencia de un conjunto A con $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Dens}(X)$ y una aplicación lineal continua y suprayectiva $T : l_1(A) \to X$. Si denotamos su núcleo por Z, se tiene $X \backsimeq l_1(A)/Z$ y, aplicando el corolario anterior con $E = l_1(A)$ y $E_0 = Z$ se tiene el resultado buscado, pues

$$l_1(A) \backsimeq Z \times l_1(A)/Z \backsimeq Z \times X. \qquad \square$$

En nuestra terminología posterior diremos que todo espacio de Banach X es factor de un $l_1(A)$.

3.3. Renormamiento de Kadec.

Nuestro objetivo en esta sección es construir normas en los espacios de Banach separables siguiendo el espíritu del apartado 1.3. Esto es buscar normas equivalentes que tengas buenas propiedades.

Vamos a utilizar varios conceptos relacionados con el renormamiento en espacios de Banach, así pues, al lector no familiarizado con ellos, si no ha leído el primer capítulo, le instamos a que lo haga ahora.

Vamos a empezar viendo propiedades de las normas Kadec (def. 1.3.6).

Teorema 3.3.1 (Teorema de renormamiento Kadec). *Todo espacio de Banach separable X admite una norma Kadec respecto de un subconjunto total y numerable de X^*. La nueva norma es equivalente a la norma original $|\cdot|$ de X.*

Demostración. Denotemos por B^* a la bola unidad del dual de X. Como X es separable, B^* es compacto y metrizable (ver prop.1.1.17) en la topología ω^*. De la prueba de dicha proposición sabemos que la métrica en B^* se puede expresar como

$$d^*(x^*, y^*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x^*(z_n) - y^*(z_n)|$$

donde $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto numerable denso arbitrario de B_X. Como el espacio métrico (B^*, d^*) es separable, existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de B^* de forma que el conjunto $\{x_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ es denso en (B^*, d^*). Es claro que la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ separa puntos de X.

Para cada $x \in X$ definimos

$$w_0(x) = |x| = \sup_i |x_i^*(x)| \tag{3.1}$$

y para $k = 1, 2, \ldots$

$$w_k(x) = \sup\left\{|x^*(x) - y^*(x)| : x^*, y^* \in B^*, d^*(x^*, y^*) \le k^{-1}\right\} \tag{3.2}$$

Y, finalmente

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} w_k(x). \tag{3.3}$$

Claramente $|x| \le \|x\| \le 3|x|$ y, por tanto, las normas son equivalentes.

Como la sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es densa en (B^*, d^*), tenemos

$$w_k(x) = \sup_{d^*(x_i^*, x_j^*) \le k^{-1}} |x_i^*(x) - x_j^*(x)| \tag{3.4}$$

Se sigue de (3.1) y de (3.4) que para toda sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ de elementos de X tenemos que

$$\text{si } \lim_n x_i^*(x_n) = x_i^*(x_0) \quad \text{para } i \in \mathbb{N}, \text{ entonces } \quad \liminf_n w_k(x_n) \ge w_k(x_0) \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

En efecto, fijado $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|x_i^*(x_0)| = \lim_n |x_i^*(x_n)| \le \liminf_n \sup_i |x_i^*(x_n)| = \liminf_n w_0(x_n)$$

y tomando el supremo sobre $i \in \mathbb{N}$ obtenemos (3.5) para $k = 0$. Para k no nulo y fijo, y para cada i y j naturales fijados de forma que $d^*(x_i^*, x_j^*) \le k^{-1}$ se tiene

$$|x_i^*(x_0) - x_j^*(x_0)| = \lim_n |x_i^*(x_n) - x_j^*(x_n)| \le \liminf_n \sup_{d^*(x_i^*, x_j^*) \le k^{-1}} |x_i^*(x_n) - x_j^*(x_n)| = \liminf_n w_k(x_n)$$

donde, de nuevo, tomando el supremo sobre tales i y j obtenemos (3.5). Dicha ecuación es precisamente la condición (K_1) de la definición 1.3.6. Debemos pues probar la condición (K_2) de tal definición. Si

$$\lim_n x_i^*(x_n) = x_i^*(x_0) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots \quad \text{y} \quad \lim_n \|x_n\| = \|x_0\|, \tag{3.6}$$

entonces, a partir de (3.5), se sigue que

$$\lim_n w_k(x_n) = w_k(x_0). \tag{3.7}$$

En efecto, si suponemos que (3.7) no es cierta para un cierto k fijo, $\liminf_n w_k(x_n) - w_k(x_0) = \alpha > 0$ gracias a (3.5). Entonces, para todo $m \ge k$ tenemos

$$\alpha + \sum_{i=0}^{m} 2^{-i} w_i(x_0) \le \liminf_n \sum_{i=0}^{m} 2^{-i} w_i(x_n) \le \lim_n \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} w_i(x_n) = \lim_n \|x_n\| = \|x_0\|$$

y tomando supremos sobre m, tenemos

$$\alpha + \|x_0\| \leq \|x_0\|$$

de donde α debería ser negativo o nulo que es una contradicción. Luego (3.7) se satisface.

Ahora, a partir de (3.1),(3.2), (3.6) y (3.7) se sigue que la sucesión

$$\{f_{x_n}\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{donde} \quad f_{x_n}(x^*) = x^*(x_n) \quad \text{para} \quad x^* \in B^* \ \text{ y } \ n = 0, 1, \ldots,$$

está formada por funciones acotadas y equicontinuas sobre (B^*, d^*), que convergen en el denso $\{x_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ a f_{x_0}. Así, el teorema clásico de Arzela implica que la sucesión $\{f_{x_n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f_{x_0} sobre B^*. Equivalentemente x_n converge a x_0 en $|\cdot|$ y, por ser ambas normas equivalentes x_n converge a x en $\|\cdot\|$.

Veamos que, en efecto, tal sucesión es equicontinua. Tengamos en cuenta que, para cada $x \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe un cierto $k(x, \varepsilon)$ tal que $w_{k(x,\varepsilon)}(x) < \varepsilon$. Entonces, fijado $\varepsilon > 0$ tomamos $k_1 = k(x_0, \varepsilon/2)$ y n_0 de forma que, por (3.7), $w_{k_1}(x_n) < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Tomamos entonces el siguiente $k_0 = \max\big\{k_1, \{k(x_i, \varepsilon)\}_{i=1}^{n_0-1}\big\}$, entonces $w_{k_0}(x_n) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ puesto que las funciones $w_k(x)$ son decrecientes para cada x fijo. Tomando $\delta = k_0^{-1}$ la condición de equicontinuidad se satisface. □

Observación 3.3.2. *En realidad lo que hemos probado es que si A es un subconjunto de B^* numerable y ω^*-denso, entonces existe en X una norma equivalente que es Kadec respecto de A.*

En el capítulo anterior se prueba que todo espacio separable admite una norma equivalente LUR. Veamos una extensión de ese resultado.

Teorema 3.3.3. *Todo espacio de Banach separable admite una norma equivalente LUR y Kadec.*

El teorema es consecuencia evidente del teorema 3.3.1 y del hecho siguiente.

Proposición 3.3.4. *Sea X un espacio vectorial normado. Sea $\|\cdot\|$ una norma de Kadec respecto de un conjunto total numerable $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$. Sea*

$$|||x|||^2 := \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i |f_i(x)|^2 \ \textit{para } x \in X \tag{3.8}$$

donde los $a_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ son elegidos de forma que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i |f_i(x)|^2 \leq \|x\|^2$$

Nota: a tales efectos, podemos tomar $a_i = 2^{-i} \|f_i\|^{-2}$.
Entonces las normas $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes, y $|||\cdot|||$ es LUR y de Kadec respeto a $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Demostración. Obviamente $\|x\| \leq |||x||| \leq \sqrt{2}\,\|x\|$ para $x \in X$. Por tanto las normas son equivalentes. Es claro que $|||\cdot|||$ es una norma de Kadec respecto al conjunto $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ puesto que $\|\cdot\|$ tiene la misma propiedad. En efecto, supongamos dada una sucesión de elementos $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X tales que $\lim_n f_i(x_n) = f_i(x_0)$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Y que, además, $\lim_n |||x_n||| = |||x_0|||$. Es claro que $\lim_n \|x_n\| = \|x_0\|$ y, por tanto que $\lim_n \|x_n - x_0\| = 0$ pero como las normas son equivalentes se tiene $\lim_n |||x_n - x_0||| = 0$.

Sólo hemos de probar que la norma $|||\cdot|||$ es LUR. Sea $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en X tal que

$$\lim_n |||x_n||| = |||x_0||| = 1;\ \lim_n |||x_n + x_0||| = 2. \tag{3.9}$$

Se sigue de la definición y de la igualdad del paralelogramo en $\mathbb{R}$ que para $n = 1, 2, \ldots$ tenemos

$$\begin{aligned}
&2(|||x_n|||^2 + |||x_0|||^2) - |||x_n + x_0|||^2 \\
&\quad = 2(\|x_n\|^2 + \|x_0\|^2) - \|x_n + x_0\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i\big(2|f_i(x_n)|^2 + 2|f_i(x_0)|^2 - |f_i(x_n + x_0)|^2\big) \\
&\quad = 2(\|x_n\|^2 + \|x_0\|^2) - \|x_n + x_0\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i |f_i(x_n - x_0)|^2 \\
&\quad \geq \sum_{i=1}^{\infty} a_i |f_i(x_n - x_0)|^2
\end{aligned}$$

ya que, por la desigualdad triangular, $\|x_n + x_0\|^2 \leq 2(\|x_n\|^2 + \|x_0\|^2)$. Así pues, tenemos

$$0 \geq \limsup_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i |f_i(x_n - x_0)|^2 \geq \liminf_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i |f_i(x_n - x_0)|^2 \geq 0$$

Por tanto $\lim_n \sum_{i=1}^{\infty} a_i |f_i(x_n - x_0)|^2 = 0$. Equivalentemente

$$\lim_n f_i(x_n) = f_i(x_0) \text{ para } i = 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

Así, por (3.8) y (3.9), $\lim_n \|x_n\| = \|x_0\|$. Por lo tanto, por (K_2), obtenemos $\lim_n \|x_n - x_0\| = 0$. Como las normas $|||\cdot|||$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes, concluimos que $\lim_n |||x_n - x_0||| = 0$. □

Ahora vamos a probar el teorema de renormamiento de Kadec para espacios de Banach con bases. Éste es un resultado esencial en la prueba original de Kadec del homeomorfismo de todos los espacios de Banach infinito dimensionales separables. Recordemos que una sucesión $\{e_k\}_k$ de elementos de un espacio de Banach X es una base para X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{f_k(x)\}_k$ tal que

$$x = \lim_n \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k.$$

Vimos en el primer capítulo que los funcionales f_k son lineales y continuos. Usaremos, como viene siendo habitual, la notación

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)e_k; \qquad P_n(x) = x - R_n(x) \ \ (n = 0, 1, \dots)$$

Teorema 3.3.5 (Kadec). *Sea X un espacio de Banach con una base $\{e_k\}_k$. Entonces existe una norma $\|\cdot\|$ en X equivalente a la norma original del espacio y que satisface las condiciones siguientes*

(B_1) Si $|c_1| > |c_2|$ y $c_1 \cdot c_2 \geq 0$, entonces, para reales cualesquiera $a_1, \dots, a_{n-1}$ y para $n = 2, 3, \dots$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + c_1 e_n\right\| > \left\|\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + c_2 e_n\right\|;$$

(B_2) Si $\lim_n \|x_n\| = \|x_0\|$ y $\lim_n f_k(x_n) = f_k(x_0)$ para $k = 1, 2, \dots,$ entonces

$$\lim_n \|x_n - x_0\| = 0;$$

(B_3) La norma $\|\cdot\|$ es LUR.

Demostración. En primer lugar observemos que (B_1) es equivalente a la siguiente condición

(B_1') $\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\| > \left\|\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k\right\|$ para reales cualesquiera $a_1, \dots, a_n$ y $a_n \neq 0$; $n = 2, 3, \dots$

En efecto, si ponemos en (B_1) $c_1 = a_n$, $c_2 = 0$, tenemos (B_1'). Por otro lado, si suponemos (B_1') y ponemos $x = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k$. Tendríamos

$$\|x + c_1 e_n\| = \frac{c_2}{c_1}\|x + c_1 e_n\| + \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)\|x + c_1 e_n\| > \left\|\frac{c_2}{c_1}x + c_2 e_n\right\| + \left\|\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right)x\right\| \geq \|x + c_2 e_n\|$$

que es exactamente (B_1). Sea $|\cdot|_0$ la norma original del espacio X. Construiremos primero una norma $|\cdot|$ equivalente a $|\cdot|_0$ y que satisface las siguientes condiciones

(B_1'') $|\sum_{k=1}^{n} t_k e_k| \leq |\sum_{k=1}^{n+1} t_k e_k|$ para escalares arbitrarios $t_1, t_2, \dots, t_{n+1}$ y, para $n = 1, 2, \dots$.

(B_2') la norma $|\cdot|$ es de Kadec respecto de los funcionales $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Habiendo hecho esto podemos definir la norma $\|\cdot\|$ por

$$\|x\|^2 = |x|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k |f_k(x)|^2 \tag{3.11}$$

donde $a_k > 0$ para $k = 1, 2, \dots$ se eligen de forma que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k |f_k(x)|^2 \leq |x|^2 \quad \text{para } x \in X.$$

Se sigue inmediatamente de (B_1'') y de la definición (3.11) que la norma $\|\cdot\|$ satisface (B_1'). En efecto, dados escalares $b_1, \ldots, b_n$ con $b_n \neq 0$ se tiene

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1} b_k e_k\right\|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n-1} b_k e_k\right|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_j^2.$$

Luego

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right\|^2 &= \left|\sum_{k=1}^{n} b_k e_k\right|^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j b_j^2 \geq \left|\sum_{k=1}^{n-1} b_k e_k\right|^2 + \sum_{j=1}^{n-1} a_j b_j^2 + a_n b_n^2 \\ &= \left\|\sum_{k=1}^{n-1} b_k e_k\right\| + a_n b_n^2 > \left\|\sum_{k=1}^{n-1} b_k e_k\right\|.\end{aligned}$$

Por la proposición 3.3.4 la norma $\|\cdot\|$ (equivalente a $|\cdot|$) es LUR, y es de Kadec respecto a los funcionales $\{f_k : k \in \mathbb{N}\}$. Por tanto satisface (B_2) y (B_3).

La norma $|\cdot|$ se define en dos pasos. Definimos

$$|x|_1 = \sup_{0\leq p<q<\infty}\left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)e_k\right|_0, \ |x| = \sum_{p=0}^{\infty} 2^p \big|R_p(x)\big|_1 \tag{3.12}$$

observamos que

$$|x|_0 \leq |x|_1 \leq |x| \leq 4C|x|_0 \tag{3.13}$$

para $x \in X$, donde $C = \sup_q \sup_{|x|_0\leq 1} |P_q(x)|_0 = \sup_q \|P_q\|$.

En efecto, como $\lim_q P_q(x) = x$ para todo x en X y $P_q(\cdot)$ es un operador lineal acotado finito dimensional, el principio de acotación uniforme de Banach-Steinhaus implica que $C < +\infty$. Claramente $|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)e_k|_0 = |P_q(x) - P_p(x)|_0 \leq 2C|x|_0$. Así, $|x|_1 \leq 2C|x|_0$ para todo x en X. Como $|R_p(x)|_1 \leq |x|_1$ para $x \in X$ y para $p = 0, 1, \ldots$, tenemos

$$|x| \leq 2\sup_p |R_p(x)|_1 \leq 2|x|_1 \leq 4C|x|_0 \quad \text{para } x \in X.$$

El resto de las desigualdades de (3.13) son triviales.

Claramente (3.13) implica que las normas $|\cdot|_0$, $|\cdot|_1$ y $|\cdot|$ son equivalentes. Se sigue de (3.12) que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\right|_1 \leq \left|\sum_{k=1}^{n+1} t_k e_k\right|_1 \quad \text{y} \quad \left|R_p\Big(\sum_{k=1}^{n} t_k e_k\Big)\right|_1 \leq \left|R_p\Big(\sum_{k=1}^{n+1} t_k e_k\Big)\right|_1$$

para $p = 0, 1, \ldots$ y para escalares arbitrarios $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Esto implica que la $|\cdot|$ satisface (B_1''). Para establecer (B_2') fijamos una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ en X tal que

$$\lim_n f_k(x_n) = f_k(x_0) \text{ para } k = 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

Entonces

$$\lim_n \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x_n)e_k = \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x_0)e_k \text{ para } 0 \leq p < q < +\infty. \tag{3.15}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} |x_0|_1 &= \sup_{0\leq p<q<\infty} \lim_n \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x_n)e_k \right|_0 \leq \liminf_n \left(\sup_{0\leq p<q<\infty} \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x_n)e_k \right|_0 \right) && (3.16) \\ &= \liminf_n |x_n|_1. && (3.17) \end{aligned}$$

Claramente (3.14) implica que

$$\lim_n f_k(R_p(x_n)) = f_k(R_p(x_0)) \quad \text{para } k = 1, 2, \ldots \text{ y } p = 0, 1, \ldots$$

Así, reemplazando en (3.16) x_n por $R_p(x_n)$ para $n = 0, 1, \ldots,$ tenemos

$$|R_p(x_0)|_1 \leq \liminf_n |R_p(x_n)|_1 \text{ para } p = 0, 1, \ldots \tag{3.18}$$

Por tanto

$$|x_0| \leq \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \liminf_n |R_p(x_n)|_1 \leq \liminf_n \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} |R_p(x_n)|_1 = \liminf_n |x_n|.$$

Esto muestra que la norma $|\cdot|$ satisface la condición (K_1) de la definición de norma de Kadec. Si suponemos ahora que $\lim_n |x_n| = |x_0|$. Entonces se sigue de (3.12) y (3.18) que

$$\lim_n |R_p(x_n)|_1 = |R_p(x_0)|_1 \text{ para } p = 0, 1, \ldots \tag{3.19}$$

Obviamente $\lim_p |R_p(x)|_1 = 0$ para $x \in X$ puesto que las normas $|\cdot|_0$ y $|\cdot|_1$ son equivalentes y $\lim_p |R_p(x)|_0 = 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos p_0 tal que $|R_{p_0}(x_0)|_1 < \varepsilon$. Entonces, por (3.15) y por (3.19), existe un n_0 tal que para $n > n_0$

$$|S_{p_0}(x_n) - S_{p_0}(x_0)|_1 < \varepsilon \quad \text{y} \quad |R_{p_0}(x_n)|_1 < \varepsilon$$

Así, tenemos

$$|x_0 - x_n|_1 \leq |S_{p_0}(x_0) - S_{p_0}(x_n)|_1 + |R_{p_0}(x_0)|_1 + |R_p(x_n)|_1 \leq 3\varepsilon.$$

Por tanto $\lim_n |x_0 - x_n|_1 = 0$, y por la equivalencia entre las normas $|\cdot|_1$ y $|\cdot|$, $\lim_n |x_0 - x_n| = 0$. Esto muestra que la norma $|\cdot|$ satisface la condición (K_2) de la definición de norma de Kadec, y completa la prueba del teorema. $\square$

3.4. Modulo de Convexidad Local Uniforme

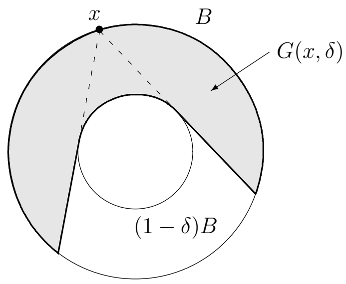
Sea X un espacio normado. Sean, como viene siendo habitual, S y B la esfera unidad y la bola unidad de X respectivamente, es decir

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\}; \quad B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

Definimos para cada $x \in S$ y $0 \leq \delta \leq 1$

$$G(x; \delta) = \{z \in B : \|\lambda x + (1 - \lambda)z\| \geq 1 - \delta \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

es decir, el conjunto de puntos de B que cumplen que el segmento que los une con x está completamente en la corona $B \setminus (1 - \delta)B$.



Sea

$$\varepsilon(x, \delta) = 2^{-1} \sup\{\|x - z\| : z \in G(x, \delta)\},$$

que viene a ser la mitad de la distancia máxima de x a los puntos de la corona $B \setminus (1 - \delta)B$ que están a su lado. Por conveniencia ponemos

$$\varepsilon(x, \delta) = 1 \quad \text{para } x \in S \text{ y para } \delta > 1.$$

La función $\varepsilon(\cdot; \cdot)$ se llama el *módulo de convexidad local uniforme.*

Lema 3.4.1. *La función $\varepsilon(\cdot; \cdot)$ tiene las siguientes propiedades de continuidad*

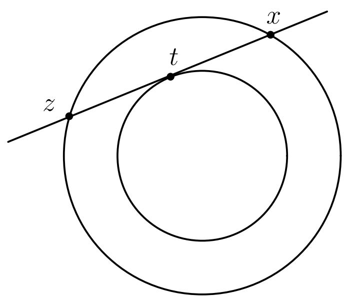
(0_1) $\delta \leq \varepsilon(x; \delta) \leq 1$ $(x \in S; 1 \geq \delta \geq 0)$,

(0_2) $\varepsilon(x; \delta) \leq 2^{-1} \|x - y\| + \varepsilon(y; \delta + \|x - y\|)$ $(x, y \in S)$,

(0_3) $0 \leq \varepsilon(x; \delta + h) - \varepsilon(x; \delta) \leq 3h\delta^{-2}$ $(x \in S; 0 < \delta; 0 \leq h)$,

(0_4) la función $\varepsilon(\cdot; \cdot)$ es uniformemente continua en el producto $S \times [r; +\infty)$ para cada $r > 0$. Además si la norma $\|\cdot\|$ es LUR, entonces la función $\varepsilon(\cdot; \cdot)$ es continua en $S \times [0; +\infty)$ y $\varepsilon(x, 0) = 0$ para $x \in S$.

Demostración. El lado derecho de la desigualdad (O_1) es evidente. Tomamos $z \in S$ tal que la cuerda que une x y z soporte la esfera $(1-\delta)S$, digamos en el punto t . Claramente $z \in G(x;\delta)$, y, por la convexidad de B, el punto t cae entre x y z. Tenemos $\|t\| = 1-\delta$ pues $t \in (1-\delta)S$.



Así
$$\|x-z\| = \|x-t\| + \|t-z\| \geq \|x\| + \|z\| - 2\|t\| = 2\delta.$$
Por lo tanto $\varepsilon(x;\delta) \geq 2^{-1}\|x-z\| \geq \delta$. Esto prueba (O_1).

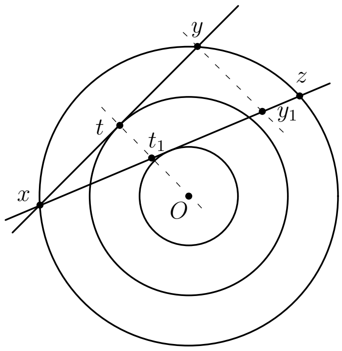
Para probar (O_2) observemos primero que el caso $\delta \geq 1 - \|x-y\|$ es trivial. En efecto, si $\delta \geq 1 - \|x-y\|$ entonces $\varepsilon(y;\delta + \|x-y\|) = 1 \geq \varepsilon(y;\delta)$.

Si $x, y \in S$ y $0 \leq \delta \leq 1 - \|x-y\|$, entonces
$$G(x;\delta) \subset G(y;\delta + \|x-y\|)$$
puesto que para $z \in G(x;\delta)$ y para $0 \leq \lambda \leq 1$ tenemos
$$\|\lambda y + (1-\lambda)z\| \geq \|\lambda x + (1-\lambda)z\| - \lambda\|x-y\| \geq 1 - \delta - \|x-y\|.$$
Se sigue de la observación anterior y de la desigualdad $\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$ que
$$\begin{aligned} 2\varepsilon(x;\delta) &= \sup\{\|x-z\| : z \in G(x;\delta)\} \leq \|x-y\| + \sup\{\|y-z\| : z \in G(x;\delta)\} \\ &\leq \|x-y\| + \sup\{\|y-z\| : z \in G(y;\delta+\|x-y\|)\} = \|x-y\| + 2\varepsilon(y;\delta+\|x-y\|). \end{aligned}$$
Que prueba (O_2).

