Espacios de Banach no separables, compacidad y renormamiento

Antonio Avilés López

22 de octubre de 2005

ESPACIOS DE BANACH NO SEPARABLES, COMPACIDAD Y RENORMAMIENTO

D. Pascual Lucas Saorín, Catedrático de Universidad del Área de Geometría y Topología y Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral “ESPACIOS DE BANACH NO SEPARABLES, COMPACIDAD Y RENORMAMIENTO” ha sido realizada por D. Antonio Avilés López, bajo la inmediata dirección y supervisión de D. Bernardo Cascales Salinas y D. José Orihuela Calatayud, y que el Departamento ha dado su conformidad para que sea presentada ante la Comisión de Doctorado.

En Murcia, a ...

Fdo: Pascual Lucas Saorín

ESPACIOS DE BANACH NO SEPARABLES, COMPACIDAD Y RENORMAMIENTO

D. Bernardo Cascales Salinas y D. José Orihuela Calatayud, Catedráticos de Universidad del Área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZAN:

La presentación de la Tesis Doctoral "ESPACIOS DE BANACH NO SEPARABLES, COMPACIDAD Y RENORMAMIENTO" realizada por D. Antonio Avilés López, bajo nuestra inmediata dirección y supervisión en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del Grado de Doctor por la Universidad de Murcia.

En Murcia, a ...

Fdo: Bernardo Cascales Salinas   Fdo: José Orihuela Calatayud

Esta memoria ha sido elaborada durante el período de disfrute de una Beca de Postgrado (referencia AP2002-0127) del Programa Nacional de Formación de Profesorado Universitario del Ministerio de Educación y Ciencia. Dos ayudas complementarias de dicho programa han permitido al autor realizar sendas estancias en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Varsovia, (mayo-julio de 2004), y en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Politécnica Nacional de Atenas (febrero-julio de 2005).

Esta investigación también ha estado financiada parcialmente por los siguientes proyectos: “Espacios de Banach: compacidad, fragmentabilidad, renormamiento y diferenciabilidad” (BFM2002-01719, Ministerio de Ciencia y Tecnología) y“Geometría y topología infinito dimensional en espacios de Banach” (00690/PI/04, Fundación Séneca).

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a mis directores Bernardo Cascales y Pepe Orihuela, cuya presencia y ayuda han sido determinantes en la realización de este trabajo. También quiero mencionar especialmente a otras dos personas cuya influencia puede considerarse esencial en esta tesis: Spiros Argyrós, sin el cual el capítulo 4 no existiría y Witek Marciszewski, del que tengo que decir que tres lúcidas conversaciones con él son responsables en origen de una buena parte del enfoque y los contenidos del trabajo.

Además de Witek, hay otras dos personas de Polonia que quiero mencionar: Rafał Górak y Roman Pol. Discutiendo con ellos tuve la oportunidad de aprender y disfrutar muchas matemáticas y en general, hicieron que mi estancia en Varsovia resultara una experiencia enormemente positiva.

Un agradecimiento especial merecen también toda la gente que me enseñó tantísimas matemáticas y me hizo sentir realmente como en casa durante mi visita a Atenas: Spiros Argyrós, Alekos Arvanitakis, Pandelís Dodós, Vassilis Kanellópoulos, Haris Raikóftsalis y Yolanda Moreno.

No creo que hubiera podido mantener un mínimo equilibrio psicológico durante este tiempo sin el apoyo de una parte de mis compañeros Antonio José Guirao y José Rodríguez (a los que he obligado con frecuencia a hacer de secretarios no pagados o de audiencia de charlas en las que estaban moderadamente interesados) y de otro de toda mi familia.

Quiero hacer extensivo mi reconocimiento a todo el grupo de Análisis Funcional, al Departamento y la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia y también de las otros lugares que me han acogido en este periodo: la Universidad de Varsovia y la Universidad Politécnica Nacional de Atenas.

Acknowledgements

I want to express my gratitude to my advisors, Bernardo Cascales and Pepe Orihuela, whose presence and help have been decisive to carry out this work. I also want to mention specially other two people whose influence on the present work may be considered as essential: Spiros Argyros, without whom chapter 4 would not exist, and Witek Marciszewski, from whom I must say that three sharp conversations with him are responsible in origin for much of the contents and flavor of this work.

Together with Witek, there are other two people from Poland I want to mention: Rafał Górak and Roman Pol. I had very exciting and instructive conversations about mathematics with them and they made my stay in Warsaw a very nice time.

My special thanks go also to all the people in Greece who taught me εκπληκτικά *so much mathematics and made me feel* σοβαρά *at home during my visit to Athens: Spiros Argyros, Alekos Arvanitakis, Pandelis Dodos, Vassilis Kanellopoulos, Haris Raikoftsalis and Yolanda Moreno.*

I don't think I would have managed to keep a minimal psychological balance during all this period without the support of my colleagues Antonio José Guirao and José Rodríguez (to whom I often obliged to become unpaid secretaries or audience of subjects on which they were moderately interested) and of my whole family.

I extend my gratitude to the whole research group of Functional Analysis and the Department and Faculty of Mathematics of the University of Murcia and the other places where I stayed while performing this work: the University of Warsaw and the National Technical University of Athens.

Contenidos

Introducción

El presente trabajo se estructura en cuatro capítulos. En los tres primeros se consideran diferentes cuestiones en torno a las topologías débil y débil* de los espacios de Banach y de los compactos asociados a éstas mientras que en el último capítulo se tratan ciertos problemas de renormamiento de espacios de Banach.

En el Capítulo 1 se estudian algunos problemas sobre compactos de Eberlein uniformes. En la Sección 1.1 se trata la estructura del compacto $B(\Gamma)$, la bola del espacio de Hilbert $\ell_2(\Gamma)$ en la topología débil (que es a su vez homeomorfo a la bola de $\ell_p(\Gamma)$ para $1 < p < +\infty$). El resultado principal es el siguiente:

Teorema 3 *El compacto $B(\Gamma)$ es imagen continua del compacto $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$.*

Aquí, $\sigma_n(\Gamma)$ es el subconjunto compacto de $\{0,1\}^\Gamma$ formado por las tuplas cuyo soporte tiene cardinalidad menor o igual que n. Este resultado hay que ponerlo en relación con un ejemplo de Bell [16] que, respondiendo a una pregunta en [20], muestra que no todo compacto de Eberlein uniforme es imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$. Basándonos en este ejemplo de Bell, construimos además una norma equivalente en $\ell_p(\Gamma)$ para $1 < p < +\infty$ y $|\Gamma| > \omega$ cuya bola en la topología débil no es imagen de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$ y en particular no es homeomorfa a la bola de la norma canónica. Además, como consecuencia del Teorema 3, el compacto $B(\Gamma)$ tiene una serie de propiedades combinatorias que Bell probó en [16], [18] y [17] que comparten todas las imágenes continuas de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$.

En la Sección 1.2 se estudia la clasificación topológica de los compactos que se pueden expresar como producto numerable de espacios de tipo $\sigma_k(\Gamma)$. Denotamos estos espacios del siguiente modo: sea T el conjunto de todas las sucesiones $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ con $0 \leq \tau_n \leq \omega$. Cuando τ recorre T, $\sigma_\tau(\Gamma) = \prod_1^\infty \sigma_n(\Gamma)^{\tau_n}$ recorre todos los productos finitos o numerables de espacios $\sigma_k(\Gamma)$. Para $\tau \in T$ llamaremos $j(\tau)$ al supremo de todos los n con $\tau_n > 0$ e $i(\tau)$ al supremo de todos los n con $\tau_n = \omega$. Si $\tau_n < \omega$ para cada $n \geq 1$, entonces $i(\tau) = 0$. El resultado principal de la sección es el siguiente:

Teorema 6 *Sean $\tau, \tau' \in T$ y Γ un conjunto no numerable.*

1. *Supongamos que $j(\tau) < \omega$. En este caso, $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$ es homeomorfo a $\sigma_\tau(\Gamma)$ si y sólo si $i(\tau) = i(\tau')$ y $\tau_n = \tau'_n$ para cada $n > i(\tau)$.*
2. *Supongamos que $i(\tau) = \omega$. En este caso, si $i(\tau') = \omega$, entonces $\sigma_\tau(\Gamma)$ es homeomorfo a $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$.*

Esta clasificación no es completa y deja abierto el siguiente problema: Sea Γ un conjunto no numerable y $\tau, \tau' \in T$ tales que $j(\tau') = j(\tau) = \omega$, $i(\tau) < \omega$ y tales que existe $n \geq i(\tau)$ con $\tau_n \neq \tau'_n$. ¿Es $\sigma_\tau(\Gamma)$ homeomorfo a $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$? Por ejemplo, un caso particular de este problema es si $\prod_{i=1}^\infty \sigma_i(\Gamma)$ es homeomorfo a $\prod_{i=2}^\infty \sigma_i(\Gamma)$.

En la Sección 1.3 consideramos la estructura de los espacios de Banach $C(K)$ donde K es un producto numerable de espacios del tipo $\sigma_k(\Gamma)$. El resultado principal es el siguiente:

Teorema 13 *Sea Γ un conjunto infinito y (k_n) una sucesión de enteros positivos. Los espacios de Banach $C(\prod_{n<\omega} \sigma_{k_n}(\Gamma))$ y $C(\sigma_1(\Gamma)^\omega)$ son isomorfos.*

Para productos finitos se cumple un resultado análogo (en este caso, todos los espacios $C(\prod_{n<m} \sigma_{k_n}(\Gamma))$ son isomorfos a $c_0(\Gamma)$) como consecuencia de un resultado de Marciszewski [49]. Establecemos además el siguiente teorema, que generaliza a la vez un resultado de Benyamini, Rudin y Wage [20] y otro de Argyros y Arvanitakis [6]:

Teorema 15 *Sea K un compacto de Eberlein uniforme de peso κ. Existe un subespacio cerrado L de $\sigma_1(\kappa)^{\mathbb{N}}$ y una suprayección continua $f : L \longrightarrow K$ que admite un operador regular de promedio.*

En el Capítulo 2 estudiamos el índice $CG(X)$ que es el menor número de subconjuntos débil compactos en X cuya unión genera X y su relación con el número de Lindelöf en la topología débil $\ell(X)$, así como los índices $\ell K(X)$, $\ell\Sigma(X)$ y $Nag(X)$ que se definen como el menor peso de un espacio métrico completo, un espacio métrico o un espacio topológico Σ respectivamente para el que existe una usco $\Sigma \longrightarrow 2^{(X,w)}$. Estos índices generalizan las nociones introducidas por Talagrand [68] de espacios débilmente $\mathscr{K}$-analíticos y débilmente numerablemente determinados. La relación general entre estos índices es

$$\ell(X) \leq Nag(X) \leq \ell\Sigma(X) \leq \ell K(X) \leq CG(X)$$

Respondiendo a una pregunta de Corson [27] numerosos ejemplos han sido construidos de espacios de Banach X para los que $\ell(X) = \omega < CG(X)$ (los primeros se debieron a Pol [62] y Talagrand [68]). Nosotros probamos lo siguiente:

Teorema 36 *Sea κ un cardinal cualquiera. Existe un espacio de Banach débilmente Lindelöf determinado X (lo que implica que $\ell(X) = \omega$) tal que $CG(X) > \kappa$.*

Ejemplos de Rosenthal [66] y Argyros [31, Section 1.6] muestran la existencia de subespacios de espacios débilmente compactamente generados que no son débilmente compactamente generados. Nosotros estudiamos la relación que existe entre $CG(X), CG(Y)$ y $dens(Y)$ cuando Y es un subespacio de X:

Teorema 39 *Sean κ, τ, δ cardinales infinitos. Son equivalentes:*

1. $\tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$ *y* $\delta \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau)$.
2. *Existe un espacio de Banach X y un subespacio Y de X tales que $CG(X) = \kappa$, $CG(Y) = \tau$ y $dens(Y) = \delta$.*

Los números cardinales $\mathbf{d}(\kappa)$ y $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ están definidos en la Sección 2.1 en términos de la topología del espacio κ^ω. Para cardinales $\kappa, \tau \geq 2^\omega$, ocurre que $\mathbf{d}(\kappa) = \kappa^\omega$ y $\mathbf{b}_\kappa(\tau) = \tau$ pero para cardinales menores que el continuo el comportamiento de estas funciones es más complicado y depende fuertemente del modelo conjuntista en el que se trabaje. El hecho de que (1) implica (2) en el Teorema 39 se obtiene modificando un ejemplo de Argyros [31, Section 1.6] mientras que el recíproco se basa en el uso del índice de $\mathscr{K}$-analiticidad. Establecemos en la Sección 2.6 un resultado muy similar al Teorema 39 con respecto a la relación de los índices $\ell K(X)$ y $CG(X)$:

Teorema 38 *Sean κ, τ, δ cardinales infinitos. Son equivalentes:*

1. $\kappa \leq \tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$ *y* $\delta \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau)$.
2. *Existe un espacio de Banach X tal que $\ell K(X) = \kappa$, $CG(X) = \tau$ y $dens(X) = \delta$.*

Aquí, el hecho de que (1) implica (2) se obtiene modificando la construcción de Talagrand [68] de un espacio débilmente $\mathscr{K}$-analítico que no es débilmente compactamente generado. Algunos casos particulares de estos resultados son por ejemplo que un espacio de Banach $\mathscr{K}$-analítico (i.e. $\ell K(X) = \omega$) de peso menor que $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\omega(\omega_1)$ es débilmente compactamente generado ($CG(X) = \omega$) y existen ejemplos de carácter de densidad $\mathbf{b}$ de un subespacio de un débilmente compactamente generado y de un débil $\mathscr{K}$-analítico que no son débilmente compactamente generados.