El lado izquierdo de la desigualdad de (O_3) es trivial. El lado derecho de dicha desigualdad es más sofisticado que los demás. El caso $\delta \geq 1$ es trivial. Si $\delta + h \geq 1 \geq \delta$, entonces, por (O_1), tenemos
$$3h\delta^{-2} \geq 3(1-\delta)\delta^{-2} \geq (1-\delta) \geq \varepsilon(x;\delta+h) - \varepsilon(x;\delta).$$
Supongamos ahora que $0 < \delta \leq \delta + h \leq 1$. Fijamos $z \in G(x;\delta+h)$ y $z \neq x$. Denotemos por E al subespacio, a lo más 2-dimensional, generado por x y z. Claramente, si $z \in G(x;\delta)$, entonces
$$2^{-1}\|x-z\| - \varepsilon(x;\delta) \leq 0 \leq 3h\delta^{-2}.$$

Por tanto en los siguiente supondremos que $z \notin G(x;\delta)$. Empezamos por el caso no trivial de que $z \in S$. Tomamos $y \in E \cap S$ tal que la línea recta $\overline{xy}$ es soporte de la esfera $(1-\delta)S$, y la línea recta $\overline{xz}$ separa (en E) el punto 0 de y. Tal punto y existe porque $z \notin G(x;\delta)$. Tomamos t en $(1-\delta)S \cap \overline{xy}$ y denotamos por t_1 el punto de intersección entre los segmentos $\overline{xz}$ y $\overline{t0}$. Si además y_1 es el punto de intersección de la línea $\overline{xz}$ con la línea paralela a $\overline{0t}$ y pasando a través de y. Por el teorema de tales, tenemos

$$\|y - y_1\| : \|t - t_1\| = \|x - y\| : \|x - t\| \tag{3.20}$$



Como $\|t\| = 1-\delta$, tenemos $\|x - t\| \geq \|x\| - \|t\| = \delta$. Como $z \in G(x;\delta+h)$ y como $t_1 \in \overline{xz}$ cae entre x y z, deducimos que $\|t_1\| \geq 1-\delta-h$. El punto t_1 cae en el segmento unión de 0 y t (puesto que $\overline{xz}$ separa 0 del segmento unión de x e y). Así

$$\|t - t_1\| = \|t\| - \|t_1\| \leq (1-\delta) - (1-\delta-h) = h.$$

Por tanto (3.20) implica

$$\|y - y_1\| \leq \|x - y\| \, h\delta^{-1} \leq 2h\delta^{-1} \tag{3.21}$$

Ahora, si y_1 cae fuera del segmento unión de x y z, entonces z cae entre x e y_1. Por tanto, por la desigualdad triangular,

$$\|x - z\| \leq \|x - y_1\| \leq \|x - y\| + \|y - y_1\|.$$

Así

$$\|x - z\| - \|x - y\| \leq 2h\delta^{-1} (\leq 6h\delta^{-2})$$

Si y_1 cae en el segmento unión de x y z, entonces, por construcción, y_1 cae entre t_1 y z (puesto que t cae entre x e y y $\overline{tt_1}$ es paralela a $\overline{yy_1}$). Por lo tanto

$$y_1 = (1-\lambda)z + \lambda t_1 \quad \text{para algún } \lambda \in [0,1]. \tag{3.22}$$

Por tanto

$$\|y_1\| \leq 1 - \lambda + \lambda \|t_1\| \leq 1 - \lambda + \lambda \|t\| = 1 - \lambda + \lambda(1-\delta) = 1 - \lambda\delta.$$

Mientras, por (3.21),

$$\|y_1\| \geq \|y\| - \|y - y_1\| \geq 1 - 2h\delta^{-1}.$$

En consecuencia,

$$\lambda \leq 2h\delta^{-2}. \tag{3.23}$$

De (3.22) y (3.23) obtenemos

$$\|z - y_1\| = \lambda \|t_1 - z\| \leq 2\lambda \leq 4h\delta^{-2}.$$

Por lo tanto, por la desigualdad triangular,

$$\|x - z\| - \|x - y\| \leq \|y - y_1\| + \|y_1 - z\| \leq 2h\delta^{-1} + 4h\delta^{-2} \leq 6h\delta^{-2}.$$

Por tanto, en ambos casos

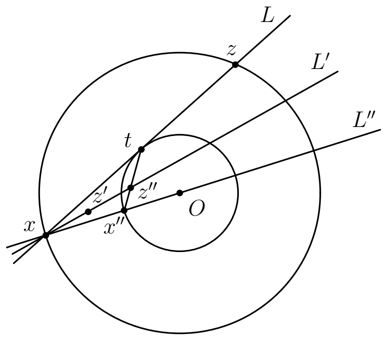
$$2^{-1} \|x - z\| - \varepsilon(x;\delta) \leq 2^{-1}(\|x - z\| - \|x - y\|) \leq 3h\delta^2.$$

Para completar la prueba de (O_3) es suficiente con establecer el siguiente hecho intuitivamente evidente:

Dado $z' \in G(x;\delta + h)$ existe un $z \in G(x;\delta + h)$ en S que satisface

$$\|x - z'\| \leq \|x - z\|.$$

Consideremos sólo el caso no trivial en que $\delta + h \leq 1$. Tomemos $z' \in G(x;\delta + h)$. Sea L' el rayo que nace de x y pasa a través de z'. Si L' no corta el interior de la bola $(1 - \delta - h)B$, entonces elegimos z como el segundo punto de intersección de $L' \cap S$. Puesto que $L' \subset G(x;\delta + h)$.



Supongamos, ahora, que L' corta el interior de la bola $(1-\delta-h)B$. Sea x'' el punto de intersección de la esfera $(1 - \delta - h)S$ con el segmento $[x;0]$ del rayo L'' que nace de x y pasa a través de 0. Sea $L \subset E = \operatorname{span}\{x, z'\}$ el rayo que nace de x que soporta $(1 - \delta - h)B$ y es tal que L' cae entre L y L''. (Si L' y L'' coinciden tomamos como L cualquiera de los rayos soporte). Tomamos un punto t en $(1 - \delta - h)S \cap L$ y sea z'' el punto de intersección $L' \cap \overline{tx''}$. Como L' cae entre L'' y L, el punto z'' cae entre t y x''. Por tanto $z'' = \lambda t + (1 - \lambda)x''$ para algún $0 < \lambda \leq 1$. Como $z' \in G(x;\delta + h)$, el segmento unión de x y z' no tiene puntos en común con el interior de $(1 - \delta - h)B$. Por tanto o z' cae entre x y z'' o $z' = z''$. así

$$\|x - z'\| \leq \|x - z''\| \leq \lambda \|x - t\| + (1 - \lambda) \|x - x''\|. \tag{3.24}$$

Como $\|x''\| = \|t\| = 1 - \delta - h$ y como x'' cae entre x y 0, tenemos

$$\left\|x - x''\right\| = \|x\| - \left\|x''\right\| = \|x\| - \|t\| \leq \|x - t\| . \tag{3.25}$$

Así, combinando (3.24) con (3.25) obtenemos

$$\left\|x - z'\right\| \leq \lambda \|x - t\| + (1 - \lambda) \|x - t\| \leq \|x - t\| .$$

Finalmente elegimos z como el segundo punto de intersección $L \cap S$. Claramente $z \in G(x; \delta + h)$, puesto que la cuerda que une x con z no corta el interior de la bola $(1 - \delta - h)B$. Claramente, por convexidad, t cae entre x y z. Así $\|x - z\| \geq \|x - t\| \geq \|x - z'\|$. Esto completa la prueba de (O_3).

Sea $r > 0$. La continuidad uniforme de la función $\varepsilon(\cdot;\cdot)$ en el producto $S \times [r; +\infty)$ se sigue del hecho de que la función $\varepsilon(\cdot;\cdot)$ satisface en $S \times [r; +\infty)$ la condición de Lipschitz con la constante $4r^{-2}$. En efecto, si (x, δ) y (x_1, δ_1) están en $S \times [r; +\infty)$, entonces, por (O_2) y (O_3), en el único caso no trivial de que δ, $\delta_1 \in [r; 1)$, tenemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x; \delta) - \varepsilon(x_1; \delta_1) &\leq \varepsilon(x_1; \delta + \|x - x_1\|) - \varepsilon(x_1; \delta_1) + 2^{-1} \|x - x_1\| \\
&\leq \frac{3|\delta + \|x - x_1\| - \delta_1|}{[\text{mín}(\delta_1, \delta + \|x - x_1\|)]^2} + 2^{-1} \|x - x_1\| \\
&\leq 3r^{-2}(|\delta - \delta_1| + \|x - x_1\|) + 2^{-1} \|x - x_1\| \\
&\leq 4r^{-2}(|\delta - \delta_1| + \|x - x_1\|).
\end{aligned}$$

Intercambiando los papeles de los puntos (x, δ) y (x_1, δ_1) y usando la simetría del lado derecho de la desigualdad anterior tenemos

$$|\varepsilon(x; \delta) - \varepsilon(x_1; \delta_1)| \leq 4r^{-2}(|\delta - \delta_1| + \|x - x_1\|).$$

Supongamos que la norma $\|\cdot\|$ es LUR. Tomemos puntos (x_n, δ_n) en $S \times [0; +\infty)$ para $n = 0, 1, \ldots$ tales que

$$\lim_n \|x_n - x_0\| = \lim_n \delta_n = \delta_0 = 0.$$

Ahora elegimos $y_n \in G(x_n; \delta_n)$ tales que

$$\|x_n - y_n\| \geq \varepsilon(x_n, \delta_n) \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.26}$$

Como $y_n \in G(x_n; \delta_n)$ y, por tanto $1 - \delta_n \leq \|y_n\| \leq 1$, tenemos

$$1 \geq \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| \geq 1 - \delta_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Así

$$\lim_n \left\|\frac{x_n + y_n}{2}\right\| = \lim_n \left\|\frac{x_0 + y_n}{2}\right\| = 1.$$

Por tanto, como la norma es LUR se tiene que $\lim_n \|x_0 - y_n\| = 0$. Por lo tanto $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$. Y así, por (3.26), $\lim_n \varepsilon(x_n; \delta_n) = 0$. En particular, $\varepsilon(x_0; 0) = 0$ (ponemos $x_n = x_0$ y $\delta_n = 0$ para $n = 1, 2, \dots$). Así

$$\lim_n \varepsilon(x_n; \delta_n) = \varepsilon(x_0; 0) = 0.$$

Por tanto la función $\varepsilon(\cdot; \cdot)$ es continua para $\delta = 0$, y esto completa la prueba de (O_4) y del lema. □

3.5. Teorema de Anderson-Kadec

En esta sección presentamos el método de prueba original de Kadec de que todo espacio de Banach infinito dimensional separable es homeomorfo a l_2. El único resultado "topológico" que usaremos es el teorema de Bartle-Graves (Corolarios 3.2.5 y 3.2.6). Los espacios de Banach con bases juegan un importante papel en la prueba de Kadec. Necesitaremos, en particular, el siguiente resultado debido a Banach.

Proposición 3.5.1. *En todo espacio de Banach infinito dimensional X existe una sucesión $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ que es una base en un subespacio cerrado infinito dimensional de X.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos una sucesión $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números positivos tales que

$$\prod_{k=p}^{p+q-1} (1 - \varepsilon_k) \geq (1 + \varepsilon)^{-1} \quad \text{para } p, q = 1, 2, \dots. \tag{3.27}$$

Construiremos una sucesión infinita $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X tal que

$$\|e_k\| = 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots \tag{3.28}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} c_k e_k \right\| \leq (1 - \varepsilon_p)^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{p+1} c_k e_k \right\| \tag{3.29}$$

(c_k escalares; $k = 1, 2, \dots, p+1$; p=1,2,...). Supongamos que hemos hecho esto. Entonces combinando (3.27) y (3.29) tenemos

$$\left\| \sum_{k=1}^{p} c_k e_k \right\| \leq \prod_{m=p}^{p+q-1} (1 - \varepsilon_m)^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{p+q} c_k e_k \right\| \leq (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{k=1}^{p+q} c_k e_k \right\| \tag{3.30}$$

para escalares arbitrarios $c_1, c_2, \dots, c_{p+q}$ $(p, q = 1, 2, \dots)$. Sea E_0 el espacio vectorial generado por $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ y sea E la clausura de E_0 en X. Si $x \in E_0$, entonces $x = \sum_{k=1}^{k(x)} c_k e_k$ para cierto índice $k(x)$. Esta expresión (además de ser una suma finita) es única. En efecto, si $0 = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ para cierto entero n, entonces, por (3.30), $\|\sum_{k=1}^{m} c_k e_k\| = 0$ para $m = 1, 2, \dots, n$. Por tanto $c_k = 0$ para

$k = 1, 2, \ldots, n$. Para $x = \sum_{k=1}^{k(x)} c_k e_k \in E_0$ ponemos $\tilde{f}_k(x) = c_k$ para $k \leq k(x)$ y $\tilde{f}_k(x) = 0$ para $k > k(x)$. Las funciones $\tilde{f}_k(\cdot)$ son formas lineales sobre E_0. Están acotadas pues, por (3.30).

$$\left\| \tilde{f}_k(x) e_k \right\| = \left\| \sum_{m=1}^{k-1} \tilde{f}_m(x) e_m - \sum_{m=1}^{k} \tilde{f}_m(x) e_m \right\| \leq 2(1+\varepsilon) \|x\|.$$

para $x \in E_0$. Así, cada $\tilde{f}_k(\cdot)$ tiene una única extensión, digamos, $f_k(\cdot)$, a una forma lineal continua en E ($k = 1, 2, \ldots$). Definimos $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$ para $x \in E$. Claramente, por (3.30), tenemos $S_n(x) = x$ para $n > k(x)$; $\|S_n(x)\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|$ para $n \leq k(x)$ y para $x = \sum_{k=1}^{k(x)} c_k e_k \in E_0$. Por tanto $\lim_n S_n(x) = x$ y $\|S_n(x)\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|$ para $n = 1, 2, \ldots$ y para todo $x \in E$ debido a que E_0 es denso en E y a la continuidad de $S_n(\cdot)$ ($n = 1, 2, \ldots$) que se sigue de la continuidad de los funcionales $f_k(\cdot)$ ($k = 1, 2, \ldots$). Así, $\lim_n S_n(x) = x$ para cada $x \in E$. Por tanto todo x en E tiene la expresión

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e_k.$$

Esta expresión es única. En efecto, si $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$, entonces

$$f_p(x) = f_p\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_p(e_k) = c_p \quad \text{para } p = 1, 2, \ldots$$

(puesto $f_p(e_k) = \delta_{p,k}$ para $k, p = 1, 2, \ldots$).

Construimos la sucesión $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ inductivamente. Elegimos e_1 con $\|e_1\| = 1$ arbitrariamente. Supongamos que para algún $r \geq 1$ ya han sido escogidos los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_r$ que satisfacen (3.28) y (3.29). Sea W la intersección de la esfera unidad de X con el espacio, a lo más r-dimensional, generado por los vectores $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Claramente W es compacto. Por tanto existe un conjunto finito $\{w_i\}_{i=1}^{M} \subset W$ que es una ε_r-red para W. Usando el teorema de extensión de H-B definimos para cada w_i una forma lineal continua g_i sobre X tal que

$$g_i(w_i) = \|w_i\| = \|g_i\| = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, M).$$

Como el espacio X es infinito dimensional, existe un $x \in X$ tal que

$$x \neq 0;\ g_i(x) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, M.$$

Ponemos $e_{r+1} = \|x\|^{-1} \cdot x$. Claramente $\|e_{r+1}\| = 1$. Para terminar la inducción es suficiente con comprobar la desigualdad (3.29) para $p = r$. Por la homogeneidad de la norma, la desigualdad (3.29) (para $p = r$) es equivalente a la siguiente

$$1 = \|y\| \leq (1-\varepsilon_r)^{-1} \|y + c e_{r+1}\| \quad (y \in W,\ c \text{ escalar}) \tag{3.31}$$

Para verificar (3.31), fijamos $y \in W$ y tomamos w_i de la ε_r-red $\{w_j : j = 1, \ldots, M\}$ tal que $\|y - w_i\| \leq \varepsilon_r$, como $g_i(e_{r+1}) = 0$ y $\|g_i\| = 1$, para cada $c \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\|w_i + c e_{r+1}\| \geq |g_i(w_i + c e_{r+1})| = g_i(w_i) = 1.$$

En consecuencia,

$$\|y + ce_{r+1}\| \geq \|w_i + ce_{r+1}\| - \|y - w_i\| \geq 1 - \varepsilon_r.$$

Esta última desigualdad es claramente equivalente a (3.31). Esto completa la inducción y la prueba de la proposición. □

Ahora veremos que el problema de la equivalencia topológica de todos los espacios de Banach infinito dimensionales separables se reduce al caso de espacios de Banach con bases. Empezamos con el siguiente concepto. Si X es un espacio normado, entonces $\mathscr{C}_0[X]$ denota el espacio normado de todas las sucesiones $\{x(i)\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de X tales que $\lim_i \|x(i)\| = 0$. Admitimos que $\|\{x(i)\}_{i=1}^{\infty}\| = \sup_i \|x(i)\|$. Las operaciones de suma y multiplicación por escalares se definen coordenada a coordenada. Si X es un espacio de Banach, entonces $\mathscr{C}_0[X]$ también lo es.

Lema 3.5.2. *Sean X e Y espacios vectoriales normados. Entonces*

(i) $\mathscr{C}_0[X \times Y] \backsimeq X \times \mathscr{C}_0[X \times Y]$,

(ii) si $X \backsimeq Y$, entonces $\mathscr{C}_0[X] \backsimeq \mathscr{C}_0[Y]$. Además

(iii) el espacio $\mathscr{C}_0[l_1]$ tiene una base.

Demostración. (i) El homeomorfismo deseado (incluso isomorfismo) es

$$\{x(n), y(n)\}_{n=1}^{\infty} \to (x(1), \{x(n+1), y(n)\}_{n=1}^{\infty})$$

(ii) Si $\tilde{h} : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces la aplicación $h(x) = \tilde{h}(x) - \tilde{h}(0)$ para $x \in X$ es también un homeomorfismo de X en Y y $h(0) = 0$. El homeomorfismo deseado de $\mathscr{C}_0[X]$ en $\mathscr{C}_0[Y]$ es

$$\{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \to \{h(x(n))\}_{n=1}^{\infty}$$

Es claro que está bien definida por ser h continua y $h(0) = 0$. Su inversa es

$$\{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \to \{h^{-1}(x(n))\}_{n=1}^{\infty}$$

La bicontinuidad de h es clara.

(iii) El espacio $\mathscr{C}_0[l_1]$ puede verse como el espacio de las matrices de valores reales $a = (a(i,j))_{i,j}$ tales que $\lim_i \sum_j |a(i,j)| = 0$ con la norma $\|a\| = \sup_i \sum_j |a(i,j)|$. Las operaciones de adición y multiplicación por escalares son entrada a entrada. Definimos, para $n = 2^{k-1}(2r-1)$ $(k, r = 1, 2, \dots)$, una matriz e_n por $e_n(i,j) = 0$ para $(i,j) \neq (k,r)$; $e_n(k,r) = 1$. La sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ forma una base para $\mathscr{C}_0[l_1]$. En efecto, se tiene

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a(i(n), j(n)) e_n$$

donde $(i(n), j(n)) = (k, r)$ para $n = 2^{k-1}(2r-1)$ $(k, r = 1, 2, \dots)$. Obviamente esta expresión es única. □

Ahora estamos en condiciones de reducir nuestro resultado a otro más manejable.

Proposición 3.5.3. *Si cada espacio de Banach infinito dimensional con base es homeomorfo a l_2, entonces cada espacio de Banach infinito dimensional separable es también homeomorfo a l_2.*

Demostración. Sea X un espacio de Banach infinito dimensional y separable arbitrario. Por la proposición 3.5.1, existe un subespacio cerrado infinito dimensional E de X con base. Por nuestra hipótesis $E \simeq l_2$. Así usando del hecho de que l_2 es isométricamente isomorfo a su cuadrado cartesiano (puesto que es un espacio de Hilbert)y aplicando el primer corolario del teorema de Bartle-Graves tenemos

$$X \simeq E \times X/E \simeq l_2 \times X/E \simeq l_2 \times l_2 \times X/E \simeq l_2 \times X.$$

Por otro lado usando el hecho de que todo espacio de Banach separable es un cociente del espacio l_1, teorema 3.1.3, y aplicando el corolario 3.2.4, deducimos que $l_1 \simeq X \times Y$ para algún subespacio cerrado Y de l_1. Por tanto, por los puntos (i) y (ii) del lema anterior, tenemos

$$\mathscr{C}_0[l_1] \simeq \mathscr{C}_0[X \times Y] \simeq X \times \mathscr{C}_0[X \times Y] \simeq X \times \mathscr{C}_0[l_1].$$

Por el apartado (iii) del lema anterior, el espacio $\mathscr{C}_0[l_1]$ tiene base. Así, por hipótesis, $\mathscr{C}_0[l_1] \simeq l_2$. Por tanto $l_2 \simeq X \times l_2$. Así, $l_2 \simeq X$. □

El resto de esta sección se dedica a la prueba del siguiente

Teorema 3.5.4. *Todo espacio de Banach infinito dimensional con base es homeomorfo a l_2.*

Más precisamente, si X es un espacio de Banach, $|\cdot|$ la norma de X, $\{e_k\}$ una base para X con funcionales coeficientes $\{f_k\}$, entonces existe un homeomorfismo H de X en l_2 tal que

$$(\bigstar) \quad H(tx) = tH(x); \quad \text{sgn } (H(x)(k)) = \text{sgn } f_k(x)$$

($x \in X$; $t \in \mathbb{R}$; $k = 1, 2, \dots$).

La idea de la prueba del teorema 3.5.4 se puede esquematizar como sigue. Primero, aplicando el teorema 3.3.5 renormaremos X con una norma LUR de forma que la base $\{e_k\}$ sea 'ortogonal' (lo que denominamos (B_1)) y la convergencia con respecto a los funcionales coeficientes de una sucesión de elementos de la nueva esfera unidad sea equivalente a la convergencia en norma (lo que denominamos (B_2)). El punto crucial de la prueba es la construcción sobre la nueva bola unidad de una cierta función $F(\cdot)$(véase la proposición 3.5.5) con la propiedad de que para cualquier sucesión $\{a_k\}$ de escalares la serie $\sum_k a_k e_k$ es convergente a un elemento de la nueva esfera unidad si y solamente si $\lim_n F(\sum_{k=1}^n a_k e_k) = 1$. Hecho esto, asignaremos a cada $x = \sum_{k=1}^\infty f_k(x) e_k$ en la nueva esfera unidad la sucesión

$$h(x) = \left\{ \left[F\Big(\sum_{k=1}^n f_k(x) e_k\Big) - F\Big(\sum_{k=1}^{n-1} f_k(x) e_k\Big) \right]^{\frac{1}{2}} \text{sgn } f_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

comprobaremos que $h(\cdot)$ es un homeomorfismo de la nueva esfera unidad de X en la esfera unidad de l_2. Y, como hicimos en el capítulo anterior, lo extenderemos a un homeomorfismo de X en l_2. Para ello utilizaremos el lema 2.4.6.

Observemos que la construcción del funcional $F(\cdot)$ es fácil en el caso donde la base es completamente acotada, es decir tiene la siguiente propiedad: Una serie $\sum_k a_k e_k$ converge si y solamente si la sucesión de sus sumas parciales está uniformemente acotada. En este caso ponemos $F(x) = \|x\|^2$ donde $\|\cdot\|$ denota la nueva norma. En el caso general la construcción de $F(\cdot)$ se basa en las técnicas que se han utilizado en el lema 3.4.1 para establecer algunas propiedades de los módulos de convexidad local uniforme.

Recordemos que de acuerdo con el teorema 3.3.5 en cualquier espacio de Banach X con base $\{e_k\}$ existe una norma equivalente $\|\cdot\|$ que verifica las siguientes condiciones:

(B_1) si $|c_1| > |c_2|$ y $c_1 \cdot c_2 \geq 0$, entonces, para reales cualesquiera $a_1, \ldots, a_{n-1}$ y para $n = 2, 3, \ldots,$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + c_1 e_n \right\| > \left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + c_2 e_n \right\|;$$

(B_2) $\lim_n \|x_n - x_0\| = 0$ si y solamente si $\lim_n \|x_n\| = \|x_0\|$ y $\lim_n f_k(x_n) = f_k(x_0)$ para $k \in \mathbb{N}$.

(B_3) la norma $\|\cdot\|$ es LUR.

Ahora y en lo que sigue denotaremos por f_n al enésimo funcional coeficiente de la base $\{e_k\}$. Usaremos también la notación manejada anteriormente:

$$P_0(x) = 0;\ P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \ (x \in X)$$

Proposición 3.5.5. *Sea X un espacio de Banach con una base $\{e_k\}$ y sea la norma $\|\cdot\|$ de X que satisface las condiciones (B_1),(B_2) y (B_3). Entonces existe una función real y continua $F(\cdot)$ definida en la bola unidad de X y que satisface las siguientes condiciones:*

(a) Si $0 < \|x\| < 1$, entonces $0 < F(x) < 1$; $F(0) = 0$; $F(x) = 1$ siempre que $\|x\| = 1$.

(b) Para cada índice fijo n y números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tales que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k \right\| < 1$$

la función $\psi(\alpha) = F(\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \alpha e_n)$ es estrictamente creciente para $\alpha > 0$ y estrictamente decreciente para $\alpha < 0$.

(c) Si una sucesión de números reales $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ satisface la condición

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\| \leq 1 \quad \textit{para}\, n = 1,2,\ldots \quad \textit{y} \quad \lim_n F\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = 1,$$

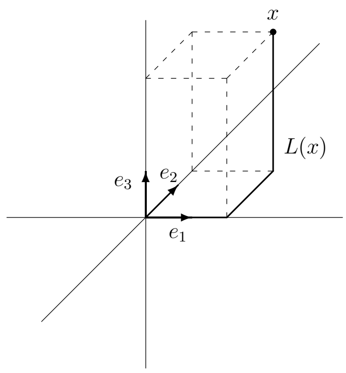
entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ converge.