No nos queda claro cuál es la relación precisa entre los índices $\ell K(X)$, $\ell\Sigma(X)$ y $Nag(X)$ para espacios de Banach. En [55] se da un ejemplo de un espacio topológico T tal que $Nag(T) < \ell\Sigma(T)$. Damos aquí ejemplos del mismo tipo de la forma $T = C_p(K)$ con K un compacto pero seguimos sin conocer un espacio de Banach que tenga esta propiedad. En este capítulo se desarrollan también las propiedades de los compactos de κ-Eberlein,

κ-Talagrand y κ-Gul'ko.

El capítulo 3 trata sobre compactos de Radon-Nikodým, espacios de Asplund y generalizaciones. Un espacio de Banach se dice de Asplund si todo subespacio separable tiene dual separable y un compacto se dice de Radon-Nikodým si es homeomorfo a un débil* compacto en un dual de un espacio de Asplund. Un problema planteado en [56] que todavía permanece abierto es el de si la clase de los compactos de Radon-Nikodým es cerrada para imágenes continuas. Diversos autores han abordado este problema introduciendo tres clases de compactos que generalizan a los compactos de Radon-Nikodým y que son cerradas para imágenes continuas: los compactos de casi Radon-Nikodým [9], los fuertemente fragmentables [8, p. 104] y los numerablemente inferiormente fragmentables [33]. Namioka [57] probó que las dos primeras clases son iguales y aquí probamos que en realidad las tres clases son la misma, e introducimos además una generalización: los compactos de κ-casi Radon-Nikodým para cada cardinal infinito κ. Además de los artículos mencionados, queremos citar también [50], donde se dan algunas respuestas parciales a un caso particular del problema de la imagen continua, el de si una unión de dos compactos de Radon-Nikodým es un compacto de Radon-Nikodým. Análogamente a como hacíamos en el Capítulo 2, definimos los índices en espacios de Banach $AG(X)$, el número de conjuntos de Asplund que generan X y $LF(X)$, el menor κ tal que (B_{X^*}, w^*) es de κ-casi Radon-Nikodým y probamos:

Teorema 70 *Sea X un espacio de Banach. Se verifican las siguientes relaciones:*

1. $LG(X) \leq AG(X)$
2. $AG(X) \leq \mathbf{d}(LF(X))$.
3. $dens(X) \geq \mathbf{b}_{LF(X)}(AG(X))$.

Como corolario se obtiene que un subespacio de un espacio Asplund generado de peso menor que $\mathbf{b}$ es Asplund generado (aunque en general un subespacio de un espacio Asplund generado no es Asplund generado). En relación con esto, tenemos la siguiente respuesta parcial al problema de la imagen continua de los compactos de Radon-Nikodým:

Corolario 61 *Si K es un compacto de casi Radon-Nikodým de peso menor que* $\mathbf{b}$ *entonces K es un compacto de Radon-Nikodým.*

En la Sección 3.3 probamos además lo siguiente:

Teorema 75 *Sea K compacto totalmente ordenado fragmentado por una casi métrica d. Entonces K es casi totalmente disconexo.*

Este resultado, combinado con otros de Arvanitakis [9] da otra respuesta parcial al mencionado problema de la imagen continua:

Corolario 76 *Sea K un compacto totalmente ordenado de casi Radon-Nikodým. Entonces K es un compacto de Radon-Nikodým.*

En la Sección 3.4 damos caracterizaciones de los compactos de Radon-Nikodým y de casi Radon-Nikodým en términos de la uniformidad de los compactos y en relación con la propiedad de Lindelöf de ciertas topologías. Estos resultados se hallan en la línea de [60] y [24] de relación entre la propiedad de Lindelöf y la fragmentabilidad.

Finalmente, en el Capítulo 4 tratamos algunas propiedades de renormamiento. Una norma se dice estrictamente convexa si su esfera no contiene ningún segmento no trivial, se dice que es una norma de Kadec si las topología débil y de la norma coinciden en la esfera, y se dice que es una norma LUR si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de la esfera tal que $\|\frac{x_n - x_0}{2}\|$ converge hacia 1, x_n converge en norma hacia x_0. El dual de un espacio de Asplund admite una resolución proyectiva de la identidad y por tanto una norma equivalente uniformemente localmente convexa (LUR, según las siglas en inglés) [32]. Cabe preguntarse si, más en general el dual de un espacio de Banach que no contenga a ℓ_1 admite una norma equivalente LUR. En este capítulo daremos contraejemplos a esta afirmación considerando los duales de espacios de James sobre ciertos árboles. Este problema continúa sin embargo abierto en el caso separable. Un espacio de Banach admite una norma equivalente LUR si y sólo si admite una norma equivalente Kadec y una norma equivalente estrictamente convexa [72].

En la Sección 4.2 estudiamos el caso en que el espacio de James sobre un árbol T, JT, es débilmente compactamente generado. El dual de cualquier espacio débilmente compactamente generado es estrictamente convexificable, sin embargo mostraremos que para ciertos árboles JT es débilmente compactamente generado pero sin embargo JT^* no admite ninguna norma equivalente Kadec.

Teorema 88 *Sea T un árbol que es unión numerable de anticadenas. Son equivalentes:*

1. *El árbol completado $\overline{T}$ es también unión numerable de anticadenas.*
2. *JT^* admite una norma equivalente Kadec.*
3. *JT^* admite una norma equivalente LUR.*

En la Sección 4.3 damos una condición suficiente sobre un árbol T para que JT^* no admita ni renormamiento estrictamente convexo ni renormamiento Kadec.

Teorema 91 *Sea T un árbol verificando las siguietes condiciones:*

(T1) Todo nodo de T tiene una cantidad infinita de sucesores inmediatos.

(T2) Para cada familia numerable de anticadenas $\{S_n : n < \omega\}$ existe $t \in T$ tal que $t \notin \bigcup_{n<\omega}\{u \in T : \exists s \in S_n : u \leq s\}$.

Entonces no existe ni una norma equivalente estrictamente convexa ni una norma equivalente Kadec en JT^*.

Este resultado está inspirado en una construcción de Haydon que puede encontrarse en [2] de un dual de un espacio débil Lindelöf determinado sin renormamiento estrictamente convexo (este espacio contiene sin embargo a ℓ_1). Si consideramos, como en el mencionado ejemplo de Haydon, un árbol particular construido por Todorčević [70], entonces obtenemos un espacio débilmente Lindelöf determinado JT que verifica las condiciones del Teorema 91. Como decíamos, permanece abierta la pregunta de si el dual de un espacio de Banach separable X que no contiene a ℓ_1 admite una norma equivalente LUR. Para un tal espacio X, la bola bidual $B_{X^{**}}$ es un compacto de Rosenthal separable (es decir, un conjunto puntualmente compacto de funciones de la primera clase de Baire sobre un espacio polaco) en la topología débil*. Por tanto, este problema es un caso particular de otro más general: ¿Es $C(K)$ renormable LUR siempre que K sea un compacto de Rosenthal separable? Todorčević [71] ha construido recientemente un compacto de Rosenthal no separable K tal que $C(K)$ no es renormable LUR, mientras que Haydon, Moltó y Orihuela [40] han probado que si K es un conjunto compacto separable de funciones de la primera clase de Baire con una cantidad numerable de discontinuidades, entonces $C(K)$ es renormable LUR.

El contenido de esta tesis se encuentra en gran medida (aunque no totalmente) recogido en los trabajos [14] (Sección 1.1), [10] (Secciones 1.2 y 1.3), [11] (Capítulo 2), [12] (versión para $\kappa = \omega$ de las Secciones 3.1 y 3.2) y [13] (Capítulo 4). El capítulo 1 fue realizado durante una visita a la Universidad de Varsovia entre los meses mayo y julio de 2004, mientras que el capítulo 4 se llevó a cabo en la Universidad Politécnica Nacional de Atenas entre los meses de febrero y julio de 2005.

Introduction

This work is structured in four chapters. In the first three we consider different topics about the weak and weak* topologies of Banach spaces and the compact spaces associated to them, while in the fourth chapter we deal with certain problems of the renorming of Banach spaces.

In Chapter 1 we study several problems about uniform Eberlein compact spaces. In Section 1.1 we treat the structure of the compact $B(\Gamma)$, the ball of the Hilbert space $\ell_2(\Gamma)$ in the weak topology (which is homeomorphic to the ball of $\ell_p(\Gamma)$ for $1 < p < +\infty$). The main result is the following:

Theorem 3 *The compact space $B(\Gamma)$ is a continuous image of $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$.*

Here, $\sigma_n(\Gamma)$ is the compact subset of $\{0,1\}^\Gamma$ formed by the tuples whose support has cardinality less than or equal to n. This result must be compared with an example of Bell [16] which, answering a question by Benyamini, Rudin and Wage [20], shows that not all uniform Eberlein compact spaces are continuous images of $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$. Based on this example by Bell, we construct an equivalent norm on $\ell_p(\Gamma)$ for $1 < p < +\infty$ and $|\Gamma| > \omega$ whose ball in the weak topology is not a continuous image of $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$ and in particular it is not homeomorphic to the ball of the canonical norm. In addition, as a consequence of Theorem 3, the compact $B(\Gamma)$ has a number of combinatorial properties which have been proved by Bell in [16], [18] and [17] to be shared by all continuous images of $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$.

In Section 1.2 we study the topological classification of the compact spaces which can be expressed as a countable product of spaces of the form $\sigma_k(\Gamma)$. We denote these spaces in the following way: Let T be the set of all sequences $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ with $0 \leq \tau_n \leq \omega$. When τ runs over T, $\sigma_\tau(\Gamma) = \prod_1^\infty \sigma_n(\Gamma)^{\tau_n}$ runs over all finite and countable products of spaces $\sigma_k(\Gamma)$. For $\tau \in T$, we call $j(\tau)$ to the supremum of all n with $\tau_n > 0$ and $i(\tau)$ to the supremum of all n with $\tau_n = \omega$. If $\tau_n < \omega$ for all $n \geq 1$, then $i(\tau) = 0$. The main result of this section is the following:

Theorem 6 *Let $\tau, \tau' \in T$ and Γ an uncountable set.*

1. *Suppose that $j(\tau) < \omega$. In this case, $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$ is homeomorphic to $\sigma_\tau(\Gamma)$ if and only if $i(\tau) = i(\tau')$ and $\tau_n = \tau'_n$ for every $n > i(\tau)$.*
2. *Suppose that $i(\tau) = \omega$. In this case, if $i(\tau') = \omega$, then $\sigma_\tau(\Gamma)$ is homeomorphic to $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$.*

This classification is not complete and leaves open the following problem: Let Γ be an uncountable set and $\tau, \tau' \in T$ such that $j(\tau') = j(\tau) = \omega$, $i(\tau) < \omega$ and such that there exists $n \geq i(\tau)$ with $\tau_n \neq \tau'_n$. Is $\sigma_\tau(\Gamma)$ homeomorphic to $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$? For example, a particular case of this problem is whether $\prod_{i=1}^\infty \sigma_i(\Gamma)$ is homeomorphic to $\prod_{i=2}^\infty \sigma_i(\Gamma)$.