Demostración. Para

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) e_k \in X$$

definimos:

$$\begin{aligned}
L(x) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y \in X : y = (1-\lambda)P_{n-1}(x) + \lambda P_n(x); 0 \leq \lambda \leq 1\} \\
\varphi(x) &= \varepsilon(\|x\|^{-1} \cdot x; 1 - \|x\|) \quad \text{para}\, 0 < \|x\| \leq 1, \quad \varphi(0) = 1 \\
\phi(x) &= \inf\{\varphi(y) : y \in L(x)\} \quad (\|x\| \leq 1) \\
F(x) &= \|x\|^2 (1 - \phi(x))^2 \quad (\|x\| \leq 1)
\end{aligned}$$



Veremos que la aplicación F satisface las propiedades buscadas.

- La continuidad de F:

  Claramente es suficiente probar que ϕ es continua. Sean $0 < \eta \leq r < 1$. Usando propiedades elementales de la composición de funciones obtenemos de (B_3) y de la condición (O_4) que φ es uniformemente continua en el anillo $\eta/4 \leq \|y\| \leq r$. En particular existe un $0 < \delta < \eta/4$ tal que para y_i con $\eta/4 \leq \|y_i\| \leq r$ $(i = 1,2)$ tenemos la implicación

  $$\text{si } \|y_1 - y_2\| < \delta, \quad \text{entonces} \quad |\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \eta. \tag{3.32}$$

  La implicación (3.32) es también cierta para elecciones arbitrarias de puntos y_i tales que $\|y_i\| \leq r$ $(i = 1,2)$. En efecto, si uno de los puntos es de norma $\leq \eta/4$, entonces el segundo tiene norma $\leq \eta/4 + \delta < \eta/2$. Por tanto, por (O_1) tenemos

  $$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| \leq 1 - \varphi(y_1) + 1 - \varphi(y_2) \leq \|y_1\| + \|y_2\| < \eta.$$

Ahora, elegimos x_i con $0 \leq \|x_i\| \leq r$ $(i = 1, 2)$ y tomamos $y_2 \in L(x_2)$ tal que $\varphi(y_2) - \eta \leq \phi(x_2)$. Como $y_2 \in L(x_2)$, existe un $\lambda \in [0; 1]$ y un entero n tal que

$$y_2 = (1 - \lambda)P_{n-1}(x_2) + \lambda P_n(x_2) = P_{n-1}(x_2) + \lambda f_n(x_2)e_n.$$

Definamos $y_1 = (1 - \lambda)P_{n-1}(x_1) + \lambda P_n(x_1)$. Por (B_1),

$$\|y_i\| \leq \|P_n(x_i)\| \leq \lim_m \|P_m(x_i)\| = \|x_i\| \quad (i = 1, 2)$$

y

$$\|y_2 - y_1\| \leq \lambda \|P_n(x_2 - x_1)\| + (1 - \lambda) \|P_{n-1}(x_2 - x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$$

Así, por (3.32), si $\|x_1 - x_2\| < \delta$ y $\|x_i\| \leq r$ $(i = 1, 2)$, entonces

$$\phi(x_1) - \phi(x_2) \leq \varphi(x_1) - \varphi(x_2) + \eta < 2\eta.$$

Intercambiando los papeles de x_1 y x_2 tenemos

$$\phi(x_2) - \phi(x_1) < 2\eta.$$

Luego si $\|x_i\| \leq r$ $(i = 1, 2)$, entonces, para cada $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x_1 - x_2\| < \delta$, entonces

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| < 2\eta.$$

Así, hemos visto que ϕ y φ son uniformemente continuas en cada bola $\|z\| \leq r$. De nuevo, aplicando resultados elementales en composición de funciones obtenemos de (O_4), que φ es continua en cada punto x con $\|x\| = 1$ y $\varphi(x) = 0$. Por tanto φ es continua en la bola unidad. Así, para todo z en la bola unidad tenemos

$$0 \leq \phi(z) \leq \varphi(P_n(z)) \quad \text{para todo } n,$$

esto es

$$0 \leq \phi(z) \leq \lim_n \varphi(P_n(z)) = \varphi(z).$$

Por lo tanto si $\|x\| = 1$, entonces $\phi(x) = 0$ y, para x_1 con $\|x_1\| \leq 1$

$$|\phi(x) - \phi(x_1)| = \phi(x_1) \leq \varphi(x_1) = |\varphi(x) - \varphi(x_1)|.$$

Esta desigualdad muestra que ϕ es continua en la bola unidad y uniformemente continua en cada bola $\|z\| \leq r$ $(0 \leq r < 1)$. Por tanto F tiene las mismas propiedades.

- Condición (a):

  Claramente $F(0) = 0$ y $0 < F(x) \leq 1$ para $0 < \|x\| \leq 1$ (pues, para $0 < \|x\| \leq 1$, $0 \leq \phi(x) < 1$). Ya hemos visto en la prueba de la continuidad de ϕ que si $\|x\| = 1$, entonces $0 = [\phi(x)]^2 = 1 - F(x)$. Por otro lado, si suponemos que $F(x) = 1$ para algún x con $\|x\| \leq 1$.

Entonces $\phi(x) = 0$. Por tanto, por definición de ϕ, existe una sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $L(x)$ tal que $\lim_k \varphi(y_k) = 0$. Como $\varphi(0) = 1$, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $y_k \neq 0$ para $k = 1, 2, \ldots$. Por tanto, por (O_1)

$$\varphi(y_k) = \varepsilon(y_k \|y_k\|^{-1}; 1 - \|y_k\|) \geq 1 - \|y_k\| \geq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Por tanto, $\lim_k \|y_k\| = 1$. Como $y_k \in L(x)$, tenemos (por (B_1))

$$\|y_k\| \leq \lim_n \|P_n(x)\| = \|x\| \leq 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Así $\|x\| = 1$.

- Condición (b):

  Sea

  $$x(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \alpha e_n \quad (-\infty < \alpha < \infty)$$

  Entonces la definición del conjunto $L(x)$ implica que si $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \geq 0$ y $|\alpha_1| > |\alpha_2|$, entonces $L(x(\alpha_1)) \supset L(x(\alpha_2))$. Si, además $\|x(\alpha_i)\| \leq 1$ $(i = 1, 2)$, entonces $\phi(x(\alpha_1)) \leq \phi(x(\alpha_2))$ y (por (B_1)) $\|x(\alpha_1)\| > \|x(\alpha_2)\|$. Así $F(x(\alpha_1)) > F(x(\alpha_2))$. Esto es equivalente a (b).

- Condición (c):

  Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales tal que si $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, entonces $\|x_n\| \leq 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $\lim_n F(x_n) = 1$. Claramente, la última condición implica que $\lim_n \phi(x_n) = 0$. Por lo tanto, podemos elegir $y_n \in L(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tales que $\lim_n \varphi(y_n) = 0$. Por tanto existe un N tal que $y_n \neq 0$ para $n > N$ (pues $\varphi(0) = 1$). Como $y_n \in L(x_n)$ existe un índice $k(n)$ y $\lambda_n \in [0, 1]$ tal que

  $$y_n = (1 - \lambda_n) P_{k(n)}(x_n) + \lambda_n P_{k(n)+1}(x_n) = P_{k(n)}(x_n) + \lambda_n a_{k(n)+1} e_{k(n)+1}$$

  para $n = 1, 2, \ldots$

  Observemos que para verificar (c) es suficiente probar que

  $$\text{Si } m > k(n), \quad \text{entonces } x_m \in G\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}; 1 - \|y_n\|\right) \quad \text{para } n > N \tag{3.33}$$

  En efecto, por definición de la función $\varepsilon(x; \delta)$, se obtiene de (3.33) que

  $$\|x_p - x_q\| \leq 4\varepsilon\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}; 1 - \|y_n\|\right) = 4\varphi(y_n) \quad \text{para } p, q > k(n) \quad (n > N)$$

  Por tanto la condición $\lim_n \varphi(y_n) = 0$ implica que $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Como X es un espacio de Banach, existe $x \in X$ tal que $\lim_m x_m = x$. Claramente $f_k(x) = \lim_m f_k(x_m) = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Así $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, puesto que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base para X. Para completar la prueba tenemos que comprobar (3.33).

Se sigue de la hipótesis $m > k(n)$ y de la definición de y_n que

$$x_m = y_n + (1-\lambda_n)a_{k(n)+1}e_{k(n)+1} + v_{n,m}$$

donde $v_{n,m} = 0$ para $m = k(n)+1$ y $v_{n,m} = \sum_{k=k(n)+2}^{m} a_k e_k$ para $m > k(n)+1$. Así, para $0 \leq t \leq 1$ tenemos

$$t\frac{y_n}{\|y_n\|} + (1-t)x_m = (t\|y_n\|^{-1} + 1 - t)y_n + (1-\lambda_n)(1-t)a_{k(n)+1}e_{k(n)+1} + (1-t)v_{n,m}.$$

Observemos que $t\|y_n\|^{-1} + 1 - t \geq t + 1 - t = 1$ pues $\|y_n\| \leq 1$. Por tanto usando la igualdad

$$y_n = \sum_{k=1}^{k(n)} a_k e_k + \lambda_n a_{k(n)+1}e_{k(n)+1}$$

y aplicando (B_1) obtenemos

$$\left\|t\frac{y_n}{\|y_n\|} + (1-t)x_m\right\| \geq \left\|\Big(\frac{t}{\|y_n\|} + 1 - t\Big)y_n\right\| \geq \|y_n\|.$$

Pero esto significa que $x_m \in G(\|y_n\|^{-1} y_n; 1 - \|y_n\|)$ y esto termina la prueba de (3.33) y de la proposición. □

Demostración del teorema 3.5.4. Sea X un espacio de Banach infinito dimensional con una base $\{e_k\}$ y sea $|\cdot|$ la norma original de X. Definimos, de acuerdo con el teorema 3.3.5, una norma equivalente en X, digamos $\|\cdot\|$, que verifica las condiciones (B_1), (B_2) y (B_3). Ahora construimos un funcional F que verifica junto con la norma $\|\cdot\|$ y la base $\{e_k\}$ las condiciones (a), (b) y (c) de la proposición anterior. Definimos un homeomorfismo h entre la esfera unidad $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ en la esfera unidad de l_2 por

$$h(x) = \{[F(P_n(x)) - F(P_{n-1}(x))]^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}\ f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

Los siguientes lemas muestran que h tiene las propiedades deseadas.

Lema 3.5.6. *h es inyectiva y lleva la esfera unidad $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ a la esfera unidad de l_2.*

Demostración. Por (b), $[F(P_n(x)) - F(P_{n-1}(x))] \geq 0$ para $n = 1, 2, \ldots$ Por tanto, por continuidad de F,

$$\sum_{n=1}^{\infty}[h(x)(n)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}[F(P_n(x)) - F(P_{n-1}(x))] = \lim_n F(P_n(x)) = 1$$

(Puesto que la serie es telescópica, $\|x\| = 1$ y $\lim_n P_n(x) = x$ se tiene que $\lim F(P_n(x)) = F(x) = 1$). Así, para cada $x \in X$ con $\|x\| = 1$, $\|h(x)\| = 1$.

Ahora, elegimos $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ con $\|y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}[y(n)]^2 = 1$. Claramente $|y(1)| \leq 1$. Por lo tanto, por (b), la ecuación $F(\alpha e_1) = [y(1)]^2$ tiene una única solución, digamos a_1, tal que sgn $a_1 =$ sgn $y(1)$. Supongamos que para algún $n > 1$ los números reales $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ han sido unívocamente determinados de forma que para $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$F\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\Big) - F\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i e_i\Big) = [y(k)]^2; \quad \text{sgn } y(k) = \text{sgn } a_k. \tag{3.34}$$

Como $\|y\| = 1$, se sigue de (3.34) que

$$1 - F\Big(\sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i\Big) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[F\Big(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\Big) - F\Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_i e_i\Big)\right] = 1 - \sum_{k=1}^{n-1}[y(k)]^2 \geq [y(n)]^2 \geq 0. \tag{3.35}$$

Consideremos la función

$$\psi(\alpha) = F\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k + \alpha \cdot \text{sgn } y(n) e_n\right).$$

Claramente $\psi(0) = F(\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k)$. Se sigue de (3.35) y de las condiciones (a) y (b) que si $y(n) \neq 0$, entonces existe un único $\tilde{\alpha} > 0$ tal que $1 = \psi(\tilde{\alpha}) \geq [y(n)]^2 + F(\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k)$. Por tanto, por la continuidad de F, si $y(n) \neq 0$, entonces la ecuación

$$\psi(\alpha) - \psi(0) = [y(n)]^2$$

tiene una solución, digamos α_n, en el intervalo $[0; \tilde{\alpha}]$. Por (b), esta solución es única. Ponemos $a_n = \alpha_n$ sgn $y(n)$. Si $y(n) = 0$, entonces, por (b), $a_n = 0$ es el número para el que la igualdad

$$F\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\Big) - F\Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k e_k\Big) = [y(n)]^2 = 0$$

se cumple. Esto completa la definición inductiva de la única sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface (3.34) para $k = 1, 2, \dots$. Claramente (3.34) implica que

$$F\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\Big) = \sum_{k=1}^{n}[y(k)]^2.$$

Como $\|y\| = 1$, tenemos que $\lim_n F(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k) = 1$. Por tanto, por (c), la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ converge. Sea $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$. Como

$$F(x) = \lim_n F\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\Big) = 1$$

la condición (a) implica que $\|x\| = 1$. Claramente tenemos que $h(x) = y$. Por tanto h lleva la esfera unidad de X en la esfera unidad de l_2. Finalmente, la unicidad de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ implica que h es inyectiva. □

Lema 3.5.7. *Sea $\{x_m\}_{m=0}^{\infty}$ con $\|x_m\| = 1$, para $m = 0, 1, \dots$, una sucesión en X. Entonces se tiene que $\lim_m \|x_m - x_0\| = 0$ si y solamente si*

$$\lim_m (h(x_m))(n) = h(x_0)(n) \quad \textit{para } n = 1, 2, \dots \tag{3.36}$$

Demostración. La necesidad de (3.36) es un consecuencia directa de la definición de h y de la continuidad de F. Para probar la implicación opuesta, obtendremos de (3.36) que

$$\lim_m f_n(x_m) = f_n(x_0) \quad \text{para } n = 0, 1, 2 \dots \tag{3.37}$$

donde por conveniencia consideramos $f_0(x) = 0$ para $x \in X$. Como la norma $\|\cdot\|$ satisface (B_2), (3.37) nos lleva al resultado deseado.

La prueba de (3.37) la haremos por inducción sobre n. Es claro para $n = 0$. Supongamos que (3.37) se verifica para $0 \leq n < k$. Entonces, en particular

$$\lim_m P_{k-1}(x_m) = P_{k-1}(x_0). \tag{3.38}$$

Consideremos dos casos:

1º. $f_k(x_0) \neq 0$. Entonces (3.36) implica que sgn $f_k(x_m) =$ sgn $f_k(x_0)$ para casi todo m, puesto que, por (b), tenemos que sgn $(h(x_m))(k) = sgn f_k(x_m)$ para $m = 0, 1, \dots$.

Como la sucesión $\{f_k(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ está acotada ($|f_k(x_m)| \leq \|f_k\| \, \|x_m\| = \|f_k\| \; m = 0, 1, \dots$), podemos suponer sin pérdida de generalidad (cambiando, si es necesario, la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ por una subsucesión adecuada) que el límite, $\lim_m f_k(x_m) = \alpha$, existe. Entonces, por (3.36) y (3.38), tenemos

$$\begin{aligned} F(P_k(x_0)) - F(P_{k-1}(x_0)) &= \lim_m [F(P_k(x_m)) - F(P_{k-1}(x_m))] \\ &= F(P_{k-1}(x_0) + \alpha e_k) - F(P_{k-1}(x_0)). \end{aligned}$$

Así

$$F(P_k(x_0)) = F(P_{k-1}(x_0) + f_k(x_0)e_k) = F(P_{k-1}(x_0) + \alpha e_k),$$

mientras que

$$\text{sgn } f_k(x_m) = \text{sgn } f_k(x_0) = \text{sgn } \alpha.$$

Por tanto, por la condición (b) tenemos

$$\alpha = f_k(x_0).$$

2º. $f_k(x_0) = 0$. Si $\limsup_m f_k(x_m) > 0$, entonces, cambiando, si es necesario, la sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ por una subsucesión adecuada, podemos suponer que existe $\lim_m f_k(x_m) = \alpha \neq 0$. Así (3.36) y (3.38) implican

$$\begin{aligned} F(P_k(x_0)) - F(P_{k-1}(x_0)) &= 0 = \lim_m [F(P_k(x_m)) - F(P_{k-1}(x_m))] \\ &= F(P_{k-1}(x_0) + \alpha e_k) - F(P_{k-1}(x_0)). \end{aligned}$$

Por tanto $F(P_k(x_0)) = F(P_{k-1}(x_0) + \alpha e_k)$. Así, por (b), $\alpha = 0$, que es una contradicción. Esto completa la inducción y por tanto el lema. $\square$

Ahora estamos en condiciones de completar la prueba del teorema 3.5.4 . La continuidad de h^{-1} se sigue del lema 3.5.7. La continuidad de h se sigue del lema 3.1.4 que afirma que la convergencia en norma y puntual en la esfera unidad de l_2 coincide y del lema 3.5.7. Por tanto h es un homeomorfismo entre las esferas unidad de X y l_2.

Finalmente definimos el homeomorfismo H de X en l_2 por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x = 0, \\ \|x\| \cdot h(\frac{x}{\|x\|}) & \text{para } x \neq 0. \end{cases}$$

Como vimos anteriormente, tal definición a partir de un homeomorfismo entre las bolas unidad de los correspondientes espacios constituía un homeomorfismo entre los espacios. Así pues, para completar la prueba sólo hemos de comprobar que H satisface las condiciones de ($\bigstar$). La segunda es inmediata por (b) y como

$$\begin{aligned} H(tx) &= \|tx\| \cdot h\left(\frac{tx}{\|tx\|}\right) = |t|\,\|x\|\,h\left(\frac{tx}{|t|\,\|x\|}\right) = |t|\,\|x\|\,h\left(\text{sgn }\, t \cdot \frac{x}{\|x\|}\right) \\ &= |t|\,\|x\| \,\text{sgn }\, t \cdot \left(\frac{x}{\|x\|}\right) = t \cdot \|x\| \cdot h\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = tH(x). \end{aligned}$$

se tiene que, en efecto, H satisface ($\bigstar$). Así pues, queda probado el resultado. □

Ahora estamos en condiciones de poder enunciar y probar el resultado perseguido durante este estudio.

Corolario 3.5.8. *Todo espacio de Banach infinito dimensional separable es homeomorfo a l_2.*

Demostración. Se obtiene el resultado combinando el teorema 3.5.4 con la proposición 3.5.3. □

Corolario 3.5.9. *Todo par de espacios de Banach infinito-dimensionales separables son mutuamente homeomorfos.*

3.6. Teorema de Anderson

Hemos dedicado este capítulo a la prueba del hecho de que si un espacio de Banach es separable, entonces es homeomorfo a l_2. Esto es, topológicamente, son iguales. En realidad podemos establecer un resultado aún más general.

Teorema 3.6.1. *Todo espacio de Fréchet separable es homeomorfo a l_2.*

Este resultado, que recibe el nombre de Teorema de Anderson-Kadec, responde a una pregunta que planteó Fréchet [10], pp. 94-96 (1928) y Banach [2], p. 233 (1932). Esta pregunta fue abordada por varios matemáticos. Históricamente la primera contribución fue hecha por Mazur [23](1929) quién probó que todos los espacios L_p y l_p $(1 \leq p < \infty)$ son homeomorfos al espacio de Hilbert l_2. Este resultado fue generalizado al caso de los espacios de Orlicz y a otros espacios de funciones por Kaczmarz [12] y M. H. Stone [26]. El homeomorfismo entre c_0 y l_2 fue establecido por Kadec [13] en 1953. Después, en una serie de artículos Kadec probó sucesivamente que todos los espacios de Banach infinito dimensionales separables y uniformemente convexos (Kadec [14]), reflexivos (Kadec [15]), conjugados (Kadec [16] e independientemente Klee [20]), con base incondicional (Kadec [17]), con base (Kadec [18], [19]) son homeomorfos a l_2. El último resultado combinado con un resultado de Bessaga y Pelczyński [3] (que establece que si X es un espacio de Banach separable que contiene un subespacio homeomorfo a l_2, entonces X es homeomorfo a l_2) nos da el homeomorfismo de todos los espacios de Banach separables (como hemos visto en este capítulo). Finalmente en 1966 Anderson [1] probó que l_2 es homeomorfo al producto infinito numerable de rectas, que combinado con el resultado de Kadec mencionado arriba y un resultado de Bessaga y Pelczyński [4] da el teorema 3.6.1.

Esta sección está dedicada a la exposición del teorema de Anderson. Si bien, no vamos a dar una prueba autocontenida del mismo, en el sentido de que no vamos a probar todos los resultados necesarios. Pero enunciaremos los resultados imprescindibles para la prueba del mismo.

El Aparato Topológico

Un espacio de Keller es cualquier conjunto convexo compacto e infinito-dimensional que es afínmente homeomorfo a un subconjunto del espacio de Hilbert l_2.

Sea W un conjunto convexo en un espacio vectorial topológico X. Un punto $x_0 \in W$ es interno para W si y solamente si 0 es interno para $W - x_0$ si y solamente si para todo $y \in W - x_0$, existe un $c > 0$ tal que $-cy \in W - x_0$. El conjunto de los puntos internos de W se denota por $\operatorname{rint}(W)$ y $\operatorname{rbd}(W) = W \setminus \operatorname{rint}(W)$. El punto x_0 es casi interno para W $(x_0 \in \operatorname{alint}(W))$ si

$$\overline{\{y \in W : \exists c > 0 \text{ tal que } x_0 - c(y - x_0) \in W\}} = W.$$

$\operatorname{Ext}(W)$ denota el conjunto de todos los puntos extremos $x \in W$, esto es aquéllos tales que si $x - y$, $x + y \in W$ entonces $y = 0$.

Un subconjunto A de un espacio topológico X es un T-conjunto si

$$\overline{\{f \in C(Q, X) : f(Q) \subset A\}} = C(Q, X)$$

donde $Q = [0; 1]^{\mathbb{N}}$ y la clausura se toma en la topología compacto-abierta. La clase de los T-conjuntos en X la denotaremos por $\mathscr{T}(X)$.

El resultado que utilizaremos en la prueba de Anderson y que incluiremos aquí sin prueba es el siguiente. Para más información ver [5].

Proposición 3.6.2. *Sea W un espacio de Keller y sea $A \in \mathscr{T}(W)$ un G_δ. Si se cumple la condición*

$$\operatorname{rint}(W) \neq \emptyset \quad y \quad A \subset \operatorname{rbd}(W), \tag{3.39}$$

entonces A es homeomorfo a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Prueba del teorema

Podemos probar ahora el teorema de Anderson.

Teorema 3.6.3. *El espacio de Hilbert l_2 es homeomorfo al producto numerable de líneas, esto es, a $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración. Para un conjunto $A \subset B$, donde B es la bola unidad de l_2, denotamos por $\widetilde{A}$ al conjunto A dotado de la topología de la convergencia coordenada a coordenada. Cuando escribamos A lo haremos para denotar el espacio topológico con la topología inducida por la norma de l_2.

Claramente $\widetilde{B}$ es un espacio de Keller. Para cualquier función continua $f : Q \longrightarrow \widetilde{B}$, podemos definir $f_n : Q \longrightarrow \widetilde{B}$ por la fórmula

$$f_n(q) = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \sum_{i=1}^{n} f(q)(i) v_i + \left(1 - \frac{n}{n+1} \sum_{j=1}^{n} |f(q)(j)|^2 \right)^{1/2} v_{n+1}$$

para $q \in Q$, donde v_i es el i-ésimo vector unidad en l_2, es decir, $v_i(i) = 1$ y $v_i(k) = 0$ para $k \neq i$. Claramente, la sucesión f_n converge uniformemente en Q, y $f_n(Q) \subset \widetilde{S} \setminus \{v_1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente el conjunto

$$\widetilde{B} \setminus (\widetilde{S} \setminus \{v_1\}) = \{v_1\} \cup (\widetilde{B} \setminus \widetilde{S})$$

es un F_σ, y por lo tanto, $\widetilde{S} \setminus \{v_1\}$ es un G_δ. Además $\widetilde{S} \setminus \{v_1\}$ es disjunto de $\operatorname{rint}(\widetilde{B}) = \widetilde{B} \setminus \widetilde{S}$. Por tanto, por la proposición 3.6.2

$$\widetilde{S} \setminus \{v_1\} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

Definimos la proyección estereográfica $h : S \setminus \{-v_1\} \longrightarrow l_2^0$, y la traslación $g : l_2^0 \longrightarrow l_2$, donde $l_2^0 = \{x \in l_2 : x(1) = 0\}$, mediante las fórmulas

$$h(x) = \begin{cases} x - x(1) \cdot v_1 & \text{para } x \in S^+; \\ (x - x(1) \cdot v_1) \, \|x - x(1) v_1\|^{-2} & \text{para } x \in (S \setminus S^+) \setminus \{v_1\}. \end{cases}$$

y

$$g(x)(n) = x(n+1) \quad \text{para} \quad x \in l_2^0, \quad n \in \mathbb{N}$$

Tanto h como g son homeomorfismos y, por tanto, tenemos

$$l_2 \simeq l_2^0 \simeq S \setminus \{-v_1\} \simeq S \setminus \{v_1\}$$

Pero, gracias al lema 3.1.4, tenemos que

$$\widetilde{S} \setminus \{v_1\} \simeq S \setminus \{v_1\}$$

y, por ende, la hipótesis del teorema. □

Observación 3.6.4. *Observemos que la pieza clave en la prueba es el hecho de que en la esfera unidad de l_2 la topología de la norma y la de la convergencia coordenada a coordenada coincidan. Esto es, la propiedad de Kadec-Klee.*

Observación final

Hemos visto que todo espacio de Banach queda caracterizado topológicamente por su carácter de densidad. El mismo resultado es cierto, como hemos comentado, para los espacios de Fréchet. Nos podríamos plantear la hipótesis de si esto es cierto en los espacios normados en general, es decir prescindiendo de la completitud en el caso de los espacios de Banach.

La clasificación topológica en este caso no es tan sencilla. Para más información al respecto ver [5], capítulo 8.

Capítulo 4

Espacios reflexivos

Hemos visto en el capítulo anterior que todos los espacios de Banach infinito-dimensionales separables eran homeomorfos, y dábamos algunas propiedades de éste aunque no podíamos construirlo explícitamente debido al uso del teorema de Bartle-Graves. Ahora abordaremos el problema del carácter de densidad en general, para ello introduciremos la hipótesis adicional de la reflexividad. La construcción de tal homeomorfismo la haremos en la sección 4.4 de este capítulo. Las pruebas de estos resultados están basadas en la técnica topológica de descomposición que desarrollamos en las secciones 4.1 y 4.2, las bases de proyecciones del análisis funcional, y algunos resultados especiales sobre el carácter de isomorfía de ciertos espacios de Banach.

4.1. El método de la descomposición

Sean X e Y espacios topológicos. Se dice que X es un factor de Y, que notaremos por $X \mid Y$, si existe un espacio topológico Z tal que $Y \simeq X \times Z$. Para identificar los factores topológicos de los espacios de Banach usaremos las siguientes proposiciones.

Proposición 4.1.1. *Supongamos que X es un espacio de Fréchet y Z es un espacio topológico. Entonces cada una de las condiciones siguientes es suficiente para que $Z \mid X$.*

(a) Z es homeomorfo a un subespacio cerrado de X.

(b) Z es homeomorfo a un cociente del espacio X.

(c) Existe un operador lineal y continuo de X sobre Y con $Z \simeq Y$.

Demostración. Es sólo una reformulación de los corolarios 3.2.4 y 3.2.5 □

El concepto de factor topológico es crucial en el estudio y planteamiento de la herramienta de la que trata esta sección. Para establecerla aún es necesaria una definición más.

Definición 4.1.2. *Dados X e Y dos espacios topológicos. Se define $C(X,Y)$ como el espacio formado por las funciones continuas de X en Y junto a la topología compacto-abierta, que tiene como base los conjuntos de la forma $V(K,U) = \{f \in C(X,Y) : f(K) \subset U\}$ para elecciones arbitrarias de compactos K en X y abiertos U en Y.*

Algunas propiedades fundamentales de los espacios que acabamos de definir son las siguientes

Lema 4.1.3. *Dados X, Y y T espacios topológicos se tiene que*

$$C(T, X \times Y) \backsimeq C(T,X) \times C(T,Y)$$

Si, además $X \backsimeq Y$ entonces

$$C(T,X) \backsimeq C(T,Y)$$

Finalmente, tenemos también que $C(\{x\},Y) \backsimeq Y$ para cualquier conjunto unipuntual $\{x\}$.

Demostración. Para demostrar la primera de las afirmaciones, definimos el operador

$$\Upsilon \ : \ C(T, X \times Y) \longrightarrow C(T,X) \times C(T,Y)$$

como el que a cada $f \in C(T, X \times Y)$ le asigna $\Upsilon(f) = (P_X \circ f, P_Y \circ f)$ donde P_X y P_Y son las proyecciones naturales de $X \times Y$ en X y en Y respectivamente. Υ está claramente bien definido y además es biyectivo, puesto que su operador inverso es $\Upsilon^{-1}(f,g)(t) = (f(t), g(t))$.

Veamos que ambas aplicaciones son continuas: Dados K_1, K_2 compactos en T, U_1 abierto en X y U_2 abierto en Y, consideramos los abiertos en $X \times Y$, $V_1 = U_1 \times Y$ y $V_2 = X \times U_2$ y llamamos $W_1 := V(K_1, V_1) \cap V(K_2, V_2)$ y $W_2 = V(K_1, U_1) \times V(K_2, U_2)$. Afirmamos que

$$\Upsilon(W_1) = W_2.$$

Si esto es cierto, tendremos la bicontinuidad de Υ. Ahora bien, dado $F \in W_1$ tenemos que $P_1(\Upsilon(F)(t_1)) \in U_1$ para cada $t_1 \in K_1$, y $P_2(\Upsilon(F)(t_2)) \in U_2$ para cada $t_2 \in K_2$, o lo que es lo mismo $\Upsilon(F) \in W_2$. Por otro lado, dado $(f,g) \in W_2$, la aplicación $F(t) = (f(t), g(t))$ está en W_1 y $\Upsilon(F) = (f,g)$. Es decir, la afirmación anterior es cierta.

Para probar la segunda de las afirmaciones, consideramos $\varphi : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo y definimos $\psi : C(T,X) \longrightarrow C(T,Y)$ como aquel operador que a cada $f \in C(T,X)$ le asigna la aplicación $\psi(f) = \varphi \circ f$. Como φ y f son continuas, ψ está bien definida. Además, dados K un compacto de T y U un abierto en Y, si llamamos $V = \varphi^{-1}(U)$, entonces es rutinario comprobar que $\psi(V(K,V)) = V(K,U)$ y, por tanto, ψ es un homeomorfismo.

Finalmente, para probar la tercera afirmación, consideramos la aplicación $\phi : C(\{x\}, Y) \longrightarrow Y$ que lleva cada función $f \in C(\{x\}, Y)$ a $f(x) \in Y$. Evidentemente, para cada abierto U de Y si consideramos el abierto $V(\{x\}, U)$ se tiene que $\phi(V(\{x\}, U)) = U$, y, como es biyectiva, ϕ es un homeomorfismo. □

Lema 4.1.4. *Dados S, T espacios compactos y X arbitrario, se tiene que*

$$C(S \times T, X) \backsimeq C(S, C(T, X))$$

Demostración. Consideremos la aplicación

$$\theta : C(S \times T, X) \longrightarrow C(S, C(T, X))$$

definida por $\theta(f)(s)(t) = f(s, t)$. Gracias a la continuidad de f es sencillo probar que para cada $s \in S$ fija, la aplicación $\theta(f)(s)$ está en $C(T, X)$. Para ver que θ está bien definida, es necesario probar que $\theta(f)$ es continua para cada $f \in C(S \times T, X)$. Supongamos que no lo es. Entonces, podemos suponer la existencia de un compacto $K \subset T$, un abierto $U \subset X$, con $\theta(f)(s)(k) \subset U$ y de una red $\{s_\alpha \subset S\}$ que converge a $s \in S$ y tal que $\theta(f)(s_\alpha) \notin V(K, U)$. Pero entonces, existe una red en K, $\{t_\alpha\}$ tal que

$$f(s_\alpha, t_\alpha) = \theta(f)(s_\alpha)(t_\alpha) \notin U$$

Pero, como K es compacto, tomando subredes podemos suponer que t_α converge a un cierto $t \in K$, y, por tanto

$$f(s, t) = \lim_\alpha f(s_\alpha, t_\alpha) = \lim_\alpha \theta(f)(s_\alpha)(t_\alpha) \in X \setminus U$$

Pero como $f(s, K) = \theta(f)(s)(k) \subset U$, llegamos a una contradicción y, por tanto, θ está bien definida.

Observemos que hasta ahora no hemos supuesto nada acerca de los espacios topológicos. Veamos ahora con todas las hipótesis que θ es, en efecto, un homeomorfismo. La inyectividad es inmediata. Dado $F \in C(S, C(T, X))$ definimos $f(s, t) := F(s)(t)$. Vamos a probar que f está en $C(S \times T, X)$, para ello, consideremos una red (s_α, t_α) convergente a (s, t), y U un entorno arbitrario de $f(s, t)$. Como $f(s, t) = F(s)(t)$ y $F(s)$ es continua, existe un cierto α_1 de forma que para todo $\alpha \geq \alpha_1$ se tiene $F(s)(t_\alpha) \in U$. Ahora bien, el conjunto $K := \{t_\alpha : \alpha \geq \alpha_1\} \cup \{t\}$ es compacto y $F(s)(K) \subset U$, pero como s_α converge a s y F es continua entonces $F(s_\alpha)$ converge a $F(s)$ en $C(T, X)$ y, por tanto, existe un cierto α_2 tal que para cada $\alpha \geq \alpha_2$ se tiene que $F(s_\alpha)(K) \subset U$. Pero entonces, si llamamos $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ entonces para cada $\alpha \geq \alpha_0$ se tiene que $f(s_\alpha, t_\alpha) = F(s_\alpha)(t_\alpha)$ están en U. Esto es, $f \in C(S \times T, X)$. Pero, claro $\theta(f) = F$. Con lo que obtenemos la suprayectividad de θ. Dados, $K_1 \subset S$, $K_2 \subset T$ compactos y $U \subset X$ abierto, se tiene que $\theta(V(K_1 \times K_2, U)) = V(K_1, V(K_2, U))$, como los primeros forman una base de la topología en $C(S \times T, X)$ y los segundos una base de $C(S, C(T, X))$ se tiene que θ es bicontinua y terminamos la prueba. □

Ahora estamos en condiciones de establecer la citada herramienta denominada *Método de descomposición*:

Proposición 4.1.5 (El método de descomposición). *Supongamos que los espacios topológicos X, Y y T satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $X \times C(T, X) \backsimeq C(T, X)$, $Y \times C(T, Y) \backsimeq C(T, Y)$.

(ii) $X \mid Y$, *e* $Y \mid X$.

(iii) $Y \backsimeq C(T, Y)$.

Entonces X es homeomorfo a Y.

Demostración. Por (ii), existen espacios topológicos Z y Z' tales que $X \backsimeq Y \times Z$ y $Y \backsimeq X \times Z'$. Por lo tanto, por el lema 4.1.3, y la conmutatividad y asociatividad del producto cartesiano, tenemos

$$\begin{aligned} Y &\backsimeq C(T, Y) \backsimeq C(T, X \times Z') \backsimeq C(T, X) \times C(T, Z') \\ &\backsimeq X \times C(T, X) \times C(T, Z') \backsimeq X \times Y. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$X \backsimeq Y \times Z \backsimeq C(T, Y) \times Z \backsimeq Y \times C(T, Y) \times Z \backsimeq Y \times X.$$

Por lo tanto $X \backsimeq Y$. □

En el caso en que el espacio topológico T es un punto, tenemos:

Corolario 4.1.6. *Si $X \backsimeq X^2$, $Y \backsimeq Y^2$ y $X \mid Y$, $Y \mid X$, entonces $X \backsimeq Y$.*

Muchas de las aplicaciones de la proposición 4.1.5 corresponden a las siguientes elecciones del espacio T: El conjunto de los enteros positivos $\mathbb{N}$, el espacio ω que es la compactificación por un punto de $\mathbb{N}$, y el discontinuo de Cantor generalizado D^A, donde $D = \{-1, 1\}$ y A es un conjunto infinito. Veamos casos en los que la condición (i) de la proposición 4.1.5 es siempre cierta, para ello definimos:

Definición 4.1.7. *Se definen los siguientes espacios.*

1. $X^{\mathbb{N}} = C(\mathbb{N}, X)$
2. $c[X] = C(\omega, X)$.

Definición 4.1.8. *Un grupo topológico es un par (G, τ), donde G es un grupo, τ una topología y las aplicaciones $(f, g) \to fg$, $f \to f^{-1}$ son continuas.*

Proposición 4.1.9. *Tenemos*

(a) $X^{\mathbb{N}} \backsimeq X \times X^{\mathbb{N}}$ *y* $c[X] \backsimeq X \times c[X]$ *para cualquier espacio topológico* X*;*

(b) $C(D^A, X) \backsimeq X \times C(D^A, X)$ *para todo grupo topológico* X*;*

(c) Si T *es un espacio topológico infinito, Hausdorff, localmente compacto y* σ*-compacto, entonces* $C(T, X) \backsimeq X \times C(T, X)$ *para cada espacio de Fréchet* X*.*

Demostración. Para (a) observamos que la fórmula $(x_n) \to (x_1, (x_{n+1}))$ define los homeomorfismos deseados. Nótese que del resultado (a) se sigue que, para cualquier espacio topológico Z,

$$c[X] \mid Z \Rightarrow Z \backsimeq X \times Z \tag{4.1}$$

En efecto, si $c[X] \mid Z$ entonces, para algún espacio topológico V, tenemos

$$Z \backsimeq c[X] \times V \backsimeq X \times c[X] \times V \backsimeq X \times Z.$$

Para probar (b) en primer lugar observamos que si G es un grupo topológico arbitrario y T es un espacio topológico, entonces la función

$$f \to (f(t_0), f(t_0)^{-1} f)$$

es un homeomorfismo de $C(G, T)$ sobre el producto $G \times V$, donde V es el espacio de todas las funciones continuas $g : T \to G$ tales que, para un t_0 fijo, $g(t_0)$ es el elemento neutro del grupo G.

Claramente, si X es un grupo topológico, entonces el espacio $c[X]$ tiene la estructura natural de grupo topológico. Por lo tanto,

$$C(D^A, c[X]) \backsimeq c[X] \times V$$

en particular

$$c[X] \mid C(D^A, c[X]) \tag{4.2}$$

Como $C(S \times T, X) \backsimeq C(S, C(T, X))$ para todo par de espacios compactos S y T, tenemos

$$C(D^A, c[X]) = C(D^A, C(\omega, X)) \backsimeq C(D^A \times \omega, X),$$

de donde, por (4.2), $c[X] \mid C(D^A \times \omega, X)$. Por lo tanto, por (4.1), para completar la prueba de (b) es suficiente ver que D^A es homeomorfo a $D^A \times \omega$, y por lo tanto $C(D^A, X) \backsimeq C(D^A \times \omega, X)$. Para este fin, nótese que $D^{\mathbb{N}} \backsimeq D^{\mathbb{N}} \times \omega$, puesto que todo espacio compacto perfecto y de dimensión cero es homeomorfo al discontinuo de Cantor ([22]). Por lo tanto

$$D^A \backsimeq D^{A \setminus \mathbb{N}} \times D^{\mathbb{N}} \backsimeq D^{A \setminus \mathbb{N}} \times D^{\mathbb{N}} \times \omega \backsimeq D^A \times \omega$$

para todo conjunto infinito A (el cual suponemos contiene una copia de $\mathbb{N}$).

Ahora vamos a demostrar (c). Por (4.1), es suficiente ver que

$$c[X] \mid C(T, X). \tag{4.3}$$

Bajo las hipótesis de (c), $C(T, X)$ tiene estructura natural de espacio de Fréchet, esto es, admite una distancia invariante por traslaciones y completa, por lo tanto, por la proposición 4.1.1, es suficiente encontrar un subespacio Y de un cociente de $C(T, X)$ tal que $Y \backsimeq c[X]$. Como T es un espacio infinito de Hausdorff, existe una sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos no vacíos y disjuntos dos a dos en T. En cada U_n tomamos un punto t_n y sea

$$A = \overline{\{t_n : n \in \mathbb{N}\}}$$

La aplicación restricción $C(T, X) \to C(A, X)$ es suprayectiva y lineal. Por lo tanto $C(A, X)$ es isomorfo a un espacio cociente de $C(T, X)$. Definimos el operador lineal $u : c[X] \to C(A, X)$ por $u((x_n)) = f$ con $f(t_i) = x_i$ para $i \in \mathbb{N}$ y $f(t) = \text{lím}_m x_m$ para $t \in A \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tenemos que u es un embebimiento lineal. En efecto, la linealidad y la inyectividad son evidentes, ahora bien, si consideramos la función continua $\varphi : A \longrightarrow \omega$ definida por $\varphi(t_i) = i$ y $\varphi(t) = \infty$ para $t \in A \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, se tiene, para cada compacto K en A y cada abierto U en X que

$$u(V(\varphi(K), U)) = V(K, U) \cap u(c[X])$$

Y, por tanto que la aplicación es bicontinua.

Así pues, $Y \backsimeq u(c[X])$ es el subespacio deseado de un cociente de $C(T, X)$. □

4.2. El criterio de la descomposición

Sea X un espacio vectorial topológico. Recordemos que si X es de dimensión finita, $\text{Dens}(X)$ denota la dimensión algebraica de X, y si X es de dimensión infinita entonces $\text{Dens}(X) = \text{Wgh}(X)$, el peso topológico de X (que para un espacio metrizable coincide con el ínfimo de las cardinalidades de subconjuntos densos de X).

El resultado principal de esta sección es el siguiente

Teorema 4.2.1. *Sea X un espacio de Banach y sea A un conjunto tal que* $\text{Card}(A) = \text{Dens}(X)$. *Entonces $l_2(A) \mid X$ implica $X \backsimeq l_2(A)$.*

Combinando el teorema 4.2.1 y la proposición 4.1.1 tenemos

Corolario 4.2.2. *Si un espacio de Banach X contiene un subespacio o un cociente que es homeomorfo al espacio $l_2(A)$ para cierto conjunto A que verifique que* $\text{Card}(A) = \text{Dens}(X)$*, entonces X es homeomorfo a $l_2(A)$.*

Este corolario es una herramienta muy conveniente para reconocer espacios de Banach homeomorfos a espacios de Hilbert. Para la prueba del teorema 4.2.1 necesitaremos varios lemas.

Lema 4.2.3. *Sea A un conjunto infinito. Entonces*

$$\begin{array}{ll} (1) & C(D^A) \backsimeq C(D^A, C(D^A)) \\ (2) & l_1(A) \mid C(D^A). \end{array}$$

Demostración. Como A es infinito, existen conjuntos disjuntos A' y A'' tales que $A = A' \cup A''$ y $\mathrm{Card}(A') = \mathrm{Card}(A'') = \mathrm{Card}(A)$. Obviamente

$$C(D^A) \backsimeq C(D^{A' \cup A''}) \backsimeq C(D^{A'} \times D^{A''}) \backsimeq C(D^{A'}, C(D^{A''})) \backsimeq C(D^A, C(D^A)).$$

Para probar (2) observamos que, por la proposición 4.1.1, es suficiente encontrar un subespacio cerrado de $C(D^A)$ que sea isomorfo a $l_1(A)$. Para este fin, para cada $b \in A$, definimos un $f_b \in C(D^A)$ por la fórmula

$$f_b(s) = s(b) \qquad \text{para } s = (s(a))_{a \in A} \in D^A.$$

Como $f_b(s) \in D = \{-1, 1\}$, tenemos que $\|f_b\| = 1$. Por lo tanto, para todo subconjunto finito no vacío $A_0 \subset A$ y para cada sistema de escalares $(t_b)_{b \in A_0}$, tenemos

$$\left\| \sum_{b \in A_0} t_b f_b \right\| \leq \sum_{b \in A_0} |t_b|.$$

Por otro lado, si tomamos un $s \in D^A$ tal que $s(b) = \mathrm{sgn}\ t_b$ para $b \in A_0$, siempre que $t_b \neq 0$, tenemos

$$\left\| \sum_{b \in A_0} t_b f_b \right\| \geq \sum_{b \in A_0} t_b f_b(s) = \sum_{b \in A_0} |t_b|.$$

Luego

$$\left\| \sum_{b \in A_0} t_b f_b \right\| = \sum_{b \in A_0} |t_b|.$$

Esto muestra que la aplicación que lleva los vectores unitarios de $l_1(A)$ sobre las funciones f_b puede ser extendido a una isometría de $l_1(A)$ sobre $C(D^A)$. □

Lema 4.2.4. $C(D^A) \backsimeq l_1(A) \backsimeq l_2(A)$ *para todo conjunto infinito A.*

Demostración. Para probar que $l_1(A) \backsimeq C(D^A)$ aplicamos la proposición 4.1.5 con $T = D^A$, $X = l_1(A)$ e $Y = C(D^A)$. En este caso la condición (i) de la proposición 4.1.5 se sigue de la proposición 4.1.9(b), (iii) y la primera parte de (ii) se siguen del lema 4.2.3. La segunda parte de (ii), $C(D^A) \mid l_1(A)$, sigue del corolario 3.2.6 y del hecho de que $\mathrm{Dens}(C(D^A)) = \mathrm{Dens}(l_1(A)) = \mathrm{Card}(A)$ para todo conjunto infinito A.

Para ver que $l_2(A) \backsimeq l_1(A)$ Aplicamos el homeomorfismo de Mazur

$$(x(a))_{a\in A} \to (|x(a)|^2 \operatorname{sgn}\ x(a))_{a\in A}$$

para cada $(x(a))_{a\in A} \in l_2(A)$. Es un ejercicio sencillo que dejamos para el lector probar que es, en efecto, un homeomorfismo. □

Demostración del teorema 4.2.1. En el caso en que la dimensión de X es finita la afirmación es evidente. Así que supongamos que el espacio X es de dimensión infinita. Si $l_2(A) \mid X$ por el lema 4.2.4, $C(D^A) \mid X$. Así, por el lema 4.2.4 y la proposición 4.1.9(b), la terna $T = D^A$, $Y = l_1(A) \backsimeq C(D^A)$ y X satisface las condiciones de la proposición 4.1.5: (i) y (iii) y la segunda parte de (ii). Por la proposición 4.1.5, para completar la prueba del teorema 4.2.1, es suficiente verificar la primera parte de (ii), i.e., el siguiente lema. □

Lema 4.2.5. *Si X es un espacio de Banach infinito-dimensional y A es un conjunto de forma que* $\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Dens}(X)$*, entonces $X \mid C(D^A)$.*

Demostración. La conclusión se sigue del corolario 3.2.6, que establece que $X \mid l_1(A)$, y del lema 4.2.4 que establece que $l_1(A) \backsimeq C(D^A)$. Esto deja probado el teorema 4.2.1. □

A modo de curiosidad se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2.6. *Si A es infinito, entonces $l_2(A) \backsimeq (l_2(A))^{\mathbb{N}}$.*

4.3. Bases transfinitas de proyecciones

En esta sección y en las dos siguientes las letras griegas (excepto ε) denotarán a números ordinales; $[\xi] = [1;\xi)$, el intervalo de números ordinales visto como espacio topológico, donde la topología viene inducida por el orden, de forma que los ordinales sucesores son puntos aislados y una base para un ordinal límite α serían los subconjuntos de la forma $[\beta, \alpha]$ para cualquier $\beta < \alpha$.

Con la expresión $\tau_n \uparrow \tau$ significará que $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ es una sucesión de ordinales que cumple $\lim_n \tau_n = \tau$.

Dado X un espacio de Banach. Si $A \subset X^*$ entonces $A^\perp = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ para todo } f \in A\}$ se denomina el anulador de A.

Definición 4.3.1. *Una* base de proyecciones de tipo ξ *en el espacio X es una sucesión transfinita $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ de proyecciones lineales continuas $s_\tau : X \longrightarrow X$ que verifican las siguientes condiciones:*

(i) $\sup\{\|s_\tau\| : \tau \leq \xi\} < \infty$

(ii) Para cada x fijo, la función $\tau \to s_\tau(x)$ es continua.

(iii) $s_1(x) \equiv 0$, $s_\xi(x) = x$, $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha = s_\alpha$ *para* $\alpha \leq \beta$.

(iv) Para cada $\tau < \xi$, *el operador* $s_{\tau+1} - s_\tau$ *es 1-dimensional. Es decir:*

$$s_{\tau+1}(x) - s_\tau(x) = f_\tau(x)x_\tau \quad \textit{donde} \;\; x_\tau \in X,\, f_\tau \in X^*.$$

Un sistema $(x_\tau, f_\tau)_{\tau<\xi}$ *que satisface esta última condición se denomina* sistema biortogonal asociado a la base $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$. *Las* proyecciones complementarias de la base$(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ *son los operadores* $r_\tau : X \to X$ *dada por* $r_\tau(x) = x - s_\tau(x)$ *para* $x \in X$.

La condición (i) es en realidad superflua como consecuencia de la condición (ii) y del teorema de Banach-Steinhaus, en efecto, si no se cumpliese (i) existiría $\tau_n \uparrow \tau$ con $\|s_{\tau_n}(x)\|$ divergiendo, pero $s_{\tau_n}(x)$ converge a $s_\tau(x)$ y $\|s_\tau(x)\| < \infty$, que supondría una contradicción.

Observemos también que toda base de proyecciones admite un sistema biortogonal asociado $(x_\tau, f_\tau)_{\tau<\xi}$; los elementos x_τ y los funcionales f_τ están unívocamente determinados, salvo multiplicación por escalares.