In Section 1.3 we consider the structure of the Banach spaces $C(K)$ where K is a countable product of spaces of the form $\sigma_k(\Gamma)$. The main result is the following:

Theorem 13 *Let Γ be an infinite set and (k_n) a sequence of positive integers. The Banach spaces $C(\prod_{n<\omega} \sigma_{k_n}(\Gamma))$ and $C(\sigma_1(\Gamma)^\omega)$ are isomorphic.*

For finite products holds a similar result (in this case, all spaces $C(\prod_{n<m} \sigma_{k_n}(\Gamma))$ are isomorphic to $c_0(\Gamma)$) as a consequence of a result of Marciszewski [49]. We establish in addition the following theorem, which generalizes simultaneously a result of Benyamini, Rudin and Wage [20] and another of Argyros and Arvanitakis [6]:

Theorem 15 *Let K be a uniform Eberlein compact of weight κ. There exists a closed subset L of $\sigma_1(\kappa)^{\mathbb{N}}$ and a continuous surjection $f : L \longrightarrow K$ that admits a regular averaging operator.*

In Chapter 2 we study the index $CG(X)$ which is the least number of weakly compact subsets of X whose union generates X and its relation with the Lindelöf number in the weak topology $\ell(X)$, as well as with the indices $\ell K(X)$, $\ell\Sigma(X)$ and $Nag(X)$ which are defined as the least weight of complete metric space, a metric space or a topological space Σ respectively such that there exists an usco $\Sigma \longrightarrow 2^{(X,w)}$. These indices generalize the notions introduced by Talagrand [68] of spaces weakly $\mathscr{K}$-analytic and weakly countably determined. The general relation between these indices is

$$\ell(X) \leq Nag(X) \leq \ell\Sigma(X) \leq \ell K(X) \leq CG(X)$$

Answering a question by Corson [27] many examples have been constructed of Banach spaces X with $\ell(X) = \omega < CG(X)$ (the first are due to Pol [62] and Talagrand [68]). We prove the following:

Theorem 36 *Let κ be any cardinal. There exists a weakly Lindelöf determined Banach space X (which implies that $\ell(X) = \omega$) such that $CG(X) > \kappa$.*

Examples of Rosenthal [66] and Argyros [31, Section 1.6] show the existence of subspaces of weakly compactly generated spaces which are not weakly compactly generated. We study the relation between $CG(X)$, $CG(Y)$ and $dens(Y)$ when Y is a subspace of X:

Theorem 39 *Let κ, τ, δ be infinite cardinals. They are equivalent:*

1. $\tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$ *and* $\delta \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau)$.
2. *There exists a Banach space X and a subspace Y of X such that $CG(X) = \kappa$, $CG(Y) = \tau$ and $dens(Y) = \delta$.*

The cardinal numbers $\mathbf{d}(\kappa)$ and $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ are defined in Section 2.1 in terms of the topology of the space κ^ω. For cardinals $\kappa, \tau \geq 2^\omega$, it happens that $\mathbf{d}(\kappa) = \kappa^\omega$ and $\mathbf{b}_\kappa(\tau) = \tau$ but for cardinals below the continuum the behavior of these functions is more complicated and heavily depends on the model of set theory on which we work. The fact that (1) implies (2) in Theorem 39 is obtained by modifying an example by Argyros [31, Section 1.6] while the converse is based on the usage of the index of $\mathscr{K}$-analyticity. We establish in Section 2.6 a very similar result to Theorem 39 with respect to the relation between $\ell K(X)$ and $CG(X)$:

Theorem 38 *Let κ, τ, δ be infinite cardinals. They are equivalent:*

1. $\kappa \leq \tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$ *and* $\delta \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau)$.
2. *There exists a Banach space X such that $\ell K(X) = \kappa$, $CG(X) = \tau$ and $dens(X) = \delta$.*

Here, the fact that (1) implies (2) is obtained by modifying the construction by Talagrand [68] of a weakly $\mathscr{K}$-analytic space which is not weakly compactly generated. Some particular cases of these results say for instance that any weakly $\mathscr{K}$-analytic Banach space (i.e. $\ell K(X) = \omega$) of weight less than $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\omega(\omega_1)$ is weakly compactly generated ($CG(X) = \omega$) and there exist examples of density character $\mathbf{b}$ of a subspace of a weakly compactly generated space and of a weakly $\mathscr{K}$-analytic space which are not weakly compactly generated.

It is not clear for us which is the precise relation between the indices $\ell K(X)$, $\ell\Sigma(X)$ and $Nag(X)$ for Banach spaces. In [55] an example is given of a topological space T such that $Nag(T) < \ell\Sigma(T)$. We give here examples of the same kind of the form $T = C_p(K)$ with K compact but still we do not know any Banach space with this property. In this chapter we develop also the properties of the κ-Eberlein, κ-Talagrand and κ-Gul'ko compacta.

Chapter 3 deals with Radon-Nikodým compacta, Asplund spaces and generalizations. A Banach space is said to be an Asplund space if every separable subspace has separable dual and a compact space is said to be Radon-Nikodým compact if it is homeomorphic to a weak* compact subset of the dual of an Asplund space. A problem stated in [56] which is still open is whether the class of Radon-Nikodým compacta is closed under continuous images. Several authors have addressed this problem and have introduced three classes which generalize Radon-Nikodým compacta and which are closed under continuous images: quasi Radon-Nikodým [9], strongly fragmentable [8, p. 104] and countably lower fragmentable [33]. Namioka [57] proved that the two first classes are equal and here we show that indeed the three classes are the same, and we introduce in addition a generalization: the κ-quasi Radon-Nikodým compacta for every infinite cardinal κ. Apart from the mentioned papers, we want to cite also [50], where some partial answer to a particular case of problem of the continuous image are given: the problem whether the union of two Radon-Nikodým compacta is Radon-Nikodým compact. In an analogous way as we did in Chapter 2 we define indices in Banach spaces $AG(X)$, the number of Asplund sets which generate X and $LF(X)$ the least κ such that (B_{X^*}, w^*) is a κ-casi Radon-Nikodým compact and we prove:

Theorem70 *Let X be a Banach space. The following hold:*

1. $LG(X) \leq AG(X)$
2. $AG(X) \leq \mathbf{d}(LF(X))$.
3. $dens(X) \geq \mathbf{b}_{LF(X)}(AG(X))$.

As a Corollary we obtain that a subspace of an Asplund generated space of weight less than **b** is Asplund generated (although in general a subspace of an Asplund generated space is not Asplund generated). In relation with this, we have the following partial answer to the problem of the continuous image of Radon-Nikodým compacta:

Corollary 61 *If K i a quasi Radon-Nikodým compact of weight less than* **b***, then K is a Radon-Nikodým compact.*

In Section 3.3 we also prove the following:

Theorem 75 *Let K be a totally ordered compact which is fragmented by a quasi metric d. Then K is almost totally disconnected.*

This result, combined with others of Arvanitakis [9] gives another partial answer to the mentioned problem of the continuous images:

Corollary 76 *Let K be a linearly ordered quasi Radon-Nikodým compact. Then K is Radon-Nikodým compact.*

In Section 3.4 we give characterizations of Radon-Nikodým and quasi Radon-Nikodým compacta in terms of the uniformity of the compact and in relation with the Lindelöf property of certain topologies. These results are in the line of [60] and [24] of the relation between the Lindelöf property and fragmentability.

Finally, in Chapter 4 we treat some renorming properties. A norm is said to be strictly convex if its sphere contains no nontrivial segment, it is said to be Kadec if the weak and the norm topologies coincide in the sphere and it is said to be a LUR norm if for every sequence $\{x_n\}$ of points of the sphere such that $\|\frac{x_n-x_0}{2}\|$ converges to 1, x_n converges in norm to x_0. The dual of an Asplund space admits a projective resolution of the identity and hence an equivalent locally uniformly convex (LUR) norm [32]. It is a natural question whether more generally the dual of a Banach space not containing ℓ_1 has an equivalent LUR norm. In this chapter we give counterexamples to this statement by considering the duals of James tree spaces over certain trees. This problem however is still open in the separable case. A Banach space admits an equivalent LUR norm if and only if it admits an equivalente Kadec norm and an equivalent strictly convex norm [72].

In Section 4.2 we study the case when the James tree space over a tree T, JT, is weakly compactly generated. The dual of every weakly compactly generated space is strictly convexifiable, but we show that for certain trees JT is weakly compactly generated but JT^* does not have an equivalent Kadec norm.

Theorem 88 *Let T be a tree which is countable union of antichains. They are equivalent:*

1. *The completed tree $\overline{T}$ is also countable union of antichains.*
2. *JT^* admits an equivalent Kadec norm.*
3. *JT^* admits an equivalent LUR norm.*

In Section 4.3 we give a sufficient condition on a tree T in order JT^* not to admit neither a strictly convex nor a Kadec renorming.

Theorem 91 *Let T be a tree verifying the following conditions:*

(T1) *Every node of T has infinitely many immediate successors.*

(T2) *For every countable family of antichains $\{S_n : n < \omega\}$ there exists $t \in T$ such $t \notin \bigcup_{n<\omega}\{u \in T : \exists s \in S_n : u \leq s\}$.*

Then there is neither an equivalent strictly convex norm nor an equivalent Kadec norm for the space JT^*.

This result is inspired in a construction by Haydon which can be found in [2] of a dual of a weakly Lindelöf determined space without strictly convex renorming (this space contains nevertheless ℓ_1). If we consider, as in the mentioned example of Haydon, a particular tree constructed by Todorčević [70], then we obtain weakly Lindelöf determined space JT which verifies the conditions of Theorem 91.

As we said, it remains open the question whether the dual of a separable X which does not contian ℓ_1 admits an equivalent LUR norm. For such X, the bidual ball $B_{X^{**}}$ is a separable Rosenthal compact (that is a pointwise compact set of first Baire one functions over a Polish space) in the weak* topology. Hence this problem is a particular case of the more general: Is $C(K)$ LUR renormable whenever K is a separable Rosenthal compact? Todorčević [71] has recently constructed a non separable Rosenthal compact K such that $C(K)$ is not LUR renormable, while Haydon, Moltó and Orihuela [40] have proven that if K is compact set of first Baire one functions with a countable number of discontinuities, then $C(K)$ is LUR renormable.

The contents of this Ph. D. thesis can be found to a great extent (although not totally) in the works [14] (Section 1.1), [10] (Sections 1.2 and 1.3), [11] (Chapter 2), [12] (version for $\kappa = \omega$ of Sections 3.1 and 3.2), and [13] (Chapter 4). Chapter 1 was during a visit to the University of Warsaw between the months of May and July of 2004, and Chapter 4 was done in the National Technical University of Athens between the months of February and July of 2005.

Preliminares

Recopilamos brevemente algunos materiales básicos de teoría combinatoria de conjuntos, topología y espacios de Banach. No pretendemos hacer una exposición sistemática ni exhaustiva, sino simplemente fijar terminología y notación para facilitar la tarea del lector. Como referencias generales mencionamos los textos de Kunen [46] y Jech [42] para teoría de conjuntos, los de Engelking [29], Kelley [44] y Munkres [54] sobre topología y [34] sobre espacios de Banach.

Conjuntos ordenados

Una relación $\leq$ en un conjunto X se dice que es una relación de orden parcial (o simplemente una relación de orden) si verifica las siguientes tres propiedades para todo $x,y,z \in X$:

1. $x \leq x$.
2. Si $x \leq y$ e $y \leq x$ entonces $x = y$.
3. Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$.

Fijemos un conjunto ordenado $(X, \leq)$ (es decir un conjunto X y una relación de orden $\leq$ en X).

- Dos elementos $x,y \in X$ se dicen *comparables* si o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$.
- Dos elementos $x,y \in X$ se dicen *incomparables* si no son comparables.
- Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es una *cadena* si cada par de elementos de A son comparables.
- Un subconjunto $A \subset X$ se dice que es una *anticadena* si cada par de elementos distintos de A son incomparables.
- Sean $a, b \in X$.
    - Escribimos $a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$.
    - $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$,
    - $[a,b[= \{x : a \leq x < b\}$,
    - $]a,b] = \{x : a < x \leq b\}$,

  - $]a,b[=\{x : a < x < b\}$,
  - $[a,+\infty[=\{x : a \leq x\}$,
  - $]a,+\infty[=\{x : a < x\}$,
  - $]-\infty,b]=\{x : x \leq b\}$,
  - $]-\infty,b[=\{x : x < b\}$.
- Un elemento $y \in X$ se dice *sucesor inmediato* de y si $x < y$ y $]x,y[=\emptyset$.
- Sea $A \subset X$ y $a \in X$.
  - a es un elemento *minimal* de A si $A\cap]-\infty,a]=\{a\}$.
  - a es un elemento *maximal* de A si $A\cap[a,+\infty)=\{a\}$.
  - a es una *cota inferior* de A si $A \subset [a,+\infty)$.
  - a es una *cota superior* de A si $A \subset]-\infty,a]$.
  - a es el *mínimo* de A, $a=\text{mín}(A)$, si a es una cota inferior de A y $a \in A$.
  - a es el *máximo* de A, $a=\text{máx}(A)$, si a es una cota superior de A y $a \in A$.
  - a es el *ínfimo* de A, $a=\inf(A)$, si a es el máximo del conjunto de las cotas inferiores de A.
  - a es el *supremo* de A, $a=\sup(A)$, si a es el mínimo del conjunto de las cotas superiores de A.
- $(X,\leq)$ se dice un conjunto *totalmente ordenado* si todo par de elementos de X es comparable.
- $(X,\leq)$ se dice un conjunto *bien ordenado* si todo subconjunto no vacío de X tiene un mínimo.
- $(X,\leq)$ se dice que es un *árbol* si $]-\infty,x[$ está bien ordenado para todo $x \in X$.
- $(X,\leq)$ se dice un conjunto ordenado *completo* si todo subconjunto A de X tiene un supremo (o equivalentemente, si todo subconjunto A de X tiene un ínfimo). Nótese que con esta definición $\mathbb{R}$ no es completo pero $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ sí lo es.
- Si Y es un subconjunto de X, se dice que $(X,\leq)$ es la *compleción de Dedekind* de $(Y,\leq)$ si se cumplen las siguientes condiciones:
  - $(X,\leq)$ es completo.
  - Para cada $x \in X$ existe $A \subset Y$ tal que $x=\sup(A)$.
  - Para cada $A \subset Y$ y $a \in Y$ tal que a es el supremo de A dentro de Y, entonces a también es el supremo de A dentro de X.

  Dado un conjunto ordenado Y existe una (salvo isomorfismo) única compleción de Dedekind $\overline{Y} \supset Y$. Dicha compleción puede construirse como $\overline{Y}=\{\text{lb}_Y(A) : A \subset Y\}$ con el orden $\subseteq$, donde $\text{lb}_Y(A)$ denota el conjunto de las cotas inferiores de un conjunto A en Y. El conjunto Y se identifica dentro de $\overline{Y}$ por la aplicación $y \mapsto]-\infty,y]=\text{lb}_Y(\{y\})$.