Ejemplo 4.3.2. *Sea* X *un espacio de Banach infinito dimensional y separable con una base de Schauder* $(x_n)_n$, *y sea* $(f_n)_n$ *la sucesión de funcionales coeficientes de la base. Entonces el sistema de operadores* $(s_\tau)_{\tau\leq\omega}$, *con* $s_1 \equiv 0$, $s_\tau(x) = \sum_{n<\tau} f_n(x)x_n$ *es una base de proyecciones para* X.

Ejemplo 4.3.3. *Sea* X *uno de los espacios* $c_0([\xi])$ *o* $l_p([\xi])$ *con* $1 \leq p < \infty$. *Los vectores de* X *son sucesiones transfinitas* $x = (a_\alpha)_{\alpha\leq\xi}$ *de números reales tales que* $\mathrm{Card}(\{\alpha : a_\alpha \neq 0\}) \leq \aleph_0$ *y* $\|x\| = sup_{\alpha<\xi}|a_\alpha| < \infty$ *para* $X = c_0([\xi])$, $\|x\| = (\sum_{\alpha<\xi} |a_\alpha|^p)^{1/p} < \infty$ *para* $X = l_p([\xi])$. *El sistema de operadores* $(s_\tau)_{\tau<\xi}$ *definido por* $s_\tau((a_\alpha)_{\alpha<\xi}) = (b_\alpha)_{\alpha<\xi}$, *donde* $b_\alpha = a_\alpha$ *para* $\alpha < \tau$ *y* $b_\alpha = 0$ *para* $\alpha \geq \tau$, *es una base de proyecciones para* X.

Debería ser mencionado aquí que el espacio $l_\infty([\xi])$ para $\mathrm{Card}(\xi) \geq \aleph_0$ no tiene base de proyecciones. Esto sigue del hecho de que ningún subespacio separable de $l_\infty([\xi])$ está complementado, ver [25] o [11].

Proposición 4.3.4. *Si* $(x_\tau)_{\tau<\xi}$ *es una sucesión transfinita de vectores en* X *no nulos con la propiedad de que* $\overline{\mathrm{span}}\{x_\tau : \tau < \xi\} = X$ *y, para* $\tau < \xi$, *tenemos*

$$(1) \quad \|x + x_\tau\| \geq \|x\| \;\; \textit{para todo} x \in \overline{\mathrm{span}}\{x_\vartheta : \vartheta \in [\tau]\},$$

entonces existe una base de proyecciones $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ *tal que* $x_\tau \in Im(s_{\tau+1} - s_\tau)$ *para todo* $\tau < \xi$.

Demostración. Supongamos que $(x_\tau)_{\tau\leq\xi}$ satisface (1); es entonces evidente que los vectores x_τ son linealmente independientes. Sea

$$Z = \mathrm{span}\{x_\tau : \tau < \xi\}$$

Para una combinación lineal $x = t_1 x_{\tau_1} + t_2 x_{\tau_2} + \cdots + t_n x_{\tau_n}$, definimos $s_\tau(x) = \sum_{\tau_i < \tau} t_i x_{\tau_i}$. Cada operador $s_\tau : Z \to Z$ es una proyección de norma 1. Por lo tanto s_τ puede ser extendida de forma única, por continuidad, a una proyección $s_\tau : X \to X$. El sistema $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ satisface las condiciones de la definición 4.3.1. En efecto, las condiciones (iii) y (iv) son triviales y la condición (ii) de la que se deduce, como dijimos, la condición (i) se sigue del hecho de que la función $g(x, \tau) = s_\tau(x)$ satisface la condición de Lipchitz con respecto a x con la misma constante 1 para todo τ,

$$\|g(x,\tau) - g(y,\tau)\| = \|s_\tau(x-y)\| \leq \|x-y\|$$

y de que es obviamente continua en τ para cada x en el subconjunto denso Z de X,puesto que en el único caso no trivial en el que τ sea un ordinal límite, existe un cierto ordinal $\beta_0 < \tau$ tal que $s_\tau(x) = s_\beta(x)$ para todo $\beta_0 \leq \beta < \tau$.

En efecto, fijado $x \in X$, si $x \in Z$ es directo, y si $x \notin Z$ entonces, fijado τ un ordinal límite, para cada $\varepsilon > 0$ existe un cierto $z \in Z$ tal que $\|x - z\| < \varepsilon/3$ y un cierto β_0 de forma que para todo β que satisfaga $\beta_0 \leq \beta < \tau$ entonces $\|g(x,\tau) - g(z,\beta)\| \leq \varepsilon/3$. Pero, entonces

$$\begin{aligned} \|g(x,\tau) - g(x,\beta)\| &\leq \|g(x,\tau) - g(z,\tau)\| + \|g(z,\tau) - g(z,\beta)\| + \|g(z,\beta) - g(x,\beta)\| \\ &\leq 2\|x - z\| + \varepsilon/3 < \varepsilon, \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

Definición 4.3.5. *Una base de proyecciones $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ en X se dice* completamente acotada*, siempre que para cualesquiera sucesiones $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ordinales e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X, la condición*

$$(2) \quad \tau_n \uparrow \tau, \quad s_{\tau_k}(y_n) = y_k \quad \textit{para } k \leq n, \ \sup_n \|y_n\| < \infty$$

implica que existe $y = \lim_n y_n$.

La base de proyecciones $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ se dice que es ortogonal*, si, para cualesquiera $\alpha < \beta \leq \xi$, tenemos $\|s_\beta r_\alpha(x)\| \leq \|x\|$, y $\|s_\beta r_\alpha(x)\| < \|x\|$ salvo que $x = s_\beta r_\alpha(x)$.*

La propiedad de $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ de ser completamente acotada no depende de la elección de la norma $\|\cdot\|$ del espacio X, mientras que la ortogonalidad aparentemente si depende.

Proposición 4.3.6. *Si $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ es una base de proyecciones en un espacio de Banach X, entonces X admite una norma equivalente $\|\cdot\|$ tal que la base $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ es ortogonal respecto de $\|\cdot\|$.*

Demostración. Sea $\|\cdot\|_0$ la norma original en X. Sea $(x_\tau, f_\tau)_{\tau < \xi}$ el sistema biortogonal asociado a la base y tal que $\|x_\tau\|_0 = 1$ para todo τ. Usando (ii), concluimos que, para cada $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$\{\tau \in [\xi] : \|s_{\tau+1}(x) - s_\tau(x)\| \geq \varepsilon\} = \{\tau \in [\xi] : |f_\tau(x)| \geq \varepsilon\}$$

es finito, en efecto, si no lo fuera existiría una sucesión τ_n de ordinales con $\tau_n \uparrow \tau = \sup_n \tau_n$ y con $\|s_{\tau_n+1}(x) - s_{\tau_n}(x)\| \geq \varepsilon$ para todo $n < \omega$. Luego $s_{\tau_n}(x)$ no puede converger, lo que contradice (ii). Por lo tanto el conjunto de ordinales τ para los que $f_\tau(x) \neq 0$ puede ser ordenado en una sucesión $(\tau(n,x))_{n<\omega}$ tal que

$$|f_{\tau(1,x)}(x)| \geq |f_{\tau(2,x)}(x)| \geq \dots$$

definimos

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \sup_{\alpha<\beta\leq\xi} \|s_\beta r_\alpha(x)\|_0 \,, \\ \|x\|_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_{\tau(n,x)}(x)| \qquad \text{y} \\ \|x\| &= \|x\|_2 + \|x\|_1 \,. \end{aligned}$$

Por la definición 4.3.1 (i) concluimos que la norma $\|\cdot\|_1$ es equivalente a la norma original. En efecto. En primer lugar si tomamos $\beta = \xi$ y $\alpha = 1$ entonces se tiene que uno de los valores sobre los que se toma el supremo en la definición de $\|\cdot\|_1$ es exactamente $\|x\|_0$, luego $\|x\|_1 \geq \|x\|_0$.

Por otro lado, si llamamos

$$M = \sup\{\|s_\tau\|_0 : \tau \leq \xi\}$$

tenemos

$$\|s_\beta r_\alpha(x)\|_0 \leq \|s_\beta\|_0 \, \|r_\alpha\|_0 \, \|x\|_0 \leq M(1+M) \, \|x\|_0 \,.$$

Luego $\|x\|_1 \leq M(1+M)\,\|x\|_0$.

Es también fácil ver que $\|\cdot\|_2$ es una norma continua, en general no equivalente, en X. En efecto

$$\|x\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |f_{\tau(n,x)}(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left\|f_{\tau(n,x)}\right\|_0 \|x\|_0 \leq 2M \, \|x\|_0$$

puesto que

$$\sup_{\tau\in[\xi],\, x\in B_X} |f_\tau(x)| = \sup_{\tau\in[\xi],\, x\in B_X} |f_\tau(x) x_\tau| \leq 2 \sup_{\tau\in[\xi]} \{\|s_\tau\|\} = 2M$$

Además, se comprueba que, para todo $x \in X$, $\alpha < \beta \leq \xi$,

(3) $\quad \|s_\beta r_\alpha(x)\|_i \leq \|x\|_i$ para $i = 1, 2$.

(4) $\quad \|s_\beta r_\alpha(x)\|_2 < \|x\|_2$ si $x \neq s_\beta r_\alpha(x)$.

Por lo tanto, $\|\cdot\|$ es una norma equivalente en X que hace a la base $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ ortogonal. □

Observación 4.3.7. *Si $X = c_0([\xi])$, entonces la norma $\|\cdot\|_2$ es equivalente a la norma original de supremo. La base natural, vista en el ejemplo 4.3.3, es ortogonal, en la norma $\|\cdot\|_2$ y la bola unidad cerrada en la norma $\|\cdot\|_2$ es estrictamente convexa (ver [7]).*

Proposición 4.3.8. *Si X es un espacio de Banach reflexivo, toda base de proyecciones $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ en X es completamente acotado.*

Para la prueba necesitamos dos lemas relacionados con Bases de Schauder.

Lema 4.3.9. *Si X es un espacio de Banach separable reflexivo con una base de Schauder $(x_n)_{n<\omega}$, entonces el sistema de funcionales coeficientes $(f_n)_{n<\omega}$ constituye una base de Schauder en X^*.*

Demostración. Por la proposición 4.3.6, podemos suponer que la base de proyecciones de las sumas parciales es ortogonal, y en particular

$$(5) \qquad \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} t_i x_i\right\| \qquad \text{para todo } n < m \text{ y } t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que $f = t_1 f_1 + \cdots + t_n f_n$ y $g = t_1 f_1 + \cdots + t_m f_m$, $n < m$. Por (5), comprobamos que

$$\begin{aligned} \|g\| &= \sup\{g(x) : \|x\| \leq 1\} = \sup\{g(x) : x \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_m\}, \|x\| \leq 1\} \\ &\geq \sup\{g(x) : x \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}, \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{f(x) : x \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}, \|x\| \leq 1\} = \|f\|. \end{aligned}$$

Así, la condición (5) se satisface si sustituimos los x_i por f_i. Por lo tanto, por la proposición 1.2.8, $(f_n)_{n<\omega}$ es una base de Schauder del espacio de Banach $Z = \overline{\operatorname{span}}\{f_n : n < \omega\}$. De la reflexividad de X se sigue que $Z = X^*$. En efecto, si $X^* \setminus Z \neq \emptyset$, entonces existiría $F \in X^{**}$ distinta de cero y tal que $F(f_i) = 0$ para $i < \omega$. Como X es reflexivo, $F = \pi(x)$ para cierto $x \in X$. De donde, $0 = F(f_i) = f_i(x)$ para todo $i < \omega$. Así $x = 0$ y, por tanto, $F = 0$ que constituye una contradicción. □

Lema 4.3.10. *Sea X un espacio de Banach separable y reflexivo con una base de Schauder $(x_i)_{i<\omega}$. Entonces toda serie*

$$\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$$

tal que

$$\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right\| < \infty$$

es convergente.

Demostración. Supongamos que $C = \sup_n \|\sum_{i=1}^n t_i x_i\| < \infty$. Sea $f \in X^*$. Tenemos

$$(6) \qquad \left|\sum_{i=n}^{m} t_i f(x_i)\right| \leq \left|f\left(\sum_{i=n}^{m} t_i x_i\right)\right| \leq 2C \cdot M_n(f),$$

donde

$$M_n(f) = \sup\{f(y) : y \in \operatorname{span}\{x_i : i \geq n\}, \ \|y\| \leq 1\}.$$

Puesto que

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} t_i f(x_i)\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} t_i f(x_i)\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{n-1} t_i f(x_i)\right\| \leq 2C.$$

Por el lema 4.3.9, tenemos que $f = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) f_i$ en la topología de la norma de X^*, de donde $M_n(f) \leq \|\sum_{i=n}^{\infty} f(x_i) f_i\|$, y por lo tanto, $\lim_n M_n(f) = 0$. Así pues, por (6), $F(f) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i f(x_i)$ existe para cada $f \in X^*$, y $F \in X^{**}$. Por la reflexividad de X, existe un $x_F \in X$ de modo que $F(f) = f(x_F)$ para todo $f \in X^*$, en particular $f_i(x_F) = F(f_i) = t_i$. Esto implica que $x_F = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ con lo que acabamos la prueba. □

Demostración de la proposición 4.3.8. Sea $(s_\tau)_{\tau<\xi}$ una base de proyecciones en el espacio X. Supongamos que $\tau_n \uparrow \tau$ y que $(y_k)_{k<\omega}$ es una sucesión acotada en X con $s_{\tau_k}(y_n) = y_k$ para $n \geq k$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $y_1 = 0$ e $y_{n+1} \neq y_n$ para todo $n < \omega$. Es sencillo probar que la sucesión $z_n = y_{n+1} - y_n$ es una base de Schauder en el espacio $Z = \overline{\text{span}}\{z_n : n < \omega\}$. En efecto, dados $t_1, \ldots, t_m$ arbitrarios, y suponiendo $n \leq m$ se tiene que

$$s_{\tau_{n+1}}\left(\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{m} t_i s_{\tau_{n+1}}(z_i) = \sum_{i=1}^{n} t_i z_i.$$

puesto que $s_{\tau_{n+1}}(y_i) = z_i$ si $i \leq n$ y $s_{\tau_{n+1}}(y_i) = 0$ en otro caso. Luego

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} t_i z_i\right\| = \left\|s_{\tau_{n+1}}\Big(\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\Big)\right\| \leq \left\|s_{\tau_{n+1}}\right\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\right\| \leq \sup_n \|s_{\tau_n}\| \cdot \left\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\right\|.$$

Como todo subespacio cerrado de un Banach reflexivo es Banach reflexivo, Z es reflexivo, luego por el lema 4.3.10 la base de Schauder $(z_n)_{n<\omega}$ es completamente acotada. Así, $\lim_k y_k = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$ existe, es decir, la base de proyecciones original $(s_\tau)_{\tau<\xi}$ es completamente acotada. □

Teorema 4.3.11. *Todo espacio de Banach infinito-dimensional y reflexivo X contiene un subespacio cerrado infinito-dimensional Y con una base de proyecciones completamente acotada de tipo ξ, donde ξ es el menor ordinal de cardinalidad* $\text{Dens}(X)$.

En primer lugar necesitaremos un lema

Lema 4.3.12. *Sea X un espacio de Banach no separable. Si, para cada $B \subset X^*$ de forma que* $\text{Card}(B) < \text{Dens}(X)$, *existe un $x \in B^\perp$, $x \neq 0$, entonces el espacio X tiene un subespacio cerrado Y que posee una base de proyecciones de tipo ξ, el primer ordinal de cardinalidad* $\text{Dens}(X)$.

Demostración. Sea x_1 un vector arbitrario en $X \setminus \{0\}$. Supongamos que hemos elegido vectores $(x_\tau)_{\tau<\alpha}$ para cierto $\alpha < \xi$. Sea A_α el conjunto de todas las combinaciones lineales racionales de los vectores $(x_\tau)_{\tau<\alpha}$. Por el teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in A_\alpha$, existe un $f_x \in X^*$, $\|f_x\| = 1$ tal que $f_x(x) = \|x\|$. Sea $B_\alpha = \{f_x : x \in A_\alpha\}$. Tenemos

$$\text{Card}(B_\alpha) = \text{Card}(A_\alpha) \leq \aleph_0 \cdot \text{Card}(\alpha) < \text{Dens}(X).$$

Por lo tanto, por la hipótesis del lema, existe $x_\alpha \in B_\alpha^\perp \setminus \{0\}$. Para cada $u \in A_\alpha$, tenemos

$$\|u + x_\alpha\| \geq f_u(u + x_\alpha) = f_u(u) = \|u\|,$$

y como A_α es denso en $\overline{\text{span}}\{x_\tau : \tau < \alpha\}$, los vectores $(x_\tau)_{\tau \leq \alpha}$ cumplen la condición (1) de la proposición 4.3.4. Considerando el subespacio cerrado $Y = \overline{\text{span}}\{x_\tau : \tau < \xi\}$, acabamos la prueba. □

Demostración del teorema 4.3.11. Por la proposición 4.3.8 y el hecho de que todo subespacio cerrado de X es reflexivo, el problema se reduce a la construcción de una base de proyecciones de tipo ξ, con ξ el primer ordinal de cardinalidad $\text{Dens}(X)$, en un subespacio de X. El caso separable ya ha sido probado en la proposición 3.5.1.

Asumamos que X es no separable. Por la reflexividad de X se tiene que $\text{Dens}(X) = \text{Dens}(X^*)$. Sea ahora $B \subset X^*$ con $\text{Card}(B) < \text{Dens}(X)$. Como $\text{Dens}(X) > \aleph_0$, podemos concluir que $\text{Dens}(\overline{\text{span}\, B}) < \text{Dens}(X) = \text{Dens}(X^*)$, de donde $\overline{\text{span}\, B}$ es un subespacio propio de X^*. Así, por el teorema de Hahn-Banach y la reflexividad de X, existe $x \in X$, $x \neq 0$, tal que $x \in \overline{\text{span}\, B}^\perp \subset B^\perp$, i.e, x satisface las hipótesis del lema 4.3.12 y hemos terminado. □

4.4. El teorema Central

En esta sección aplicaremos los resultados de las secciones anteriores para establecer el siguiente resultado:

Teorema 4.4.1. *Sea X un espacio de Banach infinito dimensional y reflexivo. Entonces X es homeomorfo al espacio $l_1([\xi])$, donde ξ es el primer ordinal de cardinalidad* $\text{Dens}(X)$.

Como, el espacio de Hilbert $l_2([\xi])$ es reflexivo y por lo tanto homeomorfo a $l_1([\xi])$, obtenemos

Corolario 4.4.2. *Todo espacio de Banach reflexivo es homeomorfo a un espacio de Hilbert.*

Alternativamente, el corolario 4.4.2 se sigue del teorema 4.4.1 y del lema 4.2.4.

Demostración del teorema 4.4.1. Por el teorema 4.3.11, el espacio X tiene un subespacio cerrado Y con una base de proyecciones completamente acotada $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$. Por la proposición 4.3.6, podemos suponer además que la base $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ es ortogonal. Por lo tanto, de acuerdo con el corolario 4.2.2, es suficiente con probar que $Y \backsimeq l_1([\xi])$. Así el teorema 4.4.1 es una consecuencia de la siguiente proposición. □

Proposición 4.4.3. *Si X es un espacio de Banach con una base de proyecciones $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$ ortogonal y completamente acotada, entonces $X \backsimeq l_1([\xi])$. El homeomorfismo $h : X \to l_1([\xi])$ queda descrito* *por las siguientes expresiones*

$$(1) \qquad \overline{b}(x,y) = \|x\|\,\|y\| + \sum_{\tau<\xi}(\|s_{\tau+1}(y)\| - \|s_\tau(y)\|)\cdot\|r_{\tau+1}(x)\|\,,$$

$$(2) \qquad b(x) = \overline{b}(x,x),$$

$$(3) \qquad h(x) = ((bs_{\tau+1}(x) - bs_\tau(x))\cdot \operatorname{sgn}\ f_\tau(x))_{\tau<\xi} \in l_1([\xi]).$$

En las fórmulas, $x,\ y \in X$, $r_\tau(x) = x - s_\tau(x)$, las proyecciones complementarias, y f_τ son los funcionales coeficientes del sistema biortogonal $(x_\tau, f_\tau)_{\tau<\xi}$ asociado a las base $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$.

La prueba de la proposición 4.4.3 se basa en varios lemas. En cada uno de ellos las hipótesis relacionadas con $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ y la notación son las mismas que en la proposición.

Lema 4.4.4. *La función $\overline{b}(x,y)$ es una norma respecto de cada variable, si la otra se fija de forma no nula. Más aún*

$$(4) \qquad \|x\|\,\|y\| \leq \overline{b}(x,y) \leq 2\cdot\|x\|\,\|y\| \qquad \textit{para todo } x,\ y \in X.$$

Demostración. Por la ortogonalidad de la base $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ tenemos que

$$\|s_{\tau+1}(y)\| - \|s_\tau(y)\| \geq 0 \qquad \text{para todo } y \in X,\ \tau < \xi,$$

y por lo tanto

$$\sum_{\tau<\xi}(\|s_{\tau+1}(y)\| - \|s_\tau(y)\|) = \|s_\xi(y)\| = \|y\|\,.$$

En efecto, si para cada subconjunto F finito de $[\xi]$ y para cada $x \in X$, definimos $\phi_F(x)$ como la suma finita $\sum_{\tau\in F}(\|s_{\tau+1}(x)\| - \|s_\tau(x)\|)$, entonces, dado un subconjunto finito $F = \{\tau_1 < \ldots < \tau_n\}$, gracias a la ortogonalidad, se tiene

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad \|s_{\tau_1}(y)\| - \|s_1(y)\| \geq 0\\
&(b_i) \qquad \left\|s_{\tau_{i+1}}(y)\right\| - \|s_{\tau_i+1}(y)\| \geq 0 \qquad \text{para } i = 1,\ldots,n-1.\\
&(c) \qquad \|s_\xi(y)\| - \|s_{\tau_n+1}(y)\| \geq 0.
\end{aligned}$$

y, por tanto

$$\phi_F(y) = \sum_{k=1}^{n}(\|s_{\tau_k+1}(y)\| - \|s_{\tau_k}(y)\|) \leq \phi_F(y) + (a) + (b_1) + \cdots + (b_{n-1}) + (c) = \|s_\xi(y)\|$$

Luego, la serie anterior es sumable y su suma es menor o igual que $\|s_\xi(y)\|$. Por tanto, existen a lo más una cantidad numerable de sumandos no nulos, correspondientes a los ordinales $\{\tau_n\}$. Llamemos C al valor de esa suma. Es sencillo probar que la suma parcial de los n primeros sumandos no nulos es $C_n = \|s_{\tau_n+1}(y)\|$.

Ahora bien, si el supremo $\tau = \sup_n \tau_n$ no es un ordinal límite, entonces $C = \|s_{\tau+1}(y)\| = \|s_\xi(y)\|$. Y si τ es un ordinal límite, entonces se tiene que $C = \|s_\tau(y)\|$, pero, entonces $\|s_\xi(y)\| = \|s_\tau(y)\| = C$.

Así, concluimos que, para cualquier $y \neq 0$ fijo,$\overline{b}(\cdot, y)$ es una norma y, aún más, $\overline{b}(x, y)$ satisface

$$\|x\| \, \|y\| \leq \overline{b}(x, y) \leq \|y\| \, (\|x\| + \sup_\tau \|r_{\tau+1}(x)\|) \leq 2 \, \|x\| \, \|y\|$$

donde la última desigualdad es debida a la ortogonalidad de la base.

Usando la continuidad de la función $\tau \to s_\tau(x)$ y $\tau \to r_\tau(x)$ y la ortogonalidad de la base, se establece fácilmente, por inducción transfinita, el siguiente análogo transfinito de la clásica fórmula transformación de Abel:

$$\overline{b}(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| + \sum_{2 \leq \alpha < \xi} \|s_\alpha(y)\| \cdot (\|r_\alpha(x)\| - \|r_{\alpha+1}(x)\|).$$

Combinando esta fórmula con el hecho de que la base $(s_\tau)_{\tau \leq \xi}$es ortogonal, obtenemos que $\overline{b}(x, y)$es una norma con respecto a y para cualquier $x \neq 0$ fijo. □

Observación 4.4.5. *Notemos que para cada $x \neq 0$ y para cada $y \neq 0$, $\overline{b}$ supone una norma equivalente a la original, $\|\cdot\|$.*

Lema 4.4.6. *Si $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores de X entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

($\star$) $\lim_k y_k = y_1$*;*

($\star\star$) $\lim_k bs_\tau(y_k) = bs_\tau(y_1)$ *para* $\tau \leq \xi$ *y* $\lim_k \operatorname{sgn} \ f_\tau(y_k) = \operatorname{sgn} \ f_\tau(y_1)$*, siempre que* $f_\tau(y_1) \neq 0$*.*

Demostración. Por el lema 4.4.4, podemos escribir

$$\begin{aligned} |b(x) - b(y)| &= \left|\overline{b}(x, x) - \overline{b}(y, y)\right| \leq \left|\overline{b}(x, x) - \overline{b}(x, y)\right| + \left|\overline{b}(x, y) - \overline{b}(y, y)\right| \\ &\leq \overline{b}(x, x - y) + \overline{b}(x - y, y) \leq 2 \, \|x - y\| \, (\|x\| + \|y\|) \end{aligned}$$

Luego, b es una función continua. Esto demuestra la implicación $(\star) \Rightarrow (\star\star)$.

Vamos a probar ahora la implicación opuesta. Supongamos que se satisface $(\star\star)$. La condición $(\star)$ es equivalente a la condición

$$(5_\tau) \qquad \lim_k s_\tau(y_k) = s_\tau(y_1)$$

para $\tau = \xi$. Lo probaremos por inducción transfinita respecto de τ.

Obsérvese que (5_1) se satisface: $s_1(y_k) = 0 = s_1(y_1)$.

Ahora asumimos que (5_τ) es cierto para algún $\tau < \xi$, hemos de mostrar que se satisface $(5_{\tau+1})$. Por (5_τ) y por $(\star\star)$, tenemos

$$bs_{\tau+1}(y_1) = \lim_k bs_{\tau+1}(y_k) = \lim_k b(s_\tau(y_k) + f_\tau(y_k)x_\tau)$$

donde los x_τ han sido elegidos de forma que son unitarios. Como $b(z) \geq \|z\|^2$, concluimos que la sucesión $(f_\tau(y_k))$ está acotada, ya que

$$|f_\tau(y_k)|^2 = \|f_\tau(y_k)x_\tau\|^2 \leq \|s_{\tau+1}(y_k)\|^2 \leq bs_{\tau+1}(y_k)$$

y cada uno de sus puntos de aglomeración t_0 satisface la ecuación

$$b(s_\tau(y_1) + t_0 x_\tau) = b(s_\tau(y_1) + f_\tau(y_1)x_\tau).$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $t_0 = f_\tau(y_1)$. De la ortogonalidad de la base se sigue que la función $g(t) = b(s_\tau(y_1) + tx_\tau)$ es estrictamente creciente para $t \geq 0$ y estrictamente decreciente para $t \leq 0$. Por lo tanto existen como mucho dos soluciones de la ecuación de arriba, y éstas tienen que ser de signos contrarios. Si $f_\tau(y_1) = 0$, la única solución es $t_0 = 0$, de otra forma, por la segunda condición de $(\star\star)$, $\operatorname{sgn}\ t_0 = \operatorname{sgn}\ f_\tau(y_1)$, es decir el punto de aglomeración t_0 es único, y $\lim_k f_\tau(y_k) = t_0 = f_\tau(y_1)$, y por lo tanto

$$\lim_k s_{\tau+1}(y_k) = \lim_k (s_\tau(y_k) + f_\tau(y_k)x_\tau) = s_\tau(y_1) + f_\tau(y_1)x_\tau = s_{\tau+1}(y_1),$$

que es exactamente $(5_{\tau+1})$.

Finalmente, supondremos que β es un ordinal límite $\leq \xi$ y que (5_τ) se satisface para todo $\tau < \beta$. Veremos que esta hipótesis junto con $(\star\star)$ implica (5_β). En primer lugar estableceremos ciertas propiedades:(A),(B),(C) y (D) de la sucesión

$$u_k = s_\beta(y_k),\ k < \omega$$

Como $s_\alpha r_\tau(u_k) = s_\alpha(u_k) - s_\tau(u_k) = s_\alpha(y_k) - s_\tau(y_k)$ para $\tau < \alpha < \beta$, por hipótesis de inducción

$$(6) \qquad \lim_k s_\alpha r_\tau(u_k) = s_\alpha r_\tau(u_1) \quad \text{para } \tau \leq \alpha < \beta.$$

Por la condición (ii) de la definición de base de proyecciones aplicada a $r_\tau(u_1)$ y a ξ, fijado τ y $\varepsilon > 0$ existe un cierto $\alpha(\varepsilon, \tau)$ tal que

$$\|s_\alpha r_\tau(u_1)\| + \varepsilon \geq \|r_\tau(u_1)\| \quad \text{para } \alpha > \alpha(\varepsilon, \tau),$$

y como β es un ordinal límite y $s_\beta r_\tau(u_1) = r_\tau s_\beta(u_1) = r_\tau s_\beta(y_1) = r_\tau(u_1)$, podemos suponer que

$$\alpha(\varepsilon, \tau) < \beta.$$

Por (6), para cualquier $\varepsilon > 0$,α y τ, con $\tau \leq \alpha < \beta$ existe un índice $k(\alpha, \tau, \varepsilon)$ tal que

$$\|s_\alpha r_\tau(u_1)\| \leq \|s_\alpha r_\tau(u_k)\| + \varepsilon \leq \|r_\tau(u_k)\| + \varepsilon \quad \text{para } k > k(\alpha, \tau, \varepsilon)$$

(la segunda de estas desigualdades se sigue de la ortogonalidad de la base de proyecciones). Por lo tanto

$$\|r_\tau(u_1)\| \leq \|r_\tau(u_k)\| + 2\varepsilon \quad \text{para } k > k(\alpha(\varepsilon, \tau), \tau, \varepsilon).$$

Esto establece la siguiente propiedad

$$(A) \qquad \|r_\tau(u_1)\| \leq \liminf_k \|r_\tau(u_k)\| \qquad \text{para } \tau < \beta.$$

Por $(\star\star)$ la sucesión $b(u_k) = bs_\beta(y_k)$ está acotada. Por el lema 4.4.4, $M = \sup_k \|u_k\| < \infty$, y

$$0 \leq \overline{b}(u_k, s_\alpha(u_k) - s_\alpha(u_1)) \leq 2M \|s_\alpha(u_k) - s_\alpha(u_1)\|$$

Por lo tanto, por la hipótesis de inducción (5_α), tenemos

$$(B) \qquad \lim_k \overline{b}(u_k, s_\alpha(u_k) - s_\alpha(u_1)) = 0 \qquad \text{para } \alpha < \beta.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos un $\alpha < \beta$ tal que

$$b(u_1) = b(s_\beta(u_1)) \leq \overline{b}(u_1, s_\alpha(u_1)) + \varepsilon$$

Esto se puede hacer gracias a la continuidad de la función que a cada τ le asigna $s_\tau(u_1)$ y porque $\overline{b}(u_k, u_k) \geq \overline{b}(u_k, s_{alpha}(u_k))$ para todo k. Por (1), (A) y (B), tenemos

$$\begin{aligned} b(u_1) &\leq \varepsilon + \overline{b}(u_1, s_\alpha(u_1)) \leq \varepsilon + \liminf_k \overline{b}(u_k, s_\alpha(u_1)) \\ &\leq \varepsilon + \liminf_k (\overline{b}(u_k, s_\alpha(u_k)) + \overline{b}(u_k, s_\alpha(u_k) - s_\alpha(u_1))) \\ &= \varepsilon + \liminf_k \overline{b}(u_k, s_\alpha(u_k)) + 0 \leq \varepsilon + \lim_k \overline{b}(u_k, u_k) = \varepsilon + b(u_1). \end{aligned}$$

Como es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$, obtenemos

$$(C) \qquad \lim_k \overline{b}(u_k, u_1) = \overline{b}(u_1, u_1).$$

Ahora estableceremos la última propiedad

$$(D) \qquad \lim_k \|r_{\tau+1}(u_k)\| = \|r_{\tau+1}(u_1)\|, \quad \text{siempre que} \quad \|s_\tau(u_1)\| < \|s_{\tau+1}(u_1)\|.$$

En efecto, supongamos que $\|s_\tau(u_1)\| < \|s_{\tau+1}(u_1)\|$ y que

$$(7) \qquad \liminf_k \|r_{\tau+1}(u_k)\| > \|r_{\tau+1}(u_1)\|.$$

Usando (A) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \liminf_k \overline{b}(u_k, u_1) &\geq \liminf_k \sum_{\tau \neq \alpha} (\|s_{\tau+1}(u_1)\| - \|s_\tau(u_1)\|) \cdot \|r_{\tau+1}(u_k)\| \\ &+ \liminf_k (\|s_{\alpha+1}(u_1)\| - \|s_\alpha(u_1)\|) \cdot \|r_{\alpha+1}(u_k)\| \\ &+ \liminf_k \|r_1(u_k)\| \cdot \|u_1\| > b(u_1), \end{aligned}$$

lo que contradice (C). Así, la desigualdad (7) es falsa. Por lo tanto, usando (A), obtenemos

$$\|r_{\tau+1}(u_1)\| = \liminf_k \|r_{\tau+1}(u_k)\|$$

Como nuestro argumento es válido para una subsucesión arbitraria de la sucesión (u_k), el límite inferior de la expresión anterior puede cambiarse por límite. Así, tenemos (D).

Ahora estamos listos para establecer el resultado (5_β). Denotamos

$$\alpha = \inf\{\tau : s_\tau(y_1) = s_\beta(y1)\}.$$

Si α es un sucesor: $\alpha = \delta + 1$, entonces $\alpha < \beta$, puesto que β se ha supuesto un ordinal límite. Por tanto, por la hipótesis de inducción (5_α), $\lim_k s_\alpha(y_k) = s_\alpha(y_1) = s_\beta(y_1) = u_1$. Además, por la definición de α y por la ortogonalidad de la base $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$, tenemos $\|s_\delta(y_1)\| < \|s_{\delta+1}(y_1)\|$. Por lo tanto, por (D),

$$\lim_k \|r_\alpha(u_k)\| = \|r_\alpha(u_1)\| = \|r_\alpha s_\alpha(y_1)\| = 0.$$

Así, por (5_α),

$$\lim_k s_\beta(y_k) = \lim_k s_\alpha(y_k) + \lim_k r_\alpha(u_k) = s_\alpha(y_1) = s_\beta(y_1),$$

la condición (5_β).

Supongamos ahora que α es un ordinal límite. Por la definición de base de proyecciones existe una sucesión de ordinales

$$\tau_n = \inf\{\tau : \|r_\tau(u_1)\| \geq 1/n\} \uparrow \alpha$$

Más aún, obviamente, $s_{\tau_n+1}(u_1) \neq s_{\tau_n}(u_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por la ortogonalidad de la base, tenemos

$$(8) \qquad \|s_{\tau_n}(u_1)\| < \|s_{\tau_n+1}(u_1)\| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Fijamos un ordinal $\eta = \tau_{n_0}+1$ tal que $\|r_\eta(u_1)\| < \varepsilon/4$. Evidentemente $\eta < \tau_{n_0+1} < \alpha \leq \beta$. Así, por (8), (D) y por la hipótesis de inducción, existe un $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\,\|r_\eta(u_k)\| - \|r_\eta(u_1)\|\,| < \varepsilon/4, \;\; \|s_\eta(u_k) - s_\eta(u_1)\| < \varepsilon/4 \qquad \text{para } k > k(\varepsilon).$$

Así, para $k > k(\varepsilon)$, tenemos

$$\begin{aligned} \|s_\beta(y_k) - s_\beta(y_1)\| &= \|u_k - u_1\| \leq \|s_\eta(u_k) - s_\eta(u_1)\| + \|r_\eta(u_k) - r_\eta(u_1)\| \\ &< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto termina la inducción y la prueba del lema. □

Lema 4.4.7. *Sean $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ y $(f_\tau)_{\tau<\xi}$ la base natural y la sucesión de funcionales coeficientes del espacio $l_1([\xi])$. Sea $(z_k)_{k<\omega}$ una sucesión de vectores de $l_1([\xi])$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(†) $\lim_k z_k = z_1$,

(††) $\lim_k \|s_\tau(z_k)\| = \|s_\tau(z_1)\|$ *para* $\tau \leq \xi$ *y* $\lim_k \operatorname{sgn} f_\tau(z_k) = \operatorname{sgn} f_\tau(z_1)$ *siempre que* $f_\tau(z_1) \neq 0$.

Demostración. Sólo hemos de probar la implicación (††) ⇒ (†), puesto que la implicación opuesta es evidente. Supongamos que se verifica (††). La condición (†) es equivalente a

$$(9_\tau) \quad \lim_k s_\tau(z_k) = s_\tau(z_1)$$

para $\tau = \xi$. Probaremos esto por inducción transfinita con respecto a τ .

Obsérvese que (9_1) se satisface: $s_1(z_k) = 0 = s_1(z_1)$.

La prueba de la implicación $(9_\tau) \Rightarrow (9_{\tau+1})$ utiliza el mismo argumento que la primera parte del lema 4.4.6.

Supongamos que β es un ordinal límite menor o igual que ξ, y que (9_τ) se verifica para todo $\tau < \beta$. Hemos de probar que la hipótesis de inducción junto con (††) implica (9_β).

Sea $\varepsilon > 0$. Como β es un ordinal límite, existe un $\alpha < \beta$ tal que

$$(10) \qquad \|s_\alpha(z_1) - s_\beta(z_1)\| < \varepsilon/6$$

Por (††) y por la hipótesis (9_α), existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(11) \qquad \|s_\alpha(z_k) - s_\alpha(z_1)\| < \varepsilon/6, \ \ |(\|s_\beta(z_k)\| - \|s_\beta(z_1)\|)| < \varepsilon/6, \ \ \text{para } k > k_0$$

Por (10), (11) y por la definición de la norma en $l_1([\xi])$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|s_\beta(z_k) - s_\alpha(z_k)\| &= \|s_\beta(z_k)\| - \|s_\alpha(z_k)\| \\
&\leq |(\|s_\beta(z_k)\| - \|s_\beta(z_1)\|)| + |(\|s_\beta(z_1)\| - \|s_\alpha(z_1)\|)| + |(\|s_\alpha(z_1)\| - \|s_\alpha(z_k)\|)| \\
&< \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/6 = \varepsilon/2 \quad \text{para } k > k_0.
\end{aligned}$$

Finalmente, para $k > k_0$,

$$\begin{aligned}
\|s_\beta(z_k) - s_\beta(z_1)\| &\leq \|s_\alpha(z_k) - s_\alpha(z_1)\| + \|s_\beta(z_1) - s_\alpha(z_1)\| + \|s_\beta(z_k) - s_\alpha(z_k)\| \\
&\leq \varepsilon/6 + \varepsilon/6 + \varepsilon/2 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto termina el proceso de inducción y prueba el lema 4.4.7. □

Demostración de la proposición 4.4.3. Usaremos los mismos símbolos s_τ, f_τ, r_τ tanto para X como para $l_1([\xi])$. De las ecuaciones (1), (2) y (3) se ve que

$$(12) \qquad bs_\tau(x) = \|s_\tau h(x)\| \ \ \text{para } \tau \leq \xi; \ \ \text{sgn } \ f_\tau(x) = \text{sgn } \ f_\tau h(x) \ \ \text{para } \tau < \xi$$

para todo $x \in X$. En efecto

$$\|s_\tau h(x)\| = \sum_{\alpha<\tau} (bs_{\alpha+1}(x) - bs_\alpha(x)) = bs_\tau(x),$$

para cualquier ordinal τ, límite o no, menor o igual que ξ.

La ecuación (12) junto con los lemas 4.4.6 y 4.4.7 muestran que h es un embebimiento. Tenemos que ver que $h(X) = l_1([\xi])$. Consideremos, para $\tau \leq \xi$, los conjuntos $A_\tau = \{z \in l_1([\xi]) : z = s_\tau(z)\}$.

Obviamente $A_1 = \{0\} = \{h(0)\} \subset h(X)$. Suponiendo que $A_\tau \subset h(X)$ para $\tau < \beta$ probaremos que $A_\beta \subset h(X)$.

En primer lugar supongamos que β es un ordinal límite. Sea $z \in A_\beta$ tenemos

$$\tau_n = \inf\{\tau : \|r_\tau(z)\| \geq 1/n\} \uparrow \beta.$$

Como $\tau_n < \beta$, $s_{\tau_n}(z) \in A_{\tau_n}$, es decir existen $x_n \in X$ tales que $h(x_n) = s_{\tau_n}(z)$. Es evidente que la sucesión $(x_n)_{n<\omega}$ satisface la condición (2) de la definición 4.3.5. Como la base de proyecciones en X es completamente acotada, se tiene que $\lim_n x_n = x$ existe. Claramente, $z = h(x)$.

En segundo lugar supongamos que $\beta = \gamma + 1$. Sea $z \in A_\beta$. Elegimos un $x = s_\gamma(x) \in X$, con $h(x) = s_\gamma(z)$. Dada la función

$$g(t) = b(x + t \cdot \operatorname{sgn}\ f_\gamma(z) \cdot x_\gamma),$$

podemos encontrar un $t_0 > 0$ tal que $g(t_0) = \|z\|$, ya que $g(0) = b(x) = \|h(x)\| = \|s_\gamma(z)\| \leq \|z\|$ y toma valores arbitrariamente altos. Entonces $z = h(x + t_0 \cdot \operatorname{sgn}\ f_\gamma(z) \cdot x_\gamma)$.

En efecto, como para todo $\tau \neq \beta$ se tiene que $s_\tau(h(y)) = s_\tau(z)$, donde $y = x + t_0 \operatorname{sgn}\ f_\gamma(z) x_\gamma$. Y sabemos que $\|z\| = b(y)$, esto es

$$\|z\| = \sum_{\tau<\gamma+1} |f_\tau(z)|\,,$$

pero

$$b(y) = \|h(y)\| = \sum_{\tau<\gamma+1} |h(y)(\tau)|$$

y como $|f_\tau(z)| = |h(y)(\tau)|$ para todo $\tau < \gamma$, entonces $|f_\gamma(z)| = |h(y)(\gamma)|$. Así

$$\begin{aligned} z = s_\gamma(z) + f_\gamma(z)x_\gamma &= s_\gamma(h(y)) + \operatorname{sgn}\ f_\gamma(z)\,|f_\gamma(z)|\,x_\gamma = s_\gamma(h(y)) + \operatorname{sgn}\ h(y)(\gamma)\,|h(y)(\gamma)|\,x_\gamma \\ &= s_\gamma(h(y)) + h(y)(\gamma)x_\gamma = h(y). \end{aligned}$$

Por el principio de inducción transfinita, $l_1([\xi]) = A_\xi \subset h(X)$. □

S. Troyanski ha observado que el funcional b con el que hemos estado trabajando puede ser substituido por una norma equivalente $|||\cdot|||$ para el espacio X. Su construcción de la norma $|||\cdot|||$ es la siguiente.

Supongamos que $(s_\tau)_{\tau\leq\xi}$ es una base de proyecciones completamente acotada y ortogonal para X. Para cada conjunto A de ordinales, define

$$\begin{aligned} X_A &= \operatorname{span}\{x_\tau : \tau \in A\}, \\ E_A &= \inf\{\|x - y\| : y \in X_A\}, \\ F_A(x) &= \sum_{\tau\in A} |(s_{\tau+1} - s_\tau)(x)|. \end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, define

$$G_n(x) = \sup\{E_A(x) + nF_A(x) : \mathrm{Card}(A) \leq n\}.$$

Finalmente, se define

$$|||x||| = \|x\| + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} G_n(x).$$

y se toma $b(x) = |||x|||$. Obsérvese que la norma así definida es equivalente a la norma $\|x\|$.

Para ver que la función h definida en (3) con esta nueva función b es, de nuevo un homeomorfismo, vamos a seguir un proceso análogo al anterior. En primer lugar vamos a probar que la función es un embebimiento, esto es, una aplicación inyectiva bicontinua. Para ello sólo hemos de probar el análogo al lema 4.4.6 para nuestra nueva función b.

Lema 4.4.8. *Si $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores de X entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

($\star$) $\lim_k y_k = y_1$*;*

($\star\star$) $\lim_k bs_\tau(y_k) = bs_\tau(y_1)$ *para* $\tau \leq \xi$ *y* $\lim_k \mathrm{sgn}\ f_\tau(y_k) = \mathrm{sgn}\ f_\tau(y_1)$*, siempre que* $f_\tau(y_1) \neq 0$*.*

Demostración. Gracias a que la norma es equivalente, b es continua y, por tanto, la implicación $(\star) \Rightarrow (\star\star)$ es evidente.

Vamos a probar ahora la implicación opuesta. Supongamos que se satisface $(\star\star)$. La condición $(\star)$ es equivalente a la condición

$$(5_\tau) \qquad \lim_k s_\tau(y_k) = s_\tau(y_1)$$

para $\tau = \xi$. Lo probaremos por inducción transfinita respecto de τ.

Obsérvese que (5_1) se satisface: $s_1(y_k) = 0 = s_1(y_1)$.

Ahora asumimos que (5_τ) es cierto para cierto $\tau < \xi$, hemos de mostrar que se satisface $(5_{\tau+1})$. Por (5_τ) y por $(\star\star)$, tenemos

$$\lim_k bs_{\tau+1}(y_k) = \lim_k b(s_\tau(y_k) + f_\tau(y_k)x_\tau) = bs_{\tau+1}(y_1)$$

Como $b(z) \geq \|z\|$, concluimos que la sucesión $(f_\tau(y_k))$ está acotada y cada unos de sus puntos de aglomeración t_0 satisface la ecuación

$$b(s_\tau(y_1) + t_0 x_\tau) = b(s_\tau(y_1) + f_\tau(y_1)x_\tau).$$

Una de las soluciones de esta ecuación es $t_0 = f_\tau(y_1)$. De la ortogonalidad de la base se sigue que la función $g(t) = b(s_\tau(y_1) + tx_\tau)$ es estrictamente creciente para $t \geq 0$ y estrictamente decreciente para $t \leq 0$. Por lo tanto existen como mucho dos soluciones de la ecuación de arriba y éstos tienen que ser de signos contrarios. Si $f_\tau(y_1) = 0$, la única solución es $t_0 = 0$, de otra forma, por la segunda condición de ($\star\star$), sgn $t_0 =$ sgn $f_\tau(y_1)$, es decir el punto de aglomeración t_0 es único, y $\lim_k f_\tau(y_k) = t_0 = f_\tau(y_1)$, y por lo tanto

$$\lim_k s_{\tau+1}(y_k) = \lim_k (s_\tau(y_k) + f_\tau(y_k)x_\tau) = s_\tau(y_1) + f_\tau(y_1)x_\tau = s_{\tau+1}(y_1),$$

que es exactamente $(5_{\tau+1})$.

El caso en que β es un ordinal límite se demuestra de la misma forma a la del lema del que éste es un análogo. □

4.5. El teorema de Troyanski

En esta sección incluimos un nuevo caso de los homeomorfismo que hemos estudiado en esta tesina. Recordemos que hemos visto el homeomorfismo de forma explícita en el caso separable reflexivo y en los casos separable y reflexivo de forma independiente y no de forma explícita. Ahora probamos directamente el homeomorfismo entre $c_0(A)$ para cualquier conjunto A y $l_1(A)$. Conocemos un homeomorfismo explícito entre $l_1(A)$ y $l_2(A)$, así pues, tenemos un homeomorfismo explícito entre $c_0(A)$, que no es ni reflexivo ni separable, y $l_2(A)$.

Recordemos que $c_0(A)$ es el espacio de Banach formado por todas las funciones $x : A \to \mathbb{R}$ tal que $\text{Card}(\{a : |x(a)| > \varepsilon\}) < \aleph_0$ para todo $\varepsilon > 0$ equipado con la norma del supremo; $\ell_1(A)$ es el espacio de Banach de todas las funciones absolutamente sumables $y : A \to \mathbb{R}$ con la norma $\|y\|_1 = \sum_{a\in A} |y(a)|$.

Esta sección está dedicada a la prueba del siguiente teorema de Troyanski, véase [28].

Teorema 4.5.1. *Para un conjunto infinito arbitrario A, los espacios $c_0(A)$ y $\ell_1(A)$ son homeomorfos.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es un segmento de ordinales:

$$A = \{a : 1 \leq a < \xi\} = [\xi].$$

Para cada $x \in c_0(A)$, consideramos $(\beta_x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de todos los elementos del conjunto $\{a \in A : x(a) \neq 0\}$ ordenado de forma que

$$(1) \quad x(\beta_x(n)) \geq x(\beta_x(n+1)); \quad \beta_x(n) < \beta_x(n+1) \quad \text{si } x(\beta_x(n)) = x(\beta_x(n+1))$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos una nueva norma en $c_0(A)$ por la fórmula

$$(2) \qquad \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x(\beta_x(n))|.$$

Esta norma es equivalente a la norma del supremo: $\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq 2\|x\|$. Primero estableceremos un homeomorfismo entre los conos:

$$c_0^+(A) = \{x \in c_0(A) : x(a) \geq 0 \text{ para todo } a \in A\}$$
$$\ell_1^+(A) = \{y \in \ell_1(A) : y(a) \geq 0 \text{ para todo } a \in A\}. \qquad \square$$

Para este fin, para cada $x : A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$ definimos $r_a(x) : A \to \mathbb{R}$ por la fórmula

$$r_a(x)(b) = \begin{cases} 0 & \text{para } b < a, \\ x(b) & \text{para } b \geq a. \end{cases}$$

Claramente, si $x \in c_0(A)$, $y \in \ell_1(A)$, entonces $r_a(x) \in c_0(A)$, $r_a(y) \in \ell_1(A)$. Ahora, para $x \in c_0^+(A)$, $y \in \ell_1^+(A)$, $a \in A$, sea

$$w_a(x) = \|r_a(x)\|; \qquad w_a(y) = \|r_a(y)\|_1 = \sum_{b \geq a} y(b).$$

Tenemos

Proposición 4.5.2. *Existe un homeomorfismo $h : c_0^+(A) \to \ell_1^+(A)$ que satisface la condición: $w_a(x) = w_a(h(x))$ para $x \in c_0^+(A)$, $a \in A$.*

Es obvio, que h, si existiese, sería único y estaría definido por la siguiente fórmula

$$(3) \qquad h(x) = (w_a(x) - w_{a+1}(x))_{a \in A} \quad \text{para } x \in c_0^+(A).$$

Es sencillo probar que la función (3) lleva elementos de $c_0^+(A)$ en $\ell_1^+(A)$. Para probar que es el homeomorfismo que buscamos necesitamos seis lemas.