El axioma de elección

Esta trabajo se inscribe en el marco de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel más el axioma de elección, conocida por las siglas ZFC. Cuando un resultado se afirma consistente, nos referimos en todo momento a su consistencia con ZFC. Recordamos el enunciado del axioma de elección y dos de sus formas equivalentes bajo ZF, que usaremos en diversas ocasiones:

- **Axioma de elección.** Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos no vacíos indicada en el conjunto I, entonces existe una función f con dominio I tal que $f(i) \in X_i$ para todo $i \in I$.
- **Principio de buena ordenación de Zermelo.** Para todo conjunto X existe una relación de buen orden en X.
- **Lema de Zorn.** Si X es un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena de X tiene una cota superior, entonces existe un elemento $x \in X$ maximal en X.

Números ordinales

Un conjunto α se dice que es un *ordinal* si se verifican las dos condiciones siguientes:

1. Si $\beta \in \alpha$ entonces $\beta \subset \alpha$.
2. α está bien ordenado por la relación $x \leq y$ si $x \in y$ ó $x = y$.

Recordamos también algunos hechos y conceptos básicos en relación con los ordinales

- Cada conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$ es isomorfo a un ordinal $(\alpha, \leq)$.
- Los ordinales se ordenan por pertenencia (o equivalentemente por inclusión): $\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$ si y sólo si $\alpha \subsetneq \beta$.
- Cada ordinal α es igual al conjunto de los ordinales que lo preceden $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.
- Los ordinales están bien ordenados, en el sentido de que si A es un conjunto o una clase no vacía formada por ordinales entonces existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\beta \in A$.
- Los primeros ordinales son $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$... $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales, que denotaremos indistintamente por ω ó $\mathbb{N}$.

Dos conjuntos A y B se dicen equipotentes si existe una aplicación biyectiva de A en B. Un ordinal κ se dice que es un *cardinal* si κ no es equipotente a ningún ordinal $\alpha < \kappa$. La *cardinalidad* de un conjunto A se denota por $|A|$ y se define como el menor ordinal α (o equivalentemente como el único cardinal α) tal que A y α son equipotentes.

El hecho de que los cardinales formen una subclase de los ordinales podría provocar algunas confusiones. Nótese por ejemplo que en cualquier expresión del tipo $\bigcup_{\lambda<\kappa} A_\lambda$ el subíndice λ recorre todos los *ordinales* menores que κ y no sólo los cardinales, aun cuando κ sea un cardinal. Así mismo, en este trabajo todas las expresiones como $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ o α^β se refieren siempre a operaciones entre cardinales y nunca entre ordinales, con la única excepción de la expresión $\alpha+1$ que usamos para denotar el ordinal sucesor de α, $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$. Recordamos la definición de estas operaciones: sean $\{\kappa_i\}_{i\in I}$, κ y τ cardinales

- $\sum_{i\in I}\kappa_i = |\bigcup_{i\in I}\kappa_i\times\{i\}|$
- $\prod_{i\in I}\kappa_i = |\prod_{i\in I}\kappa_i|$
- $\kappa^\tau = |\kappa^\tau|$, es decir, la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de τ en κ.

La *cofinalidad* de un cardinal κ, denotada por $cof(\kappa)$ es el menor cardinal τ tal que κ es el supremo de una familia de cardinales $\{\kappa_\alpha : \alpha<\tau\}$ tales que $\kappa_\alpha<\kappa$ para cada α. Un cardinal κ se dice *regular* si $cof(\kappa)=\kappa$. En general la cofinalidad de un conjunto ordenado X es el menor cardinal de un subconjunto de X que no posee cotas superiores en X.

Espacios topológicos

En este trabajo todos los espacios topológicos serán *completamente regulares*, es decir, homeomorfos a algún subespacio de un producto de rectas reales $\mathbb{R}^\Gamma$ para algún conjunto Γ.

Sean X un espacio topológico, $Y\subset X$ y $x\in X$.

- Un subconjunto de X es *cerrado-abierto* o *clopen* si es a la vez cerrado y abierto. Un espacio se dice *conexo* si no contiene ningún cerrado-abierto salvo $\emptyset$ y X y se dice *totalmente disconexo* si para cada $x,y\in X$ diferentes existe un cerrado-abierto U tal que $U\cap\{x,y\}=\{x\}$.
- La *adherencia* o *clausura* de Y se denota por $\overline{Y}$, Y es denso en X si $\overline{Y}=X$.
- Un *entorno* de x es un conjunto A que contiene un abierto U tal que $x\in U$. Un *entorno* de Y es un conjunto A que contiene un abierto U tal que $Y\subset U$.
- Y es un *retracto* de X si existe una aplicación continua y suprayectiva $p: X\longrightarrow Y$ (la *retracción*) tal que $p(y)=y$ para todo $y\in Y$.
- Una *base de entornos* de x en X es una familia $\mathscr{U}$ de entornos de X tal que para cada entorno V de x existe $U\in\mathscr{U}$ tal que $U\subset V$.
- Una *base* para X es una familia $\mathscr{U}$ de abiertos de X tal que $\mathscr{U}$ es una familia de entornos de z para todo $z\in X$, o equivalentemente, si cada abierto de X puede expresarse como unión de elementos de $\mathscr{U}$.

- Un subconjunto A de X se dice un subconjunto F_σ si es unión numerable de cerrados y se dice G_δ si es intersección numerable de abiertos. Si X es compacto, entonces un subconjunto A de X es cerrado y G_δ si y sólo si existe una función continua $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $A = f^{-1}(0)$.
- Sea Z un conjunto y $d : Z \times Z \longrightarrow [0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ una aplicación. Consideramos las siguientes propiedades:
  1. $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$, para todo $x,y \in Z$,
  2. $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x,y \in Z$,
  3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x,y,z \in Z$.

  Si d verifica 1 y 2, diremos que d es una *casi métrica* o una *simétrica*, si verifica 2 y 3 diremos que es una *pseudométrica* y si verifica 1,2 y 3 diremos que es una *métrica*. En este último caso d induce una topología en Z en la que las bolas $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ forman una base de entornos de cada $x \in Z$.
- una función $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ siendo X se dice que fragmenta X si para cada subconjunto (cerrado) L de X y cada $\varepsilon > 0$ existe un abierto relativo no vacío U de L de f-diámetro menor que ε, es decir $\sup\{f(x,y) : x,y \in U\} < \varepsilon$.
- El *peso* de X es la menor cardinalidad de una base de X:

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \text{ es una base de } X\}$$

- El *carácter de densidad* de X es la menor cardinalidad de un subconjunto denso de X:

$$dens(X) = \text{mín}\{|A| : A \text{ es un subconjunto denso de } X\}$$

- En general $dens(X) \leq w(X)$ y si X es un espacio métrico $dens(X) = w(X)$.
- X es *localmente compacto* si cada punto de X tiene un entorno compacto. En este caso, la compactificación por un punto de X, denotada por $\alpha(X)$ es el espacio $\alpha(X) = X \cup \{\infty\}$ en el que X es abierto y una base de entornos de ∞ está formada por los conjuntos $\alpha(X) \setminus K$ con K un compacto de X. El punto ∞ se llama punto del infinito.
- Si $\{X_i\}_{i \in I}$ son espacios topológicos, su *suma discreta* o *unión discreta*, denotada por $\bigoplus_{i \in I} X_i$, es el espacio $\bigcup_{i \in I} X_i$ (suponemos que $X_i \cap X_j = \emptyset$ si $i \neq j$) cuyos abiertos son los conjuntos de la forma $\bigcup_{i \in I} U_i$ con cada U_i abierto en X_i.
- Si Σ es otro espacio topológico, diremos que una aplicación $\phi : \Sigma \longrightarrow 2^X$ de Σ en las partes de X es una *usco* si se verifican las siguientes condiciones:
  1. $\phi(\sigma)$ es un subconjunto compacto no vacío de X para cada $\sigma \in \Sigma$.
  2. ϕ es superiormente semicontinua, es decir, para cada abierto U de X, el conjunto $\{\sigma \in \Sigma : \phi(\sigma) \subseteq U\}$ es un subconjunto abierto de Σ.

En esta situación, si A es un subconjunto de Σ, denotaremos $\phi(A) = \bigcup\{\phi(\sigma) : \sigma \in A\}$. La notación $\phi : \Sigma \twoheadrightarrow 2^X$ indicará que la usco $\phi : \Sigma \longrightarrow 2^X$ es suprayectiva, es decir que $\phi(\Sigma) = X$.

- Dado un conjunto Z y $A, B \subset Z \times Z$, $A \circ B = \{(x,z) : \exists y \in Z : (x,y) \in A, (y,z) \in B\}$, $A^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in A\}$. La *diagonal* de $Z \times Z$ es el conjunto $\Delta_Z = \{(x,y) \in Z \times Z : x = y\}$.
- Una *uniformidad* en Z es una familia no vacía $\mathscr{U}$ de subconjuntos de $Z \times Z$ verificando las siguientes condiciones:
  1. $\Delta_Z \subset U$ para todo $U \in \mathscr{U}$.
  2. Si $U \in \mathscr{U}$ y $V \supset U$ entonces $V \in \mathscr{U}$.
  3. Si $U, V \in \mathscr{U}$ entonces $U \cap V \in \mathscr{U}$.
  4. Si $U \in \mathscr{U}$ entonces $U^{-1} \in \mathscr{U}$.
  5. Si $U \in \mathscr{U}$ entonces existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V \circ V \subset U$.

  Dada una familia arbitraria $\mathscr{A}$ de subconjuntos de $Z \times Z$, la uniformidad generada por $\mathscr{A}$ es la menor uniformidad que contiene a $\mathscr{A}$. La topología inducida en Z por la uniformidad $\mathscr{U}$ es la topología en la que una base de entornos del punto $x \in Z$ está formada por los conjuntos $U[x] = \{y \in Z : (x,y) \in U\}$, $U \in \mathscr{U}$. Dado un compacto K, existe una única uniformidad en K que induce la topología de K, que es la uniformidad formada por todos los entornos de la diagonal de K. Si $K \subset [-1,1]^\Gamma$, entonces $U \subseteq K \times K$ es un entorno de la diagonal de K si y sólo si existen $\gamma_0, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{(x,y) \in K \times K : \text{máx}_{i \leq n} |x_{\gamma_i} - y_{\gamma_i}| < \varepsilon\} \subset U$

Espacios de Banach

Todos los espacios vectoriales se considerán sobre el cuerpo de los números reales. El subespacio vectorial generado por un subconjunto A de un espacio vectorial X se denota por $span(A)$. Un *espacio de Banach* es un par $(X, \|\cdot\|)$ donde X es un espacio vectorial real y $\|\cdot\|$ es un norma en X (es decir una función sobre x verificando $\|x\| = 0 \iff x = 0$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ y $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$) tal que X dotado de la métrica $d(x,y) = \|x-y\|$ es un espacio métrico completo.

La *bola* cerrada (o simplemente la bola) del espacio de Banach X es el conjunto $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ mientras que la *esfera* es $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Un *subespacio* de un espacio de Banach X es un subespacio vectorial Y de X que es cerrado en la topología inducida por la norma, de tal forma que Y es de nuevo un espacio de Banach con la norma heredada de X.

Si X e Y son espacios de Banach, un *operador* de X en Y es una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ tal que que existe $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$ (esta condición es equivalente a que T sea continua respecto de las métricas inducidas por las normas). El menor de los M verificando la condición anterior es la norma de T, $M = \|T\|$. Un operador T se dice que es un *isomorfismo* si es una aplicación biyectiva y su inversa T^{-1} es también un operador. Si además $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo x, el isomorfismo T se dice que es una *isometría*. Dos familias $\{x_i : i \in I\}$ e $\{y_i : i \in I\}$ en espacios de Banach se dicen *isométricas* si existe una isometría $T : \overline{span}\{x_i : i \in I\} \longrightarrow \overline{span}\{y_i : i \in I\}$ tal que $T(x_i) = y_i$ para todo $i \in I$. Dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ en X se dicen *equivalentes* si la identidad $(X, \|\cdot\|) \longrightarrow (X, |||\cdot|||)$ es un isomorfismo.

El *espacio dual* de un espacio de Banach X es el espacio de Banach X^* de los operadores de X en $\mathbb{R}$. El espacio X se identifica con un subespacio de X^{**} identificando $x \in X$ con el operador $z^* \mapsto z^*(x)$. El espacio X se dice *reflexivo* si $X = X^{**}$. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador, el operado dual $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ se define por $T^*(y^*)(x) = y^*(T(x))$.

Por $dens(X)$ denotaremos el carácter de densidad de X en la topología de la norma.

La *topología débil* de X, denotada por w, es la menor topología en X para la que todos los elementos de X^* son continuos. La *topología débil** de X^*, denotada por w^* es la menor topología en X^* para la que la sustitución por cada elemento de X, $z^* \mapsto z^*(x)$, es continua. Cuando no se haga ninguna especificación, se entiende que la topología de un espacio de Banach es la topología inducida por la norma.

Para cada conjunto Γ y dado $1 \leq p < \infty$ tenemos los siguientes ejemplos de espacios de Banach:

- $\ell_p(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : \sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|^p < \infty\}$ con la norma $\|x\|_p = (\sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|^p)^{\frac{1}{p}}$.
- $\ell_\infty(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : \exists a \in \mathbb{R}\ \forall\gamma \in \Gamma\ |x_\gamma| < a\}$ con la norma $\|x\|_\infty = \sup\{|x_\gamma| : \gamma \in \Gamma\}$.
- $c_0(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : \forall\varepsilon > 0\ |\gamma : |x_\gamma| > \varepsilon| < \omega\}$ con la norma $\|x\|_\infty = \sup\{|x_\gamma| : \gamma \in \Gamma\}$.