Lema 4.5.3. *Sea x un punto fijo de $c_0^+(A)$. Entonces*

(i) La función $a \to w_a(x)$ es no creciente, continua con respecto a la topología de A inducida por el orden y tal que $\inf\{w_a(x) : a \in A\} = 0$*;*

(ii) $w_{a+1}(x) = w_a(x)$ si y solamente si $x(a) = 0$;

(iii) Si $b = \beta_x(1)$, entonces $x(b) = 2w_b(x) - w_{b+1}(x) \geq 2w_a(x) - w_{a+1}(x)$ para todo $a \in A$ y la igualdad se tiene solamente si $w_a(x) = w_b(x)$.

Demostración. Los apartados (i) y (ii) son evidentes, puesto que la función $a \to r_a(x)$ es continua. Vamos a probar (iii), para ello consideremos $x \in c_0^+(A)$, $a \in A$. Sean (a_n) y (b_n) las subsucesiones de elementos de la sucesión $(\beta_x(n))_{n \in \mathbb{N}}$ que son mayores que a y mayores que $a+1$ respectivamente.

Si existe un $j < \omega$ tal que $a = a_j$, entonces, por (1),

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{para } n < j, \\ a_{n+1} & \text{para } n \geq j \end{cases}$$

y además,

$$\begin{aligned}
2w_a(x) - w_{a+1}(x) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x(a_n) - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}x(b_n) \\
&= 2\sum_{n=1}^{j-1} 2^{-n}x(a_n) + 2\cdot 2^{-j}x(a_j) + \sum_{n=j+1}^{\infty} 2^{-n+1}x(a_n) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{j-1} 2^{-n}x(a_n) - \sum_{n=j}^{\infty} 2^{-n}x(a_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{j-1} 2^{-k}x(a_k) + 2^{-j+1}x(a_j) \\
&= \sum_{k=1}^{j} 2^{-k}x(a_k) + 2^{-j}x(a_j) \leq x(a_1) \leq x(b).
\end{aligned}$$

La igualdad se obtiene solamente si $x(a_1) = \cdots = x(a_j) = x(a) = x(b)$.

En particular, si $b = a_1$ y por lo tanto $j = 1$, tenemos $2w_a(x) - w_{a+1}(x) = x(a_1) = x(b)$.

Si, por otro lado $a \notin \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, entonces $a_n = b_n$ y

$$2w_a(x) - w_{a+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}x(a_k) < x(a_1) \leq x(b). \qquad \square$$

Lema 4.5.4. *Si $x,\ z \in c_0^+(A)$ y $w_a(x) = w_a(z)$ para todo $a \in A$ entonces $x = z$.*

Demostración. Del lema 4.5.3 (ii) se sigue que $\{a : x(a) \neq 0\} = \{a : z(a) \neq 0\}$, y del lema 4.5.3 (iii), $\beta_x(1) = \beta_z(1)$ y $x(b_1) = z(b_1)$, donde $b_1 = \beta_x(1) = \beta_z(1)$. Aplicando el lema 4.5.3 para los elementos x' y z', donde

$$x'(a) = \begin{cases} x(a) & \text{si } a \neq b_1, \\ 0 & \text{si } a = b_1 \end{cases} \quad y \quad z'(a) = \begin{cases} z(a) & \text{si } a \neq b_1, \\ 0 & \text{si } a = b_1, \end{cases}$$

obtenemos que $\beta_x(2) = \beta_{x'}(1) = \beta_{z'}(1) = \beta_z(2) = b_2$, $x(b_2) = z(b_2)$. Continuando este proceso por inducción tenemos que $\beta_x(n) = \beta_z(n) = b_n$ y $x(b_n) = z(b_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir $x = z$. $\square$

Lema 4.5.5. *Sea $t : A \to \mathbb{R}^+$ una función continua no creciente tal que $\inf\{t(a) : a \in A\} = 0$ y sea $u(a) = 2t(a) - t(a+1)$, entonces existe un $b \in A$ tal que $u(b) \geq u(a)$ para todo $a \in A$.*

Demostración. Si el lema fuera falso, existiría una sucesión infinita creciente $b_1 < b_2 < \ldots$ de ordinales en A tal que $u(b_1) < u(b_2) < \ldots$. Sea $b_0 = \lim_n b_n$. Como t es no creciente y continua, tenemos

$$u(b_1) < \lim_n u(b_n) = \lim_n (2t(b_n) - t(b_n + 1)) = t(b_0) \leq t(b_1) \leq u(b_1),$$

una contradicción. $\square$

Lema 4.5.6. *Si denotamos T al conjunto de las funciones $t : A \to \mathbb{R}^+$ que son no crecientes, continuas y que tienen ínfimos igual a 0. Entonces, para cada $t \in T$ existe un $x \in c_0^+(A)$ tal que $w_a(x) = t(a)$ para todo $a \in A$.*

Observación 4.5.7. Supongamos que $x \in c_0^+(A)$, $b = \beta_x(1)$, $x' \in c_0^+(A)$ tal que $x'(a) = x(a)$ cuando $a \neq b$ y $x'(b) = 0$. Sea $t(a) = w_a(x)$, $t'(a) = w_a(x')$ para $a \in A$. Entonces

$$(4) \qquad t'(a) = \begin{cases} \text{2t(a)-x(b)} & \text{si } a \leq b, \\ \text{t(a)} & \text{si } a > b \end{cases}$$

Estas relaciones combinadas con el argumento usado en la prueba del lema 4.5.4 explican la organización de la prueba del lema 4.5.6.

Demostración del lema 4.5.6. Sea $t \in T$, por el lema 4.5.5, el conjunto

$$A(t) = \{b \in A : 2t(b) - t(b+1) \geq 2t(a) - t(a+1) \text{ para todo } a \in A\}$$

es no vacío. Sea $\alpha_t = \inf\{b : b \in A(t)\}$, $u(t) = 2t(\alpha_t) - t(\alpha_t + 1)$. Definimos $t' : A \to \mathbb{R}$ por la fórmula (4) con $b = \alpha_t$. Es claro que $t' \in T$. Definimos por inducción, $t_0 = t$, $t_{n+1} = t'_n$ y ponemos

$$x(\alpha_{t_n}) = u(t_n), \quad x(a) = 0 \ \text{ si } a \notin \{\alpha_{t_n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Es rutinario comprobar que $x \in c_0^+(A)$ y que $w_a(x) = t(a)$ para todo $a \in A$. □

Lema 4.5.8. *Sea $x \in c_0^+(A)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen un conjunto finito $B \subset A$ y un $\delta > 0$ tales que, para $z \in c_0^+(A)$, la condición*

$$(5) \qquad \sup_{a \in B} |w_a(x) - w_a(z)| < \delta$$

implica $\|x - z\| < \varepsilon$.

Demostración. Fijamos un $k \in \mathbb{N}$ con $x(\beta_x(k)) < \varepsilon/4$ y sea $B = \{\beta_x(j) : j \leq k\}$. Analizando las fórmulas de la prueba del lema 4.5.6, concluimos que existe un $\delta > 0$ tan pequeño que la condición (5) garantiza que $\beta_x(j) = \beta_z(j)$ para $j \leq k$ y $|x(a) - z(a)| < \varepsilon/4$ para $a \in B$. Por tanto, si se satisface (5) entonces

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \sup_{a \in A} |x(a) - z(a)| < \varepsilon/4 + \sup_{a \in A \setminus B} |x(a)| + \sup_{a \in A \setminus B} |z(a)| \\ &\leq \varepsilon/4 + x(\beta_x(k)) + z(\beta_x(k)) < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + 2\varepsilon/4 = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Lema 4.5.9. *Sea $y \in \ell_1^+(A)$ y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen un conjunto finito $B \subset A$ y un $\delta > 0$ tales que, para $z \in \ell_1^+(A)$, la condición (5) con x substituido por y implica $\|y - z\|_1 < \varepsilon$.*

Demostración. La prueba es análoga a la del lema 4.5.8. □

Demostración de la proposición 4.5.2. Es sencillo demostrar por inducción que, para cada $y \in \ell_1^+(A)$, hay exactamente un $t \in T$ tal que $w_a(y) = t(a)$ para cada $a \in A$. Combinando este hecho con los lemas 4.5.4 y 4.5.6 concluimos que la función h definida por la fórmula (3) es inyectiva y suprayectiva sobre $\ell_1^+(A)$.

Sean $x_n \in c_0^+(A)$, $y_n \in \ell_1^+(A)$ para $n = 0, 1, \ldots$ Entonces, por los lemas 4.5.8, 4.5.9,

$$\begin{aligned} \lim_n \|x_n - x_0\| = 0 \quad &\textit{sii} \quad \lim_n w_a(x_n) = w_a(x_0) \text{ para todo } a \in A, \\ \lim_n \|y_n - y_0\|_1 = 0 \quad &\textit{sii} \quad \lim_n w_a(y_n) = w_a(y_0) \text{ para todo } a \in A. \end{aligned}$$

Por lo tanto h y h^{-1} son continuas. □

Demostración del teorema 4.5.1. Para cualquier función $x : A \to \mathbb{R}$, definimos las funciones mod $x :\ A \to\ \mathbb{R}$ y sgn $x : A \to \{-1, 1, 0\}$ definidas por

$$[\text{mod } x](a) = |x(a)|, \quad [\text{sgn } x](a) = \text{sgn } x(a) \qquad \text{para } a \in A.$$

Es sencillo comprobar que si h es el homeomorfismo de la proposición 4.5.2, entonces la función $h : c_0(A) \to \ell_1(A)$ definido por la fórmula $h(x) = h(\text{mod } x) \cdot \text{sgn } x$ para $x \in c_0(A)$ es un homeomorfismo de $c_0(A)$ sobre $\ell_1(A)$. □

Capítulo 5

Renormamiento en ciertos espacios $l_\infty(\Gamma)$

Hemos visto en el capítulo 3 que en un espacio de Banach con base existe un homeomorfismo con un espacio de Hilbert que lleva la esfera unidad a la esfera unidad y preserva también los subespacios finito dimensionales asociados con las correspondientes bases. No sabemos si para espacios separables sin base es posible conseguir lo mismo ya que el método de Kadec requiere el esquema de descomposición de Bessaga-Pelcynski que utiliza, a su vez, el selector de Bartle-Graves, perdiéndose la propiedad de mandar esferas a esferas.

Precisamos estudiar cuánta linealidad podemos conservar en la construcción del homeomorfismo en el caso separable para analizar, en el caso no separable, la invarianza de renormamientos por homeomorfismos de Lipschitz o uniformes y para tratar de obtener aplicaciones σ-continuas que puedan preservar más la linealidad que los homeomorfismos y que pudiesen darnos herramientas adecuadas para atacar problemas de invarianza de las distintas propiedades de renormamiento que se vienen estudiando en el seno del grupo de Análisis Funcional de la Universidad de Murcia.

El siguiente teorema de Clarkson establece las bases para la transferencia de normas entre espacios de Banach.

Teorema. *Sean Y un espacio normado con norma estrictamente convexa, X un espacio normado y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, continua e inyectiva. Entonces, X admite una norma equivalente estrictamente convexa.*

Este hecho fue utilizado por Lindenstrauss, por ejemplo, para probar que en cualquier espacio de Banach reflexivo X existe un renormamiento estrictamente convexo, al ser capaz de construir un operador lineal continuo e inyectivo $T : X \longrightarrow c_0(I)$, para algún conjunto de índices I. Sin embargo, Dashiell y Lindenstrauss, [6], dieron ejemplos de espacios de Banach X con norma estrictamente convexa y sin ningún operador $T : X \longrightarrow c_0(I)$ lineal, continuo e inyectivo.

Como la convexidad estricta no conecta con la identidad del paralelogramo nos interesa la forma más débil de conectar ambas propiedades y es por ello que estudiamos si las normas de estos espacios introducidos por Dashiell y Lindenstrauss son o no puntualmente LUR, ver definición 1.3.13, concepto éste que estudiamos tratando de ver su comportamiento a través de homeomorfismos de la estructura uniforme o lipschitziana de espacios de Banach.

Este capítulo se centra en la prueba de que, en efecto, estos espacios que, al contener una copia de l_∞, no son LUR renormables, son puntualmente LUR renormables.

5.1. Preliminares

La principal herramienta que utilizaremos en este capítulo es la norma de Day, cuyas propiedades han sido ampliamente estudiadas y pueden verse en [8], y que definimos a continuación:

Definición 5.1.1. *Para cada función $f \in l_\infty(\Gamma)$ con Γ un conjunto infinito, se define la norma de Day como*

$$\|f\|_{Day} = \sup \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} |f(s_n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde el supremo se toma sobre todas las sucesiones (s_n) de términos distintos en Γ.

Esta norma definida en $f \in l_\infty(\Gamma)$ es equivalente a la propia del espacio y es una norma de retículo. En la monografía [24] se introducen una serie de conceptos y se obtiene un resultado que pasamos a presentar:

$$\sigma_\varepsilon(f) = \{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geq \varepsilon\}, \qquad \eta(f, \varepsilon) = \varepsilon^2 - \sup\{f^2(\gamma) : \gamma \notin \sigma_\varepsilon(f)\}.$$

El resultado que obtienen en la monografía citada es el siguiente lema para cuya demostración remitimos a la misma y del cual se deduce directamente que la norma de Day es LUR en $C_0(\Gamma)$.

Lema 5.1.2. *Sea $f \in l_\infty(\Gamma)$ y $\varepsilon > 0$ de tal forma que $L = \sigma_\varepsilon(f)$ es finito o vacío. Supongamos que $\eta = \eta(f, \varepsilon) > 0$, $l = \sharp L$, y*

$$\delta = \text{mín} \left\{ \left(\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \eta} \right)^2, \eta/2 \right\}.$$

Sea $g \in l_\infty(\Gamma)$ que satisface

$$2(\|f\|_{Day}^2 + \|g\|_{Day}^2) - \|f + g\|_{Day}^2 < 2^{-l-1}\delta.$$

Entonces $\|f - g\|_\infty < 3\varepsilon$.

Una herramienta muy útil en renormamiento es el siguiente lema

Lema 5.1.3 (The convex Argument, [24]). *Sea* $\{\|\cdot\|_n\}_{n<\omega}$ *una sucesión de seminormas en un espacio vectorial* X*, de forma que la sucesión* $\{\|x\|_n\}_{n<\omega}$ *es acotada para todo* $x \in X$*. Entonces*

$$\|\cdot\| = \left(\sum_1^\infty 4^{-n} \|\cdot\|_n^2\right)^{1/2}$$

es también una seminorma en X *y para todo* $x,y \in X$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *tenemos*

$$(\|x\|_n - \|y\|_n)^2 \leq 2(\|x\|_n^2 + \|y\|_n^2) - \|x+y\|_n^2 \leq 4^n(2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x+y\|^2).$$

Además tenemos

$$\lim_k (2(\|x_k\|_n^2 + \|y_k\|_n^2) - \|x_k + y_k\|_n^2) = \lim_k (\|x_k\|_n - \|y_k\|_n) = 0. \tag{5.1}$$

cualesquiera x_k*,* $y_k \in X$ *cumpliendo*

$$(\spadesuit_{\|\cdot\|}) \qquad \lim_k 2(\|x_k\|^2 + \|y_k\|^2) - \|y_k + x_k\|^2 = 0.$$

Demostración. Para todo x, $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\|x\|_n - \|y\|_n)^2 = 2(\|x\|_n^2 + \|y\|_n^2) - (\|x\|_n + \|y\|_n)^2 \leq 2(\|x\|_n^2 + \|y\|_n^2) - \|x+y\|_n^2 \\ &\leq 4^n \sum 4^{-k}(2(\|x\|_k^2 + \|y\|_k^2) - \|x+y\|_k^2) = 4^n(2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x+y\|^2). \end{aligned}$$

Así, pues se deduce directamente (5.1) de $(\spadesuit_{\|\cdot\|})$. □

5.2. Primer resultado

Estamos en condiciones de abordar nuestro estudio, para ello, presentamos a continuación una proposición nueva que siguiendo el esquema de Dashiell y Lindenstrauss en [6] consigue extender un resultado de convexidad estricta a su forma asintótica o mejor dicho a un resultado de convexidad local uniforme en la topología de la convergencia puntual.

Proposición 5.2.1. *Sea* Γ *un conjunto no numerable y* f_n*,* f *en* $l_\infty(\Gamma)$ *tales que*

$$(\spadesuit_{\|\cdot\|_{Day}}) \qquad \lim_{n\to\infty} 2(\|f_n\|_{Day}^2 + \|f\|_{Day}^2) - \|f_n + f\|_{Day}^2 = 0$$

entonces para cada $t \in \Gamma$ *que verifica*

$$(P) \qquad |f(t)| > \sup_{s\in\Gamma\setminus\{t\}} \{|f(s)|\}$$

se cumple

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

Demostración. Si consideramos como τ la convergencia puntual de $l_\infty(\Gamma)$, es claro, siguiendo el esquema de prueba del lema 1.3.12 que podemos suponer que $\|f_n\|_{Day} = \|f\|_{Day} = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \|f_n + f\|_{Day} = 2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos tomar una sucesión de términos distintos $\{s_i^k\} \subset \Gamma$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}|f_k(s_n^k) + f(s_n^k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} > \|f_k + f\|_{Day} - \frac{1}{k}.$$

Definimos x^k, $y^k \in l_2$ como

$$x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{donde} \quad x_n^k = \frac{1}{2^n} f_k(s_n^k)$$
$$y^k = (y_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{donde} \quad y_n^k = \frac{1}{2^n} f(s_n^k)$$

Es claro que

$$\|x^k\|_2 \leq \|f_k\|_{Day} = 1 \qquad \text{y} \qquad \|y^k\|_2 \leq \|f\|_{Day} = 1$$

para $k \in \mathbb{N}$ y que

$$\|f_k + f\|_{Day} - \frac{1}{k} \leq \left\|x^k + y^k\right\|_2 \leq \left\|x^k\right\|_2 + \left\|y^k\right\|_2 \leq 2,$$

luego $\lim_{n\to\infty} \left\|x^k + y^k\right\|_2 = 2$ y como l_2 es uniformemente convexa,

$$\lim_{k\to\infty} \left\|x^k - \ y^k\right\|_2 = \ 0.$$

En particular: $\lim_{k\to\infty} |x_n^k - y_n^k| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es decir

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(s_n^k) - f(s_n^k)| = 0$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, si $n > 2$ y $|a| < |b|$ entonces $(\frac{1}{4})^2 a^2 + (\frac{1}{4})^n b^2 < (\frac{1}{4})^2 b^2 + (\frac{1}{4})^n a^2$, luego si $k \geq 1$, t verifica (P) y $t \neq s_1^k$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{Day}^2 - \left\|y^k\right\|_2^2 &= \|f\|_{Day}^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} f(s_n^k) \\
&\geq \left[\frac{1}{4}f(t)^2 + \frac{1}{4^2}f(s_1^k)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4^n} f(\hat{s}_n^k)^2\right] - \left[\frac{1}{4}f(s_1^k)^2 + \frac{1}{4^2}f(t)^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{4^n} f(\hat{s}_n^k)^2\right] \\
&= (f(t)^2 - f(s_1^k)^2)\left(\frac{3}{16}\right),
\end{aligned}$$

donde $\hat{s}_n^k = s_n^k$ salvo cuando $s_n^k = t$ en cuyo caso $\hat{s}_n^k = s_2^k$. Si llamamos $\delta = \sup\{|f(s)| : s \in \Gamma \setminus \{t\}\}$ entonces

$$\|f\|_{Day}^2 - \left\|y^k\right\|_2^2 \leq (f(t)^2 - \delta^2)(\frac{3}{16}) > 0$$

Pero claro $\lim_{k\to\infty} \left\|y^k\right\|_2^2 = 1 = \|f\|_{Day}^2$, luego existe k_1 tal que para todo $k \geq k_1$ $s_1^k = t$.

Dado $\varepsilon > 0$, existe k_2 tal que para todo $k \geq k_2$ se tiene $|f_k(s_1^k) - f(s_1^k)| < \varepsilon$. Si tomamos $k_0 = \text{máx}\{k_1, k_2\}$ entonces para todo $k \geq k_0$ se tiene $|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$.

Luego, en efecto

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

como queríamos probar. □

5.3. Definiciones básicas

Consideremos $\Gamma = I = [0,1]$. Para cualquier subconjunto $A \subset I$ y cualquier ordinal $\alpha < \omega_1$, denotamos por $A^{(\alpha)}$ al α-ésimo conjunto derivado de A, esto es: $A^{(0)} = A$, $A^{(\alpha+1)}$ es el conjunto de todos los puntos de acumulación de $A^{(\alpha)}$ y para un ordinal límite α, $A^{(\alpha)} = \cap_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}$.

Para cada ordinal $\alpha < \omega_1$, definimos X_α como el subespacio de $l_\infty(I)$ consistente en todas aquellas funciones f tales que $\sigma_\varepsilon(f)^{(\alpha)} = \emptyset$ para cada $\varepsilon > 0$ donde $\sigma_\varepsilon(f) = \{t \in I : |f(t)| \geq \varepsilon\}$.

Sea $\{G_n\}_{n<\omega}$ una base de la topología de I. Para $f \in l_\infty(I)$ definimos la función $\hat{f} \in l_\infty(I)$ por $\hat{f}(t) = \limsup\{|f(s)| : s \to t, s \neq t\}$, para cada $t \in I$. Sea $f^{(0)} = |f|$, $f^{(\mu+1)} = \hat{f}^{(\mu)}$ y $f^{(\mu)} = \inf_{\alpha<\mu} f^{(\alpha)}$ si μ es un ordinal límite. Consideramos la familia Φ_λ de funciones φ sobre $l_\infty(I)$, definidas para $f \in l_\infty(I)$ por

$$\varphi(f) = \left\| \frac{1}{k}\Big(\sum_{i=1}^{k} f^{(\alpha_i)}\Big)\pi_{G_n} \right\|_{Day}$$

donde n recorre los números naturales y $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ recorre las sucesiones finitas de ordinales tales que $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k < \lambda$, y la función π_{G_n} es la función característica de G_n. Φ_λ es una familia numerable que podemos ordenar en una sucesión $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Entonces definimos para cada $f \in X_\lambda$

$$N_\lambda(f) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j}\varphi_j(f)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $\varphi_0(f) = \|f\|_\infty$.

Lema 5.3.1. *Sea $f \in l_\infty(I)$, $0 \leq \alpha < \omega_1$ un ordinal, y G_n un abierto de la base numerable de I que hemos tomado. Entonces se cumple*

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{G_n,\infty} \leq \|f\|_{G_n,\infty}$$

Demostración. Será suficiente ver que nuestra tesis se cumple para $\alpha = 1$, puesto que $f^{(1)} \geq f^{(\alpha)}$ para cualquier ordinal $0 < \alpha < \omega_1$.

Supongamos que existe un cierto abierto G de la base de I, de forma que $\left\|f^{(1)}\right\|_{G,\infty} > \|f\|_{G,\infty}$. Entonces podemos tomar un cierto $\delta > 0$ de forma que $\left\|f^{(1)}\right\|_{G,\infty} > \|f\|_{G,\infty} + \delta$. Tomamos un

$m \in \mathbb{N}$ de forma que $m^{-1} < \delta$, y $s_m \in G$ de forma que $f^{(1)}(s_m) + \frac{1}{m} > \left\|f^{(1)}\right\|_{G,\infty}$. Entonces

$$f^{(1)}(s_m) + \frac{1}{m} > \left\|f^{(1)}\right\|_{G,\infty} > \|f\|_{G,\infty} + \delta \geq f^{(1)}(s_m) + \delta$$

que constituye una contradicción. Así pues, queda probado el resultado. □

Proposición 5.3.2. *Para cada ordinal $\lambda < \omega_1$ se tiene que N_λ es una norma equivalente en X_λ.*

Demostración. Aplicando el lema "Argumentos de Convexidad" tenemos que para cada $\lambda < \omega_1$, N_λ es una norma. Gracias a que hemos considerado $\varphi_0(f) = \|f\|_\infty$ tenemos que $N_\lambda(f) \geq \|f\|_\infty$. Por otro lado es claro que

$$N_\lambda(f)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4^j} \varphi_j(f)^2 \leq \frac{4}{3} \sup\{\varphi_j(f)^2 : j \in \mathbb{N}\}$$

$$\|f\|_{Day} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \|f\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3} \|f\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_\infty .$$

y gracias al lema anterior

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \left\| \frac{1}{k} \Big(\sum_{i=1}^{k} f^{(\alpha_i)} \Big) \pi_{G_n} \right\|_{Day} \leq \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left\| f^{(\alpha_i)} \pi_{G_n} \right\|_{Day} \right) \\ &\leq \frac{1}{k\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1}^{k} \left\| f^{(\alpha_i)} \pi_{G_n} \right\|_\infty \right) \leq \frac{1}{k\sqrt{3}} \left(\sum_{i=1}^{k} \|f\|_\infty \right) \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Y, por tanto

$$N_\lambda(f)^2 \leq \frac{4}{9} \|f\|_\infty^2 \quad \text{y así} \quad N_\lambda(f) \leq \frac{2}{3} \|f\|_\infty$$

Luego, en efecto, las normas son equivalentes. □

Lema 5.3.3. *Para todo ordinal $\lambda < \omega_1$, para cada $\varepsilon > 0$, y para cada $f \in l_\infty(I)$ se tiene que*

$$\sigma_\varepsilon(f)^{(\lambda)} = \sigma_\varepsilon(f^{(\lambda)})$$

Demostración. Haremos la prueba por inducción sobre λ. Si $\lambda = 0$ el resultado es trivial. Veamos el caso $\lambda = 1$. Sea $t \in \sigma_\varepsilon(f)^{(1)}$ esto implica que cualquier entorno de t corta a $\sigma_\varepsilon(f)$ en un punto distinto de t con lo cual, por definición $f^{(1)}(t) \geq \varepsilon$ y, por tanto $t \in \sigma_\varepsilon(f^{(1)})$.