Otro ejemplo importante para nosotros es el siguiente: Si K es un espacio topológico compacto, entonces el espacio de funciones reales continuas sobre K, $C(K)$, es un subespacio de $\ell_\infty(K)$. En $C(K)$ además de las topologías débil y de la norma, tenemos la topología de convergencia puntual (o simplemente la topología puntual, denotada por τ_p) que es la menor topología para la que cada sustitución $f \mapsto f(x)$ es continua ($x \in K$). El espacio $C(K)$ dotado de la topología τ_p se denota también por $C_p(K)$.

Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios de Banach, su suma-c_0, denotada como $(\bigoplus_{i\in I} X_i)_{c_0}$ es el espacio de Banach

$$X = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : |\{i \in I : \|x_i\| > \varepsilon\}| < \omega\ \forall\varepsilon > 0\}$$

dotado de la norma $\|(x_i)\| = \sup_{i\in I} \|x_i\|$.

Un *espacio de Hilbert* es un espacio de Banach isométrico a $\ell_2(\Gamma)$. Todos los espacios $\ell_p(\Gamma)$ son reflexivos cuando $1 < p < +\infty$ y $\ell_p^* = \ell_q$ siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Otros

Para un conjunto X denotaremos por $X^{(\omega)}$ ó $X^{(\mathbb{N})}$ el conjunto de las tuplas finitas de elementos de X, $X^{(\omega)} = \bigcup_{n<\omega} X^n$, mientras que $[X]^{<\omega}$ denotará la familia de los subconjuntos finitos de X, $[X]^{<\omega} = \{F \subset X : |F| < \omega\}$.

El *soporte* de una función $f : I \longrightarrow X$ es $supp(f) = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$.

Capítulo 1

Compactos de Eberlein uniformes

Definición 1. *Un compacto de Eberlein uniforme es un espacio topológico homeomorfo a un subconjunto débil compacto de un espacio de Hilbert.*

Dado que un espacio de Hilbert $\ell_2(\Gamma)$ es reflexivo, su bola unidad cerrada $B_{\ell_2(\Gamma)}$ es débil compacta y constituye un ejemplo de compacto de Eberlein uniforme. Dicha bola es homeomorfa al siguiente subespacio cerrado del cubo de Tychonoff $[-1,1]^\Gamma$:

$$B(\Gamma) = \left\{ x \in [-1,1]^\Gamma : \sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| \leq 1 \right\}.$$

De hecho $B(\Gamma)$ es homeomorfo a $(B_{\ell_p(\Gamma)}, w)$ para cada $1 < p < +\infty$, siendo el homeomorfismo $h : B_{\ell_p(\Gamma)} \longrightarrow B(\Gamma)$ dado por $h(x)_\gamma = signo(x_\gamma) \cdot |x_\gamma|^p$. Todo subconjunto débil compacto de un espacio de Banach es acotado [34, Theorem 3.15], así que en realidad, un compacto es de Eberlein uniforme si y sólo es homeomorfo a un subespacio cerrado de $B(\Gamma)$ para algún conjunto Γ. Otro ejemplo de compacto de Eberlein uniforme es el espacio $\sigma_k(\Gamma)$ para $k \in \mathbb{N}$ y Γ un conjunto:

$$\sigma_k(\Gamma) = \{x \in \{0,1\}^\Gamma : |supp(x)| \leq k\}$$

El hecho de que $\sigma_k(\Gamma)$ sea un compacto de Eberlein uniforme se sigue de que es homeomorfo a $B(\Gamma) \cap \{0, \frac{1}{k}\}^\Gamma$. Obsérvese que $\sigma_1(\Gamma)$ es homeomorfo a la compactificación por un punto de un conjunto discreto Γ. La clase de los compactos de Eberlein uniformes es cerrada para las siguientes operaciones topológicas:

1. Subespacios cerrados.
2. Productos numerables.
3. Imágenes continuas.

Lo primero es consecuencia inmediata de la definición, lo segundo se sigue de la existencia de una inclusión topológica $B(\Gamma)^{\mathbb{N}} \hookrightarrow B(\Gamma \times \mathbb{N})$ dada por $(x_{\gamma,n}) \mapsto (\frac{1}{2^n} x_{\gamma,n})$ mientras que lo tercero es un difícil resultado debido a Benyamini, Rudin y Wage [20]. El siguiente resultado del mismo artículo afirma que la clase de los compactos de Eberlein uniformes puede ser alternativamente descrita como la menor clase que contiene a los espacios $\sigma_1(\Gamma)$ y que es cerrada para las tres operaciones topológicas descritas anteriormente.

Teorema 2 (Benyamini, Rudin, Wage). *Cada compacto de Eberlein uniforme de peso κ es imagen continua de un subconjunto cerrado de $\sigma_1(\kappa)^{\mathbb{N}}$.*

1.1. La bola del espacio de Hilbert en la topología débil

En [20], a la vista del Teorema 2, se formula la pregunta de si en realidad es posible obtener cualquier compacto de Eberlein uniforme como imagen continua del propio $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$, cuestión que fue resuelta negativamente por Bell en [16]. Nosotros probamos lo siguiente:

Teorema 3. *$B(\Gamma)$ es imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$.*

Para dar su contraejemplo, Bell introdujo la siguiente propiedad: Un compacto K se dice que verifica la propiedad (Q) si para cada cardinal regular no numerable λ y cada familia $\{U_\alpha, V_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ de abiertos de K con $\overline{U_\alpha} \subset V_\alpha$ debe verificarse una de las dos alternativas siguientes:

1. o bien existe un conjunto $A \subset \lambda$ con $|A| = \lambda$ tal que $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ para cada par de elementos distintos α y β en A,
2. o bien existe un conjunto $A \subset \lambda$ con $|A| = \lambda$ tal que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ para cada par de elementos distintos α y β en A.

Bell probó en [16] que la propiedad (Q) la verifican todos los espacios poliádicos, es decir, todos los espacios que son imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^{\Lambda}$ para ciertos conjuntos Γ y Λ, (este concepto fue introducido en [53] y estudiado también por Gerlits [36]), y construyó un compacto de Eberlein uniforme sin la propiedad (Q). Más tarde, Bell [18] construyó otro ejemplo de un compacto de Eberlein uniforme que no es imagen continua de ningún $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$ y que sin embargo es poliádico.

Como consecuencia del Teorema 3, $B(\Gamma)$ verifica la propiedad (Q) así como otras propiedades del mismo tipo introducidas por Bell en [18] y [17]. Sin embargo, si Γ es no numerable, mostraremos en el Teorema 5 que una modificación de uno de los ejemplos de Bell proporciona una norma equivalente en $\ell_p(\Gamma)$ que no es imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$, y que de hecho no verifica la propiedad (Q). En particular, estamos dando dos normas equivalentes en el espacio no separable $\ell_p(\Gamma)$ cuyas bolas cerradas no son homeomorfas en la topología débil. Esto contrasta con el caso separable, puesto que las bolas de todos los espacios de Banach reflexivos y separables son homeomorfas en la topología débil [15, Theorem 1.1]. Referimos a [15] para información respecto al problema de si las bolas de dos normas equivalentes en un espacio de Banach separable son débilmente homeomorfas.

Demostración del Teorema 3: Para un conjunto Δ usaremos la notación $B^+(\Delta) = B(\Delta)\cap[0,1]^\Delta$. En primer lugar, observamos que $B(\Gamma)$ es imagen continua de $B^+(\Gamma)$. De hecho, si consideramos $\Gamma^o = \Gamma\times\{a,b\}$, tenemos una función continua y suprayectiva $\psi : B^+(\Gamma^o) \longrightarrow B(\Gamma)$ dada por $\psi(x)_\gamma = x_{(\gamma,a)} - x_{(\gamma,b)}$.

En un segundo paso, utilizamos el proceso habitual para expresar $B^+(\Gamma)$ como imagen continua de un compacto totalmente disconexo L_0. Fijamos una sucesión $(r_n)_{n=0}^\infty$ de números reales positivos tales que $\sum_{n=0}^\infty r_n = 1$ y tales que la aplicación continua $\phi : \{0,1\}^\mathbb{N} \longrightarrow [0,1]$ dada por $\phi(x) = \sum_{n=0}^\infty r_n x_n$ sea suprayectiva, por ejemplo $r_n = 2^{-n-1}$. Consideramos la función potencia $\phi^\Gamma : \{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]^\Gamma$ y definimos:

$$\begin{aligned} L_0 &= (\phi^\Gamma)^{-1}(B^+(\Gamma)),\\ f &= \phi^\Gamma|_{L_0}, \end{aligned}$$

de tal forma que $f : L_0 \longrightarrow B^+(\Gamma)$ es una suprayección continua. Es conveniente tener una suprayección explícita de L_0. Para cada $x \in \{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}}$ y cada $n\in\mathbb{N}$, definimos $N_n(x) = |\{\gamma\in\Gamma : x_{(\gamma,n)} = 1\}|$.

$$\begin{aligned} x\in L_0 &\iff \phi^\Gamma(x)\in B^+(\Gamma)\\ &\iff \sum_{\gamma\in\Gamma}\phi^\Gamma(x)_\gamma \le 1\\ &\iff \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{n=0}^\infty r_n x_{(\gamma,n)} \le 1\\ &\iff \sum_{n=0}^\infty r_n N_n(x) \le 1. \end{aligned}$$

El compacto L_0 puede ser descrito alternativamente como sigue. Sea Z un subconjunto compacto de $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ tal que si $\sigma\in Z$ y $\tau_n \le \sigma_n$ para cada $n\in\mathbb{N}$, entonces $\tau\in Z$. Asociado a este conjunto Z construimos el siguiente espacio:

$$\mathscr{K}(Z,\Gamma) = \{x\in\{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}} : (N_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in Z\}.$$

Tenemos que $L_0 = \mathscr{K}(Z_0,\Gamma)$ donde $Z_0 = \left\{s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i s_i \leq 1\right\}$. Nótese que Z_0 es de hecho compacto puesto que es un subespacio cerrado de $\prod_{n\in\mathbb{N}}\{0,\dots,M_n\}$ donde M_n es la parte entera de $\frac{1}{r_n}$. La prueba quedará finalizada con el siguiente lema:

Lema 4. *Sea Z un subconjunto compacto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tal que si $\sigma \in Z$ y $\tau_n \leq \sigma_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $\tau \in Z$. En este caso, $\mathscr{K}(Z,\Gamma)$ es imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$.*

Prueba: Primero comprobamos que $\mathscr{K}(Z,\Gamma)$ es un subconjunto cerrado de $\{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}}$ y en consecuencia compacto. Efectivamente, si $x \in \{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}} \setminus \mathscr{K}(Z,\Gamma)$, entonces tenemos que $(N_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \notin Z$ y como Z es cerrado en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, existe un conjunto finito $F \subset \mathbb{N}$ tal que $\sigma \notin Z$ siempre que $\sigma_n = N_n(x)$ para cada $n \in F$. En este caso,

$$W = \{y \in \{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}} : y_{\gamma,n} = 1 \text{ siempre que } n \in F \text{ y } x_{\gamma,n} = 1\}$$

es un entorno que separa x de $\mathscr{K}(Z,\Gamma)$ y esto finaliza la prueba de que $\mathscr{K}(Z,\Gamma)$ es cerrado.

Puesto que Z es compacto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma_n \leq M_n$ para todo $\sigma \in Z$. Definimos ahora el siguiente compacto:

$$L_1 = Z \times \prod_{m\in\mathbb{N}} \prod_{i=0}^{M_m} \sigma_i(\Gamma)$$

Nótese que L_1 es imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$. Por una parte, como Z es un compacto metrizable, es imagen continua de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ y en particular de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$. Por otro lado, para cualquier $i \in \mathbb{N}$, el espacio $\sigma_i(\Gamma)$ puede verse como la familia de todos los subconjuntos de Γ de cardinalidad a lo sumo i. De esta forma, consideramos la suprayección continua $p : \sigma_1(\Gamma)^i \longrightarrow \sigma_i(\Gamma)$ dada por $p(x_1,\dots,x_i) = x_1 \cup \cdots \cup x_i$. De la existencia de esta suprayección se sigue el hecho de que cualquier producto numerable de espacios $\sigma_i(\Gamma)$ es imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}}$, y en particular, el segundo factor en la expresión de L_1.

Queda definir una aplicación continua y suprayectiva $g : L_1 \longrightarrow \mathscr{K}(Z,\Gamma)$. Fijamos para ello algo de notación. Un elemento de L_1 lo escribiremos como (z,x) donde $z \in Z$ y $x \in \prod_{m\in\mathbb{N}}\prod_{i=0}^{M_m}\sigma_i(\Gamma)$. Al mismo tiempo, tal x es de la forma $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$ con $x^m \in \prod_{i=0}^{M_m}\sigma_i(\Gamma)$ y de nuevo cada x^m es $(x^{m,i})_{i=1}^{M_m}$ donde $x^{m,i} \in \sigma_i(\Gamma)$, elemento que a su vez es de la forma $x^{m,i} = (x_\gamma^{m,i})_{\gamma\in\Gamma} \in \sigma_i(\Gamma) \subset \{0,1\}^{\Gamma}$. La función $g : L_1 \longrightarrow \mathscr{K}(Z,\Gamma) \subset \{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}}$ se define como sigue:

$$g(z,x)_{\gamma,m} = x_\gamma^{m,z(m)}$$

Obsérvese que $g(x,z)$ lleva realmente L_1 sobre $\mathscr{K}(Z,\Gamma)$ porque para cada m la tupla $(x_\gamma^{m,z(m)})_{\gamma\in\Gamma}$ es un elemento arbitrario de $\sigma_{z(m)}(\Gamma)$. $\square$

Teorema 5. *Sea Γ un conjunto no numerable y $1 < p < \infty$. Existe una norma equivalente en $\ell_p(\Gamma)$ cuya bola unidad cerrada en la topología débil no verifica la propiedad (Q) y por tanto no es poliádica.*

Prueba: Este ejemplo está basado en uno de Bell [16], originalmente un compacto disperso, es decir un compacto en el que cada subconjunto no vacío tiene un punto aislado. Al ser Γ no numerable podemos suponer que ω_1 es un subconjunto de Γ. Sea $\phi : \omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva y

$$G = \{(\alpha,\beta) \in \omega_1 \times \omega_1 : \phi(\alpha) < \phi(\beta) \iff \alpha \preceq \beta\}.$$

El ejemplo de Bell de un compacto de Eberelin uniforme que no satsiface la propiedad (Q) es $L = \overline{\{(\{\alpha\},\{\beta\}) : (\alpha,\beta) \in G\}} \subset \sigma_1(\Gamma) \times \sigma_1(\Gamma)$.

Por nuestra parte, definimos una norma equivalente en $\ell_p(\Gamma) \times \ell_p(\Gamma) \sim \ell_p(\Gamma)$ como

$$\|(x,y)\|' = \sup\{\|x\|_p, \|y\|_p, |x_\alpha| + |y_\beta| : (\alpha,\beta) \in G\}.$$

Llamaremos K a la bola unidad cerrada de esta norma equivalente, considerada siempre con la topología débil. Fijamos dos números reales $1 < \xi_1 < \xi_2 < 2^{1-\frac{1}{p}}$. Las familias de abiertos de K

$$U_\alpha = \{(x,y) \in K : |x_\alpha| + |y_\alpha| > \xi_2\}, \ \ \alpha < \omega_1$$

$$V_\alpha = \{(x,y) \in K : |x_\alpha| + |y_\alpha| > \xi_1\}, \ \ \alpha < \omega_1$$

verifican que $\overline{U_\alpha} \subset V_\alpha$ y que para cada $\alpha, \beta < \omega_1$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ si y sólo si $(\alpha,\beta) \in G$ si y sólo si $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Efectivamente: si existe algún $(x,y) \in V_\alpha \cap V_\beta$, entonces

$$|x_\alpha| + |y_\alpha| + |x_\beta| + |y_\beta| > \xi_1 + \xi_1 > 2$$

y por tanto o bien $|x_\alpha| + |x_\beta| > 1$ o bien $|y_\alpha| + |y_\beta| > 1$ y eso implica que $(\alpha,\beta) \notin G$ ya que $(x,y) \in K$. Por otra parte, si $(\alpha,\beta) \notin G$ entonces el elemento $(x,y) \in \ell_p(\Gamma) \times \ell_p(\Gamma)$ que tiene todas sus coordenadas nulas excepto $x_\alpha = x_\beta = y_\alpha = y_\beta = 2^{-\frac{1}{p}}$ vive en $U_\alpha \cap U_\beta$. Como no hay ningún subconjunto no numerable de la recta real que esté bien ordenado (o inversamente bien ordenado) no puede existir ningún subconjunto no numerable A de ω_1 tal que $A \times A \subset G$ ó $(A \times A) \cap G = \emptyset$. Por consiguiente, las familias $\{U_\alpha\}$ y $\{V_\alpha\}$ atestiguan el hecho de que K no tiene la propiedad (Q). $\square$

1.2. Productos numerables de espacios $\sigma_k(\Gamma)$

Esta sección se dedica a la demostración del Teorema 6 sobre la clasificación topológica de un tipo particular de compactos de Eberlein uniformes: aquellos que se pueden expresar como producto numerable de espacios de tipo $\sigma_k(\Gamma)$. Recordamos la notación para estos espacios que dimos en la introducción: T es el conjunto de todas las sucesiones $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ con $0 \leq \tau_n \leq \omega$. Cuando τ recorre T, $\sigma_\tau(\Gamma) = \prod_1^\infty \sigma_n(\Gamma)^{\tau_n}$ recorre todos los productos finitos o numerables de espacios $\sigma_k(\Gamma)$. Para $\tau \in T$ llamamos $j(\tau)$ al supremo de todos los n con $\tau_n > 0$ e $i(\tau)$ al supremo de todos los n con $\tau_n = \omega$. Si $\tau_n < \omega$ para cada $n \geq 1$, entonces $i(\tau) = 0$. En todo caso se tiene $0 \leq i(\tau) \leq j(\tau) \leq \omega$.

Teorema 6. *Sean $\tau, \tau' \in T$ y Γ un conjunto no numerable.*

1. *Supongamos que $j(\tau) < \omega$. En este caso, $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$ es homeomorfo a $\sigma_\tau(\Gamma)$ si y sólo si $i(\tau) = i(\tau')$ y $\tau_n = \tau'_n$ para cada $n > i(\tau)$.*
2. *Supongamos que $i(\tau) = \omega$. En este caso, si $i(\tau') = \omega$, entonces $\sigma_\tau(\Gamma)$ es homeomorfo a $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$.*

Hacemos notar que la hipótesis de no numerabilidad en el Teorema 6 es importante y de hecho la situación cuando Γ es numerable es bien distinta. Todos los compactos metrizables totalmente disconexos y perfectos (sin puntos aislados) son homeomorfos [43, Theorem 7.4] lo que implica que todos los productos numerables de espacios $\sigma_k(\omega)$ son homeomorfos. Los productos finitos son compactos numerables, cuya clasificación topológica completa está resuelta en el clásico trabajo de Mazurkiewicz y Sierpiński [51]: dos de estos compactos son homeomorfos si y sólo si tienen el mismo índice de derivación de Cantor-Bendixon y la misma cardinalidad de la última derivada de Cantor-Bendixon no vacía. Si se calculan dichos invariantes para un producto finito $\prod_{i=1}^n \sigma_{k_i}(\omega)$ puede verse fácilmente que se obtienen los valores $1 + \sum_1^n k_i$ y 1 respectivamente.

De ahora en adelante, Γ será siempre un conjunto no numerable. En esta sección será conveniente manejar una definición equivalente aunque formalmente distinta del espacio $\sigma_k(\Gamma)$,

$$\sigma_k(\Gamma) = \{A \subset \Gamma : |A| \leq k\}$$

dotado de la topología que tiene como base los conjuntos de la forma

$$\Phi_F^G = \{y \in \sigma_n(\Gamma) : F \subset y \subset \Gamma \setminus G\}$$

para F y G subconjuntos finitos de Γ.

Lema 7. *Si $m < n$ entonces $\sigma_m(\Gamma) \times \sigma_n(\Gamma)^\omega$ es homeomorfo a $\sigma_n(\Gamma)^\omega$.*

Prueba: Recordemos que se deonta por $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)$ la suma discreta de los espacios topológicos $X_1, X_2, \ldots$ y por αX la compactificación por un punto de un espacio localmente compacto X. Fijamos $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \in \Gamma$. Consideramos el conjunto $L =$

$\omega\times\{0,\dots,n-1\}$ dotado del orden lexicográfico: $(k,i)<(k',i')$ siempre que o bien $k<k'$ o bien $k=k'$ e $i<i'$. Para cada $(k,i)\in L$ definimos un conjunto cerrado-abierto de $\sigma_n(\Gamma)^\omega$ como sigue

$$\begin{aligned} A_{(k,i)} &= \{x\in\sigma_n(\Gamma)^\omega : \gamma_i\notin x_k, \gamma_{i'}\in x_{k'}\forall(k',i')<(k,i)\}\\ &= \{x\in\sigma_n(\Gamma)^\omega : \gamma_i\notin x_k\supset\{\gamma_0,\dots,\gamma_{i-1}\}, x_j=\{\gamma_0,\dots,\gamma_{n-1}\}\forall j<k\}.\end{aligned}$$

Nótese que $A_{(k,i)}$ es homeomorfo a $\sigma_{n-i}(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega$ y que $\{A_l : l\in L\}$ constituye una sucesión disjunta de subconjuntos cerrado-abiertos de $\sigma_n(\Gamma)^\omega$ con un único punto límite fuera de ellos $\xi\in\sigma_n(\Gamma)^\omega$ constantemente igual a $\{\gamma_0,\dots,\gamma_{n-1}\}$. Por tanto,

$$\sigma_n(\Gamma)^\omega\approx\alpha\left(\bigoplus_{l\in L}A_l\right)\approx\alpha\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1}\bigoplus_{j<\omega}(\sigma_{n-i}(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega)\right).$$

Por otra parte, se puede llevar a cabo una descomposición similar en $\sigma_m(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega$ definiendo, para $j<m$ y $(k,i)\in L$:

$$\begin{aligned} B'_j &= \{(y,x)\in\sigma_m(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega : \gamma_j\notin y, \{\gamma_0,\dots,\gamma_{j-1}\}\subset y\}\\ B_{(k,i)} &= \{(y,x)\in\sigma_m(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega : \gamma_i\notin x_k, \gamma_{i'}\in x_{k'}\forall(k',i')<(k,i),\\ &\qquad \{\gamma_0,\dots,\gamma_{m-1}\}\subset y\}\end{aligned}$$

De nuevo B'_j es homeomorfo a $\sigma_{m-j}(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega$, $B_{(k,i)}$ es homeomorfo a $\sigma_{n-i}(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega$ y todos juntos constituyen una sucesión disjunta de cerrado-abiertos con único punto límite fuera de ellos $(\{\gamma_0,\dots,\gamma_{m-1}\},\xi)$, así que

$$\sigma_m(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega\approx\alpha\left(\bigoplus_{l\in L}B_l\oplus\bigoplus_{j=0}^{m-1}B'_j\right)\approx\alpha\left(\bigoplus_{i=0}^{n-1}\bigoplus_{j<\omega}(\sigma_{n-i}(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega)\right).$$

Lema 8. *Si $m<n<\omega$ entonces $\sigma_m(\Gamma)^\omega\times\sigma_n(\Gamma)^\omega$ es homeomorfo a $\sigma_n(\Gamma)^\omega$.*

Prueba: $\sigma_m(\Gamma)^\omega\times\sigma_n(\Gamma)^\omega\approx(\sigma_m(\Gamma)\times\sigma_n(\Gamma)^\omega)^\omega\approx(\sigma_n(\Gamma)^\omega)^\omega\approx\sigma_n(\Gamma)^\omega$. □

Lema 9. *Sea $m_1,\dots,m_r<n<\omega$ y $e_1,\dots,e_r\leq\omega$. Entonces $\prod_{i=1}^r\sigma_{m_i}(\Gamma)^{e_i}\times\sigma_n(\Gamma)^\omega$ es homeomorfo a $\sigma_n(\Gamma)^\omega$.*

Prueba: Se sigue de aplicar repetidamente los Lemas 7 y 8. □

Del Lema 9 se deduce que cualquier espacio $\sigma_\tau(\Gamma)$ con $i(\tau)=\omega$ es homeomorfo a $\sigma_{(\omega,\omega,\dots)}(\Gamma)$ (porque podemos sustituir cada factor $\sigma_n(\Gamma)^\omega$ de $\sigma_\tau(\Gamma)$ por el homeomorfo $\prod_{i\leq n}\sigma_i(\Gamma)^\omega$) y esto prueba la parte (2) del Teorema 6. El Lema 9 también muestra que es irrelevante para determinar la clase de homeomorfismo de $\sigma_\tau(\Gamma)$ cuáles son los valores de τ_n para $n < i(\tau)$. Por tanto, para probar la parte (1) del Teorema 6 queda ver que si $j(\tau) < \omega$ y $\sigma_\tau(\Gamma)$ es homeomorfo a $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$ entonces $\tau_n = \tau'_n$ para cada $n > i(\tau)$.

Recordamos que una familia $\{S_\eta\}_{\eta\in H}$ de conjuntos es un Δ-sistema si existe un conjunto S (llamado la raíz del Δ-sistema) tal que $S_\eta \cap S_{\eta'} = S$ para cada $\eta \neq \eta'$. Haremos uso del conocido como Teorema de Erdős-Rado o lema del Δ-sistema, que afirma que cualquier familia no numerable de conjuntos finitos tiene una subfamilia no numerable que es un Δ-sistema, cf. [26, Theorem 1.4] para $\kappa = \omega$ y $\alpha = \omega_1$.

El siguiente lema incluye como particular el hecho de que $\sigma_{n+1}(\Lambda)$ no es un subespacio de $\sigma_n(\Gamma)^\omega$. Este hecho, para cuya prueba bastan los pasos 1 a 3 de la demostración, nos fue comunicado por Witold Marciszewski y parece que se trata de un hecho conocido.