Por otro lado, si suponemos que $t \in \sigma_\varepsilon(f^{(1)})$ esto implica que $f^{(1)}(t) \geq \varepsilon$ y esto que para cada entorno de t existe un punto s_0 en él distinto de t que cumple $f(s_0) \geq \varepsilon$. Luego, cualquier entorno de t corta a $\sigma_\varepsilon(f)$ en al menos un punto distinto de t y, en consecuencia, $t \in \sigma_\varepsilon(f)^{(1)}$. Así pues, ya hemos probado el caso $\lambda = 1$.

Si suponemos cierta la tesis para un cierto ordinal $\alpha < \omega_1$ por lo probado se tiene que para su ordinal sucesor también se cumple. En efecto

$$\sigma_\varepsilon(f)^{(\alpha+1)} = (\sigma_\varepsilon(f)^{(\alpha)})^{(1)} = \sigma_\varepsilon(f^{(\alpha)})^{(1)} = \sigma_\varepsilon(f^{(\alpha+1)})$$

Sólo nos queda el caso de un ordinal límite. Sea λ un ordinal límite de forma que nuestra tesis es cierta para todo ordinal $\beta < \lambda$. Entonces, t está en $\sigma_\varepsilon(f)^{(\lambda)}$ si y solamente si t está en $\sigma_\varepsilon(f)^{(\beta)} = \sigma_\varepsilon(f^{(\beta)})$ para todo ordinal $\beta < \lambda$ por la hipótesis de inducción y por la definición de derivado. Ahora bien esto ocurre si y solamente si $f^{(\beta)}(t) \geq \varepsilon$ para todo $\beta < \lambda$ y esto si y solamente si $f^{(\lambda)}(t) \geq \varepsilon$ y finalmente si y solamente si $t \in \sigma_\varepsilon(f^{(\lambda)})$. Con lo que queda probado el lema. $\square$

Corolario 5.3.4. *Para cada ordinal $\lambda < \omega_1$ se tiene que $f \in X_\lambda$ si sólo si $f^{(\lambda)} = 0$.*

Demostración. f está en X_λ si y solamente si $\sigma_\varepsilon(f)^{(\lambda)} = \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ y esto sucede por el lema anterior si y solamente si $\sigma_\varepsilon(f^{(\lambda)}) = \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$ y esto sucede si y solamente si $f^{(\lambda)} = 0$. $\square$

5.4. Resultados auxiliares

Tenemos varias consecuencias de la proposición 5.2.1. Veamos:

Proposición 5.4.1. *Sean $f_n, f \in X_\lambda$, para cierto $0 < \lambda < \omega_1$ tales que*

$$(\heartsuit) \qquad \lim_{n\to\infty} 2\left(N_\lambda(f_n)^2 + N_\lambda(f)^2\right) - N_\lambda(f_n + f)^2 = 0$$

entonces para cada $t \in I$, y cada ordinal $\alpha < \lambda$ tales que $f^{(\alpha)}(t) > f^{(\alpha+1)}(t)$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t).$$

Demostración. Como $f^{(\alpha)}(t) > f^{(\alpha+1)}(t)$ existe un entorno de t, G, en la base de I tomada de forma que $f^{(\alpha)}(t) > \sup_{s\in G\setminus\{t\}}\{f^{(\alpha)}(s)\}$, gracias a la condición $(\heartsuit)$ y al lema "Argumentos de convexidad" se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} 2(\varphi(f_n)^2 + \varphi(f)^2) - \varphi(f_n + f)^2 = 0$$

para $\varphi(u) := \left\|u^{(\alpha)}\pi_G\right\|_{Day}$. Tomando $\Gamma = G$ y las funciones $f_n^{(\alpha)}\pi_G$ y $f^{(\alpha)}\pi_G$ podemos aplicar la proposición 5.2.1. Luego, en efecto

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t).$$

$\square$

Proposición 5.4.2. *Sean f_n, $f \in X_\lambda$, para cierto $0 < \lambda < \omega_1$ tales que*

$$(\heartsuit) \qquad \lim_{n\to\infty} 2\left(N_\lambda(f_n)^2 + N_\lambda(f)^2\right) - N_\lambda(f_n + f)^2 = 0$$

entonces para cada ordinal $0 < \beta \leq \lambda$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(\beta)}(t) = f^{(\beta)}(t).$$

para todo $t \in I$.

Demostración. Consideremos fijado, un ordinal $0 < \beta \leq \lambda$ y un $t \in I$. Si $f^{(\beta)}(t) = 0$ entonces $f^{(\beta+1)}(t) = 0$, luego existe un entorno de t, G, en la base escogida de forma que $\sigma_\varepsilon(f^{(\beta)}\pi_G)$ es finito. Entonces $\sigma_{2\varepsilon}(f^{(\beta)}\pi_G)$ es también finito y $\eta(f^{(\beta)}\pi_G, 2\varepsilon) > 0$. Del lema 5.1.2, considerando $\Gamma = G$, $\eta = \eta(f^{(\beta)}\pi_G, 2\varepsilon)$ se tiene

$$\limsup_k \left\|(f_k^{(\beta)} - f^{(\beta)})\pi_G\right\|_\infty < 6\varepsilon$$

y, por tanto

$$\limsup_k |f_k^{(\beta)}(t) - f^{(\beta)}(t)| < 6\varepsilon$$

Luego $\lim_k f_k^{(\beta)}(t) = f^{(\beta)}(t) = 0$.

En el caso en que $f^{(\beta)}(t) \neq 0$, existe un primer ordinal α, $\beta \leq \alpha$, tal que $f^{(\alpha)}(t) > f^{(\alpha+1)}(t)$. En este caso, por la proposición 5.4.1 tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t)$$

Si $\beta = \alpha$ por la afirmación anterior acabamos. Si $\alpha > \beta$ entonces definimos $h := f^{(\beta)} + f^{(\alpha)}$. Se tiene que:

$$h(t) - h^{(1)}(t) \geq f^{(\beta)}(t) + f^{(\alpha)}(t) - f^{(\beta+1)}(t) - f^{(\alpha+1)}(t) = f^{(\beta)}(t) - f^{(\alpha+1)}(t) > 0.$$

Luego $h(t) > h^{(1)}(t)$ y, por tanto, existe un entorno de t, G de forma que $h(t) > \sup_{s\in G\setminus\{t\}}\{h(s)\}$. Definimos $\varphi(u) := \left\|2^{-1}(u^{(\beta)} + u^{(\alpha)})\pi_G\right\|_{Day}$ para cada $u \in l_\infty(I)$. Por $(\heartsuit)$ y por el lema "Argumentos de Convexidad" tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} 2(\varphi(f_n)^2 + \varphi(f)^2) - \varphi(f_n + f)^2 = 0$$

Pero como

$$\varphi(f_k) = \left\|\frac{1}{2}(f_k^{(\beta)} + f_k^{(\alpha)})\pi_G\right\|_{Day} \quad \text{y} \quad \varphi(f) = \left\|\frac{1}{2}h\pi_G\right\|_{Day},$$

aplicando la proposición 5.2.1 se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} (f_n^{(\beta)} + f_n^{(\alpha)})(t) = (f^{(\beta)} + f^{(\alpha)})(t)$$

Y como hemos probado que $\lim_{n\to\infty} f_n^{(\alpha)}(t) = f^{(\alpha)}(t)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(\beta)}(t) = f^{(\beta)}(t).$$

□

Necesitamos ahora el siguiente lema:

Lema 5.4.3 (ver [6]). *Supongamos* $\lambda > 0$ *un número ordinal y una familia* $\{a_\alpha : 0 \leq \alpha \leq \lambda\}$ *de números reales tal que*

i) $a_\alpha \geq a_\beta$ *cuando* $0 < \alpha \leq \beta \leq \lambda$.

ii) $a_\beta = \inf\{a_{\alpha+1} : \alpha < \beta\}$ *para* $0 < \beta < \lambda$.

Entonces para cada $\varepsilon > 0$, *existe una sucesión finita creciente de ordinales* $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots \alpha_k < \alpha_{k+1}$ *tal que* $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{k+1} = \lambda$, *y*

$$\sum_{i=0}^{k}(a_{\alpha_i+1} - a_{\alpha_{i+1}}) < \varepsilon.$$

Demostración. Se prueba de forma sencilla por inducción transfinita sobre λ. □

Proposición 5.4.4. *Sean* f_n, $f \in X_\lambda$, *para cierto* $0 < \lambda < \omega_1$ *tales que*

$$(\heartsuit) \qquad \lim_{n\to\infty} 2\left(N_\lambda(f_n)^2 + N_\lambda(f)^2\right) - N_\lambda(f_n + f)^2 = 0$$

entonces si $t \in I$ *satisface una de las siguientes condiciones:*

i) $f(t) \neq 0$.

ii) $f(t) = f^{(1)}(t) = 0$.

se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(0)}(t) = f^{(0)}(t).$$

Demostración. Supongamos dado un cierto $t \in I$ y analicemos según el caso:

i) Supongamos que $t \in I$ es tal que $f(t) \neq 0$, entonces, por el lema 5.4.3 existen ordinales $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{k+1} = \lambda$ de forma que

$$\sum_{i=0}^{k}[f^{(\alpha_i+1)}(t) - f^{(\alpha_{i+1})}(t)] < \frac{1}{2}|f(t)|$$

definimos $h := \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)}$ y, claro $f^{(\lambda)} = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} h(t) - h^{(1)}(t) &\geq \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)}(t) - \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i+1)}(t) \\ &= f^{(\alpha_0)}(t) - f^{(\alpha_{k+1})}(t) - \sum_{i=0}^{k}[f^{(\alpha_i+1)} - f^{(\alpha_{i+1})}](t) \\ &> |f(t)| - f^{(\lambda)}(t) - \frac{1}{2}|f(t)| = \frac{1}{2}|f(t)| > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos tomar G, un cierto entorno de t en la base de forma que se verifique $h(t) > \sup_{s\in G\setminus\{t\}}\{h(s)\}$. Sea φ la seminorma definida para $u \in X_\lambda$ por

$$\varphi(u) := \left\| \frac{1}{k+1}\left(\sum_{i=0}^{k} u^{(\alpha_i)}\right)\pi_G \right\|_{Day}$$

Por el lema "Argumentos de convexidad" se tiene

$$\lim_{n\to\infty} 2(\varphi(f_n)^2 + \varphi(f)^2) - \varphi(f_n + f)^2 = 0$$

y, aplicando la proposición 5.2.1 tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} f_n^{(\alpha_i)}\right)(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)}\right)(t)$$

Pero, claro, por la proposición 5.4.2 para cualquier ordinal no nulo β menor que λ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(\beta)}(t) = f^{(\beta)}(t)$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(0)}(t) = f^{(0)}(t)$$

que es lo que queríamos probar.

ii) Supongamos ahora que $f(t) = f^{(1)}(t) = 0$. Por ser $f^{(1)}(t) = 0$, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario existe un cierto entorno de t, G_ε, en la base de forma que $\sigma_\varepsilon(f^{(0)}\pi_{G_\varepsilon})$ es vacío. Luego, $\sigma_{2\varepsilon}(f^{(0)}\pi_{G_\varepsilon})$ es vacío y $\eta(f^{(0)}\pi_{G_\varepsilon}, 2\varepsilon) > 0$. Del lema 5.1.2 tomando $\Gamma = G_\varepsilon$ y $\eta = \eta(f^{(0)}\pi_{G_\varepsilon}, 2\varepsilon)$ se tiene

$$\limsup_n \left\| \left(f_n^{(0)} - f^{(0)}\right)\pi_{G_\varepsilon} \right\| < 6\varepsilon$$

Y, en particular

$$\limsup_n |f_n^{(0)}(t) - f^{(0)}(t)| < 6\varepsilon$$

Como esto es para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\lim_n f_n^{(0)}(t) = f^{(0)}(t)$$

que es lo que queríamos probar.

Así, pues, en cualquiera de los casos i) o ii) se cumple la tesis. □

Antes de exponer el teorema clave del trabajo es necesario conocer una caracterización alternativa de la norma de Day que pasamos a dar a continuación

Definición 5.4.5. *Para cada función $f \in l_\infty(\Gamma)$ con Γ un conjunto infinito, se define la norma de Day como*

$$\|f\|_{Day} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f\|_{n,\Gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la norma $\|\cdot\|_n$ se define como

$$\|f\|_{n,\Gamma} := \sup_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \sum_{s \in N} f(s)^2 : N \subset \Gamma, \mathrm{Card}(N) = n \right\}.$$

Para más información acerca de esta equivalencia ver [24]. Tenemos entonces el siguiente resultado

Proposición 5.4.6. *Sean f_n, f en (X_λ, N_λ) cumpliendo*

$$(\diamondsuit) \qquad \lim_{n\to\infty} 2\left(N_\lambda(f_n)^2 + N_\lambda(f)^2\right) - N_\lambda(f_n + f)^2 = 0$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, para cada abierto G de la base de la topología de I que tomamos para definir N_λ y para cada colección de ordinales $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \lambda$ se tiene que:

$$\lim_m \left\| \sum_{i=0}^{k} f_m^{(\alpha_i)} \right\|_{n,G} = \left\| \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)} \right\|_{n,G}$$

Demostración. Gracias al lema 5.1.3 cada una de las seminormas $\varphi \in \Phi_\lambda$ cumple $(\diamondsuit)$. Y volviendo a aplicar el lema 5.1.3 se tiene el resultado enunciado. □

Observación 5.4.7. *En particular, tenemos que para cualquier elección de G y de los ordinales $\{\alpha_i\}_{i=0}^k$, se verifica*

$$\lim_n \left\| \sum_{i=0}^{k} f_n^{(\alpha_i)} \right\|_{1,G} = \left\| \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)} \right\|_{1,G}.$$

5.5. Teorema Final

Estamos en condiciones de demostrar el teorema fundamental

Teorema 5.5.1. (X_λ, N_λ) *es τ_p-LUR para todo ordinal $\lambda < \omega_1$.*

Demostración. Sean f_n, f en (X_λ, N_λ) cumpliendo

$$(\diamondsuit) \qquad \lim_{n\to\infty} 2\left(N_\lambda(f_n)^2 + N_\lambda(f)^2\right) - N_\lambda(f_n + f)^2 = 0$$

queremos probar que f_n converge puntualmente a f. Veremos en primer lugar que $|f_n|$ converge puntualmente a $|f|$. Para ello distingamos los casos en los que nos podemos encontrar cuando tomamos un cierto $t \in I$

a) Si $f(t) \neq 0$ o $f(t) = f^{(1)}(t) = 0$, gracias a la proposición 5.4.4, tenemos directamente

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(0)}(t) = f^{(0)}(t).$$

que es lo que queríamos ver.

b) Si $f(t_0) = 0 < f^{(1)}(t_0)$. Supongamos por reducción al absurdo que $f_n^{(0)}(t_0)$ no converge a $f^{(0)}(t_0) = 0$. Podemos suponer entonces que existe una constante $C > 0$ tal que $f_n^{(0)}(t_0) \geq C$ para todo n natural.

Ahora bien, tomemos un $\varepsilon > 0$. Podemos hacer:

1. Como $0 = f^{(\lambda)}(t_0) = \inf_{\beta<\lambda} f^{(\beta)}(t_0)$, podemos encontrar un cierto ordinal $\lambda_0 < \lambda$ de forma que
$$f^{(\lambda_0)}(t_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Por el lema 5.4.3 existen $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_k < \alpha_{k+1}$ con $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_{k+1} = \lambda_0$ tales que
$$\sum_{i=0}^{k} \left[f^{(\alpha_i+1)}(t_0) - f^{(\alpha_{i+1})}(t_0) \right] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. Podemos elegir un cierto entorno de t_0 en la base de la topología de I escogida, G, de forma que
$$\sup_{t\in G\setminus\{t_0\}} \left\{ f^{(\alpha_i)}(t) \right\} < f^{(\alpha_{i+1})}(t_0) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$$
para $i = 0, 1, \ldots, k$. Y, por tanto, para todo $t \in G$ salvo para t_0 se tiene:
$$\sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)}(t) < \sum_{i=0}^{k} \left[f^{(\alpha_{i+1})}(t_0) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \right] \leq \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_{i+1})}(t_0) + \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_{i+1})}(t_0) + \varepsilon$$

4. Tenemos entonces:
$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_{i+1})}(t_0) - \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)}(t_0) &= \sum_{i=0}^{k} \left[f^{(\alpha_i+1)} - f^{(\alpha_{i+1})} \right](t_0) + f^{(\alpha_{k+1})}(t_0) < \frac{\varepsilon}{2} + f^{(\lambda_0)}(t_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$
Luego
$$\sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_{i+1})}(t_0) + \varepsilon < \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)}(t_0) + 2\varepsilon$$

Hemos conseguido, pues, un abierto de la base de I y una colección finita de ordinales $\{\alpha_i\}_{i=0}^{k+1}$ tales que
$$A := \left\| \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)} \right\|_{1,G} \leq \sum_{i=0}^{k} f^{(\alpha_i)}(t_0) + 2\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} f^{(\alpha_i)}(t_0) + 2\varepsilon$$

Pero

$$A_n := \left\| \sum_{i=0}^{k} f_n^{(\alpha_i)} \right\|_{1,G} \geq \sum_{i=0}^{k} f_n^{(\alpha_i)}(t_0) \geq C + \sum_{i=1}^{k} f_n^{(\alpha_i)}(t_0)$$

Ahora bien, como $f_n^{(\alpha_i)}(t_0)$ converge a $f^{(\alpha_i)}(t_0)$ para $i = 1, \ldots, k$ y A_n converge a A, tenemos

$$C + \sum_{i=1}^{k} f^{(\alpha_i)}(t_0) \leq A \leq \sum_{i=1}^{k} f^{(\alpha_i)}(t_0) + 2\varepsilon$$

Luego, $C \leq 2\varepsilon$. Como la elección de ε era arbitraria, tenemos que $C = 0$, que constituye una contradicción. Y, por tanto, prueba lo que queríamos probar.

Así pues, hemos probado que $|f_n|$ converge puntualmente a $|f|$. Ahora bien, para llegar a la conclusión final, consideremos las funciones

$$h_n = \frac{f_n + f}{2} \quad \text{y} \quad h = f.$$

Estas nuevas funciones cumplen $(\diamondsuit)$, en efecto:

$$\begin{aligned} \lim_n N_\lambda(h_n) &= \lim_n N_\lambda \left(\frac{f + f_n}{2} \right) = N_\lambda(f) = N_\lambda(h) \\ \limsup_n N_\lambda \left(\frac{h_n + h}{2} \right) &\leq \frac{1}{2} \limsup_n (N_\lambda(h_n) + N_\lambda(h)) = N_\lambda(h) \qquad (5.2) \\ \liminf_n N_\lambda \left(\frac{h + h_n}{2} \right) &= \liminf_n N_\lambda \Big(\frac{1}{4} f_n + \frac{3}{4} f \Big) == \liminf_n N_\lambda \Big(\frac{3}{4}(f + f_n) - \frac{1}{2} f_n \Big) \\ &\geq \liminf_n \left(\frac{3}{4} N_\lambda(f + f_n) - \frac{1}{2} N_\lambda(f_n) \right) = N_\lambda(f) \qquad (5.3) \end{aligned}$$

Uniendo (5.2) y (5.3) se tiene $\lim_n N_\lambda((h + h_n)/2) = N_\lambda(h)$ que finalmente prueba que estas funciones cumplen $(\diamondsuit)$ gracias al lema 1.3.11. Podemos entonces aplicar lo demostrado a las funciones h_n y h y tenemos que $|h_n|$ converge puntualmente a $|h|$.

Ahora bien, si fijamos un $t \in I$, $f(t) \neq 0$ y suponemos que $f_n(t)$ no converge a $f(t)$ existe una subsucesión $f_{n_k}(t)$ que converge a $-f(t)$ pero en ese caso

$$|f(t)| = \lim_k |h_{n_k}(t)| = \frac{1}{2} \lim_k |f_{n_k}(t) + f(t)| = 0$$

que es una contradicción. Si $f(t) = 0$ no hay nada que probar. Luego la sucesión de funciones $\{f_n\}_n$ converge puntualmente a f. Así pues, (X_λ, N_λ) es τ_p-LUR y terminamos la prueba. $\square$

Bibliografía

[1] R. D. Anderson. Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72:515–519, 1966.

[2] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires.* Monogr. Mat. 1, Vol VII. Warszawa: Subwncji Funduszu Narodowej, 1932.

[3] C. Bessaga and A. Pełczyński. Some remarks on homeomorphisms of Banach spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 8:757–761, 1960.

[4] C. Bessaga and A. Pełczyński. Some remarks on homeomorphisms of F-spaces. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 10:265–270, 1962.

[5] C. Bessaga and A. Pełczyński. *Selected topics in infinite-dimensional topology.* PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975. Monografie Matematyczne, Tom 58. [Mathematical Monographs, Vol. 58].

[6] F. K. Dashiell and J. Lindenstrauss. Some examples concerning strictly convex norms on $C(K)$ spaces. *Israel J. Math.*, 16:329–342, 1973.

[7] M. M. Day. Strict convexity and smoothness of normed spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78:516–528, 1955.

[8] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler. *Smoothness and renormings in Banach spaces*, volume 64 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[9] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant, and V. Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8. Springer-Verlag, New York, 2001.

[10] M. Fréchet. *Les espaces abstraits.* Les Grands Classiques Gauthier-Villars. [Gauthier-Villars Great Classics]. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1989. Reprint of the 1928 original.

[11] A. Grothendieck. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$. *Canadian J. Math.*, 5:129–173, 1953.

[12] S. Kaczmarz. The homeomorphy of certain spaces. *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.*, A(4/8):145–148, 1933.

[13] M. I. Kadec. On homeomorphism of certain Banach spaces. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 92:465–468, 1953.

[14] M. I. Kadec. On topological equivalence of uniformly convex spaces. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, 10(4(66)):137–141, 1955.

[15] M. I. Kadec. On strong and weak convergence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 122:13–16, 1958.

[16] M. I. Kadec. On the connection between weak and strong convergence. *Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn. RSR*, 1959:949–952, 1959.

[17] M. I. Kadec. The topological equivalence of certain cones in a Banach space. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 162:1241–1244, 1965.

[18] M. I. Kadec. Topological equivalence of all separable Banach spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 167:23–25, 1966.

[19] M. I. Kadec. A proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 1:61–70, 1967.

[20] V. Klee. Mappings into normed linear spaces. *Fund. Math.*, 49:25–34, 1960/1961.

[21] K. Kuratowski. *Topology. Vol. I.* New edition, revised and augmented. Translated from the French by J. Jaworowski. Academic Press, New York, 1966.

[22] K. Kuratowski. *Topology. Vol. II.* New edition, revised and augmented. Translated from the French by A. Kirkor. Academic Press, New York, 1968.

[23] S. Mazur. Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionels. *Studia*, 1:83–85, 1929.

[24] A. Moltó, J. Orihuela, S. Troyanski, and M. Valdivia. A non linear transfer technique. 2004.

[25] A. Pełczyński. Projections in certain Banach spaces. *Studia Math.*, 19:209–228, 1960.

[26] M. H. Stone. Note on integration. II. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 34:447–455, 1948.

[27] H. Toruńczyk. Characterizing Hilbert space topology. *Fund. Math.*, 111(3):247–262, 1981.

[28] S Troyanski. On topological equivalence of spaces $c_0(\aleph)$ and $l(\aleph)$. *Bull. Aca. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 15:389–396, 1967. Russian original: Die topologische Äquivalenz der Räume $C_0(\aleph)$ und $l(\aleph)$.

[29] J. van Mill. *Infinite-dimensional topology*, volume 43 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989. Prerequisites and introduction.