Lema 10. *Si $|\Lambda| > \omega$, $n \geq 0$, $k \geq 0$, entonces el espacio $\sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1}$ no es homeomorfo a ningún subespacio de $\sigma_n(\Gamma)^\omega \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k$.*

Prueba: Supongamos que existiera $\varphi : \sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1} \longrightarrow \sigma_n(\Gamma)^\omega \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k$ un embebimiento.

Paso 1. Pasando a un subconjunto no numerable de Λ, puede suponerse que existe un embebimiento
$$\phi : \sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1} \longrightarrow \sigma_n(\Gamma)^m \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k$$
para algún $m < \omega$. En este paso, denotaremos un elemento $x \in \sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1}$ como $x = (x_0, \ldots, x_k)$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ y cada $i \in \{0, \ldots, k\}$ un encontramos un conjunto cerrado-abierto A^i_λ de $\sigma_n(\Gamma)^\omega \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k$ que separe los conjuntos compactos $\varphi(\{x : \lambda \in x_i\})$ y $\varphi(\{x : \lambda \notin x_i\})$. Asociado a A^i_λ tenemos un subconjunto finito $F^i_\lambda \subset \omega$ tal que $A^i_\lambda = \sigma_n(\Gamma)^{\omega\setminus F^i_\lambda} \times B^i_\lambda$ con B^i_λ un subconjunto cerrado-abierto de $\sigma_n(\Gamma)^{F^i_\lambda} \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k$. Escogemos Λ' un subconjunto no numerable de Λ tal que $\bigcup_{i=0}^k F^i_\lambda = \bigcup_{i=0}^k F^i_{\lambda'} = F$ para cada $\lambda, \lambda' \in \Lambda'$ y entonces la composición
$$\sigma_{n+1}(\Lambda')^{k+1} \hookrightarrow \sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1} \longrightarrow \sigma_n(\Gamma)^\omega \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k \longrightarrow \sigma_n(\Gamma)^F \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k$$
es inyectiva. La razón es que si $x, y \in \sigma_{n+1}(\Lambda')^{k+1}$ son distintos entonces existen $i \in \{0, \ldots, k\}$ y $\lambda \in \Lambda'$ tales que $\lambda \in x_i$ pero $\lambda \notin y_i$ (o viceversa). En este caso $\phi(x) \in A^i_\lambda$ y $\phi(y) \notin A^i_\lambda$ así que o bien la coordenada de $\sigma_{n+1}(\Gamma)^k$ o alguna coordenada de $F^\lambda_i \subset F$ debe ser diferente para $\phi(x)$ y $\phi(y)$.

Paso 2. Para $i = 0, \ldots, k$ y $\lambda \in \Lambda$ definimos $e^\lambda_i \in \sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1}$ como el elemento que tiene $\{\lambda\}$ en la coordenada i y $\emptyset$ en el resto de coordenadas. Cada $\phi(e^\lambda_i)$ será de la forma
$$\phi(e^\lambda_i) = (x^\lambda_i[1], \ldots, x^\lambda_i[m], x^\lambda_i[m+1], \ldots, x^\lambda_i[m+k])$$

con $x_i^\lambda[j] \in \sigma_n(\Gamma)$ si $j \leq m$ y $x_i^\lambda[j] \in \sigma_{n+1}(\Gamma)$ si $m < j \leq m+k$. Pasando a un subconjunto no numerable de Λ, podemos asumir que para cada $i \in \{0,\dots,k\}$ y cada $j \in \{1,\dots,m+k\}$ la familia $\{x_i^\lambda[j] : \lambda \in \Lambda\}$ es un Δ-sistema de raíz $R_i[j]$ formado por conjuntos de la misma cardinalidad $c_i[j]$.

Paso 3. Se afirma que para cada $i = 0,\dots,n$ y cada $j = 1,\dots,m$, el Δ-sistema $\{x_i^\lambda[j] : \lambda \in \Lambda\}$ es constante. Supongamos lo contrario para ciertos $i \leq n$ y $j \leq m$ que fijamos a partir de este momento. Entonces $x_i^\lambda[j] = R \cup S^\lambda \in \sigma_n(\Gamma)$ donde $R \cap S^\lambda = \emptyset$, $S^\lambda \neq \emptyset$, y $S^\lambda \cap S^{\lambda'} = \emptyset$ para $\lambda \neq \lambda'$. Consideramos los conjuntos

$$A_\lambda = \{y = (y[1],\dots,y[m+k]) \in \sigma_n(\Gamma)^m \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k : y[j] \supset S^\lambda\}.$$

Los A_λ son entornos de los $\phi(e_i^\lambda)$'s con la propiedad de que para cada $F \subset \Lambda$ con $|F| > n$, $\bigcap_{\lambda\in F} A_\lambda = \emptyset$ (porque para y en esa intersección, $|y[j]| > n$ e $y[j] \in \sigma_n(\Gamma)$). Sea $\psi : \sigma_{n+1}(\Lambda) \longrightarrow \sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1}$ la aplicación definida por $\psi(x)_i = x$ y $\psi(x)_{i'}(x) = \emptyset$ si $i' \neq i$. Entonces los $(\phi\psi)^{-1}(A_\lambda)$ son entornos de los $\{\lambda\}$ en $\sigma_{n+1}(\Lambda)$ con la propiedad de que para cada $F \subset \Lambda$ con $|F| > n$, $\bigcap_{\lambda\in F} (\phi\psi)^{-1}(A_\lambda) = \emptyset$. Esto es una contradicción pues no existe tal familia de entornos. Si existiera, tómense entornos básicos con $\{\lambda\} \in \Phi_{\{\lambda\}}^{G_\lambda} \subset (\phi\psi)^{-1}(A_\lambda)$ y tómese $\Lambda' \subset \Lambda$ no numerable con $\{G_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$ un Δ-sistema de raíz R'. Entonces se podría construir recursivamente una sucesión $F = \{\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\} \subset \Lambda' \setminus R'$ tal que $\lambda_p \notin \bigcup_{q<p} G_{\lambda_q}$ y $G_{\lambda_p} \cap \{\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1}\} = \emptyset$ (nótese que es posible escoger tal λ_p pues $\{\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1}\} \cap R' = \emptyset$ y por tanto hay sólo una cantidad finita de G_λ con $\lambda \in \Lambda'$ y $G_\lambda \cap \{\lambda_1,\dots,\lambda_{p-1}\} \neq \emptyset$). En este caso se tiene $F \in \bigcap_{\lambda\in F} (\phi\psi)^{-1}(A_\lambda)$.

Paso 4. Nótese que, en el caso en que $k = 0$ ya se ha llegado a una contradicción y la prueba está completa. Si $k > 0$ se necesita algo más de trabajo. Del paso 3 se deduce que para cada $i \in \{0,\dots,k\}$ debe existir $j \in \{m+1,\dots,m+k\}$ tal que la familia $\{x_i^\lambda[j] : \lambda \in \Lambda\}$ es un Δ-sistema no constante. Como i recorre un conjunto de $k+1$ elementos y j un conjunto de k elementos, debe haber dos indices $i, i' \in \{0,\dots,k\}$ diferentes tales que para el mismo j, $\{x_i^\lambda[j] : \lambda \in \Lambda\}$ y $\{x_{i'}^\lambda[j] : \lambda \in \Lambda\}$ son Δ-sistemas no constantes. Suponemos que $c_i[j] \geq c_{i'}[j]$ (estos números se definieron en el paso 2). De nuevo, para $\lambda \in \Lambda$ consideramos los conjuntos

$$A_\lambda = \{(y[1],\dots,y[m+k]) \in \sigma_n(\Gamma)^m \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k : y[j] \supset x_i^\lambda[j]\},$$

$$A'_\lambda = \{(y[1],\dots,y[m+k]) \in \sigma_n(\Gamma)^m \times \sigma_{n+1}(\Gamma)^k : y[j] \supset x_{i'}^\lambda[j]\}.$$

Los A_λ y los A'_λ son entornos de los $\phi(e_i^\lambda)$ y los $\phi(e_{i'}^\lambda)$ respectivamente con la propiedad de que

$$(*)\ \forall\lambda \in \Lambda \forall F \subset \Lambda \left(|F| > n \wedge x_i^\lambda[j] \not\subseteq \bigcup_{\mu\in F} x_{i'}^\mu[j]\right) \Rightarrow A_\lambda \cap \bigcap_{\mu\in F} A'_\mu = \emptyset.$$

Esa intersección es vacía porque si y pertenece a ella, entonces

$$x_i^\lambda[j] \cup \bigcup_{\mu\in F} x_{i'}^\mu[j] \subset y[j] \in \sigma_{n+1}(\Gamma)$$

y el conjunto de la izquierda, si $x_i^\lambda[j] \not\subseteq \bigcup_{\mu\in F} x_{i'}^\mu[j]$, tiene cardinalidad mayor que $n+1$, una contradicción. Puesto que los Δ-sistemas son no constantes y $c_i[j] \geq c_{i'}[j]$, si se verifica $x_i^\lambda[j] \subseteq \bigcup_{\mu\in F} x_{i'}^\mu[j]$ entonces debe existir algún $\mu \in F$ y algún $\gamma \in x_i^\lambda[j]$ tales que $\gamma \in x_{i'}^\mu[j] \setminus R_{i'}[j]$. Para un λ fijo hay sólo una cantidad finita de posibles μ con $(x_{i'}^\mu[j] \setminus R_{i'}[j]) \cap x_i^\lambda[j] \neq \emptyset$. En consecuencia para cada λ podemos encontrar un subconjunto cofinito Λ_λ de Λ tal que la hipótesis $x_i^\lambda[j] \not\subseteq \bigcup_{\mu\in F} x_{i'}^\mu[j]$ de la afirmación $(*)$ se verifica siempre que $F \subset \Lambda_\lambda$. Resumiendo, sabemos que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un subconjunto cofinito Λ_λ de Λ tal que

$$\forall F \subset \Lambda_\lambda \ \ |F| > n \Rightarrow A_\lambda \cap \bigcap_{\mu\in F} A'_\mu = \emptyset.$$

Esto contradice el siguiente lema para $B_\lambda = \phi^{-1}(A_\lambda)$ y $B'_\lambda = \phi^{-1}(A'_\lambda)$:

Lema 11. *Para cada $\lambda \in \Lambda$, sean B_λ y B'_λ entornos de e_i^λ y $e_{i'}^\lambda$ respectivamente en $\sigma_{n+1}(\Lambda)^{k+1}$. Entonces existen $\lambda_0 \in \Lambda$ y un conjunto infinito $S \subset \Lambda$ tales que para cada $F \subset S$ con $|F| = n+1$,*

$$B_{\lambda_0} \cap \bigcap_{\mu\in F} B'_\mu \neq \emptyset$$

Prueba: Por simplicidad en la notacion, asumiremos que $i = 0$ y $i' = 1$. Nótese que un cerrado-abierto básico Φ_F^G de $\sigma_{n+1}(\Lambda)$ es no vacío si y sólo si $F \cap G = \emptyset$ y $|F| \leq n+1$. Cada B_λ y cada B'_μ deben contener cerrado-abiertos básicos de la forma

$$\Phi_{\{\lambda\}}^{G_0^\lambda} \times \Phi_\emptyset^{G_1^\lambda} \times \Phi_\emptyset^{G_2^\lambda} \times \cdots \times \Phi_\emptyset^{G_k^\lambda} \subseteq B_\lambda$$

$$\Phi_\emptyset^{H_0^\mu} \times \Phi_{\{\mu\}}^{H_1^\mu} \times \Phi_\emptyset^{H_2^\mu} \times \cdots \times \Phi_\emptyset^{H_k^\mu} \subseteq B'_\mu$$

con cada G_l^λ y cada H_l^μ subconjuntos finitos de Λ, $\lambda \notin G_0^\lambda$ y $\mu \notin H_1^\mu$. En primer lugar, encontramos $M \subset \Lambda$ infinito numerable tal que $\mu' \notin H_1^\mu$ para cada $\mu, \mu' \in M$. Esto puede hacerse como sigue. Comenzamos con un conjunto infinito $M_1 \subset \Lambda$ tal que la familia $\{H_1^\mu : \mu \in M_1\}$ es un Δ-sistema de raíz R, y definimos $M_2 = M_1 \setminus R$. Después construimos recursivamente una sucesión $(\mu_p)_{p<\omega} \subset M_2$ tal que $\mu_p \notin \bigcup_{q<p} H_1^{\mu_q}$ y $H_1^{\mu_p} \cap \{\mu_1, \ldots, \mu_{p-1}\} = \emptyset$. Tras esto, definimos $M = \{\mu_p : p < \omega\}$. Ahora, escogemos $\lambda_0 \notin \bigcup_{\mu\in M} H_0^\mu$. Tomando $S = \{\mu \in M : \mu \notin G_1^{\lambda_0}\}$, λ_0 y S verifican las propiedades requeridas. Efectivamente, tomemos $F \subset S$ con $|F| = n+1$, y para cada $j = 0, \ldots, k$ llamemos

$I_j = G_j^{\lambda_0} \bigcup_{\mu \in F} H_j^{\mu}$ de tal modo que

$$B_{\lambda_0} \cap \bigcap_{\mu \in F} B'_{\mu} \supset \Phi_{\{\lambda_0\}}^{I_0^{\mu}} \times \Phi_F^{I_1^{\mu}} \times \prod_{j=2}^{k} \Phi_{\emptyset}^{I_j^{\mu}}.$$

Por un lado, $\Phi_{\{\lambda_0\}}^{I_0^{\mu}} \neq \emptyset$ porque escogimos $\lambda_0 \notin \bigcup_{\mu \in M} H_0^{\mu}$, así que $\lambda_0 \notin I_0^{\mu}$. Por otra parte, $\Phi_F^{I_1^{\mu}} \neq \emptyset$ porque, primero, como $F \subset M$ y $\mu' \notin H_1^{\mu}$ para cada $\mu, \mu' \in M$, se sigue que $F \cap \bigcup_{\mu \in F} H_1^{\mu} = \emptyset$ y segundo, como $F \subset S$, simplemente por la definición de S, $F \cap G_1^{\lambda_0} = \emptyset$. $\square$

Es consecuencia del Lema 10 que $j(\tau) = j(\tau')$ siempre que $\sigma_{\tau}(\Gamma) = \sigma_{\tau'}(\Gamma)$, puesto que muestra que $j(\tau) = \omega$ si y sólo si $\sigma_n(\Gamma)$ puede sumergirse en $\sigma_{\tau}(\Gamma)$ para cada $n < \omega$ y, si no es ése el caso, $j(\tau)$ es el mayor entero n para el que $\sigma_n(\Gamma)$ se sumerge dentro de $\sigma_{\tau}(\Gamma)$. Por tanto, en la situación de la parte (1) del Teorema 6, sabemos que ocurre que $j(\tau) = j(\tau') = j$ y además que $\tau_n = \tau'_n$ para todo $n \geq j$ puesto que, por el Lema 10 de nuevo, $\tau_j = \tau'_j$ es el mayor entero k tal que $\sigma_j(\Gamma)^k$ se sumerge en $\sigma_{\tau}(\Gamma)$ y por supuesto, $\tau_n = \tau'_n = 0$ para todo $n > j$. Para finalizar la prueba de la parte (1), hemos de comprobar que $i(\tau) = i(\tau') = i$ y que $\tau_k = \tau'_k$ para $i < k < j$. Para obtener esto, atenderemos a la posibilidad de sumergir $\sigma_n(\Gamma)^k$ en los subconjuntos cerrado-abiertos de $\sigma_{\tau}(\Gamma)$. Con este propósito, observamos que es suficiente con considerar una ciertos cerrados-abiertos básicos, siempre que el resto pueda expresarse como unión de ellos:

Lema 12. *Sea X un compacto y $C_1, \dots, C_t$ subconjuntos abiertos de X. Si $\sigma_n(\Lambda)^k$ se sumerge en $\bigcup_1^t C_i$, entonces existe $i \leq t$ tal que $\sigma_n(\Lambda)^k$ se sumerge en C_i.*

Prueba: Basta ver que siempre que se exprese $\sigma_n(\Lambda)^k$ como unión de abiertos

$$\sigma_n(\Lambda)^k = C_1 \cup \cdots \cup C_t$$

entonces algún C_i contienen una copia de $\sigma_n(\Lambda)^k$. Tómese un $i \in \{1, \dots, t\}$ tal que $x_0 = (\emptyset, \dots, \emptyset) \in C_i$. Existen conjuntos finitos $G^1, \dots, G^k$ de Λ tales que

$$x_0 \in \Phi_{\emptyset}^{G^1} \times \cdots \times \Phi_{\emptyset}^{G^k} \subset C_i$$

Esto completa la prueba puesto que $\Phi_{\emptyset}^{G^1} \times \cdots \times \Phi_{\emptyset}^{G^k}$ es homeomorfo a $\sigma_n(\Lambda)^k$. $\square$

Denotemos ahora por $K = \prod_{s \in S} \sigma_{n_s}(\Gamma)$ cualquier producto finito o numerable de espacios $\sigma_n(\Gamma)$. Todo cerrado abierto de K es unión finita de cerrado-abiertos básicos de la forma

$$C = \prod_{s \in A} \Phi_{F_s}^{G_s} \times \prod_{s \notin A} \sigma_{n_s}(\Gamma)$$

donde A es un subconjunto finito de S y $\Phi_{F_s}^{G_s}$ un cerrado-abierto básico de $\sigma_{n_s}(\Gamma)$. Tal cerrado-abierto básico es homeomorfo a

$$(\star)\ C \sim \prod_{s\in A} \sigma_{n_s-|F_s|}(\Gamma) \times \prod_{s\notin A} \sigma_{n_s}(\Gamma)$$

Ahora, por el Lema 10, el Lema 12 y la descripción topológica $(\star)$ de los cerrado-abiertos anteriormente dada, podemos concluir que bajo las hipótesis de la parte (1) del Teorema 6 se verifica lo siguiente:

(A) $i(\tau) = i(\tau') = i$ es el mayor entero n tal que $\sigma_n(\Gamma)$ se sumerge en cualquier cerrado-abierto de $\sigma_\tau(\Gamma)$.
(B) Para $n = j, j-1, j-2, \ldots, i+1$, $\tau_n = \tau_n'$ es el mayor entero k tal que existe un cerrado-abierto C de $\sigma_\tau(\Gamma)$ en el que no puede sumergirse $\sigma_{n+1}(\Gamma)$ pero en el que sin embargo $\sigma_n(\Gamma)^{k+\sum_{r>n}\tau_r}$ sí se puede sumergir.

Con esto concluye la prueba del Teorema 6. Para la afirmación (A), como $\sigma_{i(\tau)}(\Gamma)^\omega$ es uno de los factores de $\sigma_\tau(\Gamma)$, es claro que $\sigma_{i(\tau)}(\Gamma)^\omega$ sigue siendo un factor en cualquier cerrado-abierto como en $(\star)$. Por otra parte, sólo hay una cantidad finita de factores de tipo $\sigma_m(\Gamma)$, $m > i(\tau)$ en $\sigma_\tau(\Gamma)$, luego es posible obtener un cerrado-abierto como en $(\star)$ de tal modo que todos los factores en $\prod_{s\in A} \sigma_{n_s-|F_s|}(\Gamma) \times \prod_{s\notin A} \sigma_{n_s}(\Gamma)$ sean de la forma $\sigma_m(\Gamma)$ con $m \le i(\tau)$. Por el Lema 10, $\sigma_k(\Gamma)$ no se sumerge en tal C si $k > i(\tau)$.

La afirmación (B) se prueba por "inducción hacia atrás" comenzando en j y terminando en $i+1$. Sabemos, por el Lema 9, que

$$\sigma_\tau(\Gamma) \sim \sigma_i(\Gamma)^\omega \times \prod_{m=i+1}^{j} \sigma_m(\Gamma)^{\tau_m}$$

La afirmación (B) para $n = j$ es consecuencia directa del Lema 10 puesto que ningún cerrado-abierto puede contener a $\sigma_{j+1}(\Gamma)$ y el mayor exponente de $\sigma_j(\Gamma)$ dentro de $\sigma_\tau(\Gamma)$ es τ_j. Pasamos al caso en que $i < n < j$. El "mayor" cerrado-abierto básico posible C de $\sigma_\tau(\Gamma)$ que no contiene a $\sigma_{n+1}(\Gamma)$ se obtiene reduciendo los factores $\sigma_m(\Gamma)$ con $m > n$ tanto como sea necesario:

$$C \sim \sigma_i(\Gamma)^\omega \times \prod_{m=i+1}^{n} \sigma_m(\Gamma)^{\tau_m} \times \prod_{m=n+1}^{j} \sigma_n(\Gamma)^{\tau_m}$$

El mayor exponente de $\sigma_n(\Gamma)$ en tal C es $\sum_{m=n}^{j} \sigma_{\tau_m}$. $\square$

1.3. Espacios de funciones continuas sobre compactos de Eberlein uniformes

En esta sección, estudiamos los espacios de Banach $C(K)$ donde K es un producto finito o numerable de espacios del tipo $\sigma_k(\Gamma)$. En el caso de los productos finitos, ha sido probado recientemente por Marciszewski [49] que un espacio de Banach $C(K)$ es isomorfo a $c_0(\Gamma)$ si y sólo si K tiene peso $|\Gamma|$ y $K \subset \sigma_n(\Gamma)$ para algún $n < \omega$. Éste es el caso de cualquier compacto de la forma $K = \prod_{i=1}^n \sigma_{k_i}(\Gamma)$ que puede ser sumergido dentro de $\sigma_{\sum k_i}(\bigcup_1^n \Gamma \times \{i\})$ haciendo $x \mapsto \bigcup_1^n x_i \times \{i\}$. Por tanto, es consecuencia del resultado de Marciszewski que los espacios de Banach de funciones continuas sobre productos finitos de espacios $\sigma_k(\Gamma)$ sobre un Γ fijado son todos isomorfos. Aquí probaremos el correspondiente resultado para productos infinitos numerables:

Teorema 13. *Sea Γ un conjunto infinito y (k_n) una sucesión de enteros positivos. Los espacios de Banach $C(\prod_{n<\omega} \sigma_{k_n}(\Gamma))$ y $C(\sigma_1(\Gamma)^\omega)$ son isomorfos.*

Las técnicas que usaremos están basadas en el uso de operadores regulares de promedio y el llamado método de descomposición de Pełczyński, desarrollados en [52] y [61] para probar el conocido resultado de Miljutin de que los espacios de funciones continuas sobre compactos metrizables no numerables son todos isomorfos.

Definición 14. *Sea $\phi : L \longrightarrow K$ una suprayección continua entre compactos. Un operador regular de promedio para ϕ es un operador positivo $T : C(L) \longrightarrow C(K)$ (es decir $T(f) \geq 0$ si $f \geq 0$) con $T(1_L) = 1_K$ y $T(x \circ \phi) = x$ para todo $x \in C(K)$.*

Estableceremos además el siguiente resultado, que es una mejora del Teorema 2, así como un resultado de Argyros y Arvanitakis [6] de que para cada compacto de Eberlien uniforme K existe un compacto de Eberlein uniforme totalmente disconexo L del mismo peso y una suprayección continua $f : L \longrightarrow K$ que admite un operador regular de promedio.

Teorema 15. *Sea K un compacto de Eberlein uniforme de peso κ. Existe un subespacio cerrado L de $\sigma_1(\kappa)^{\mathbb{N}}$ y una suprayección continua $f : L \longrightarrow K$ que admite un operador regular de promedio.*

De nuevo consideraremos que $\sigma_k(\Gamma)$ es la familia de los subconjuntos de Γ de cardinalidad a lo sumo k con abiertos básico los conjuntos Φ_F^G descritos en la Sección 1.2. Denotaremos por $p : \sigma_1(\Gamma)^k \longrightarrow \sigma_k(\Gamma)$ la suprayección continua dada por $p(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \cup \cdots \cup x_k$. Ya observamos en la Sección 1.1 que esta aplicación permite expresar un producto numerable cualquiera de espacios $\sigma_k(\Gamma)$ como imagen continua de $\sigma_1(\Gamma)^\omega$. También usaremos la notación $B^+(\Gamma) = B(\Gamma) \cap [0,1]^\Gamma$. El hecho clave en esta sección es el siguiente Teorema 16 (algo similar puede encontrarse en [67]: la suprayección natural

$K^2 \longrightarrow exp_2(K) = \{\{x,y\} : x,y \in K\}$ dada por $(x,y) \mapsto \{x,y\}$ tiene un operador regular de promedio):

Teorema 16. *La aplicación $p : \sigma_1(\Gamma)^k \longrightarrow \sigma_k(\Gamma)$ admite un operador regular de promedio.*

Prueba: Para cada $y \in \sigma_k(\Gamma)$ denotamos por $L(y)$ el subconunto de $p^{-1}(y)$ formado por las tuplas $(x^1, \dots, x^k) \in p^{-1}(y)$ tales que $x^i \cap x^j = \emptyset$ para $i \neq j$ (es decir, $L(y)$ está formado por aquellas tuplas de $p^{-1}(y)$ en las que no aparece repetido ningún conjunto unipuntual).

El operador regular de promedio $T : C(\sigma_1(\Gamma)^k) \longrightarrow C(\sigma_k(\Gamma))$ se define como sigue:

$$T(f)(y) = \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} f(x)$$

La única dificultad está en probar que $T(f)$ es una función continua siempre que f sea continua. Así que fijaremos $f \in C(\sigma_1(\Gamma)^k)$, un punto $y \in \sigma_k(\Gamma)$ y $\varepsilon > 0$, y trataremos de ver la ε-continuidad de $T(f)$ en el punto y. Para cada $x = (x_1, \dots, x_k) \in L(y)$, como f es continua en x, existe un entorno U_x de x en $\sigma_1(\Gamma)^k$ en el que $\sup_{x' \in U_x} |f(x) - f(x')| < \varepsilon$. El conjunto U_x debe contener un entorno básico de x de la forma

$$\Phi_{x_1}^{G_1^x} \times \cdots \times \Phi_{x_k}^{G_k^x} \subset U_x$$

donde G_i^x es un subconjunto finito de Γ disjunto con x_i. Definimos un entorno de y

$$V = \Phi_y^{\bigcup_{x \in L(y)} \bigcup_{i=1}^k G_i^x \setminus y}$$

y probaremos que $|T(f)(y) - T(f)(y')| < \varepsilon$ para todo $y' \in V$. Fijamos pues $y' \in V$ (en particular $y \subset y'$). En primer lugar, definimos una suprayección $r : L(y') \longrightarrow L(y)$ de la siguiente manera: si $(x_1, \dots, x_k) \in L(y')$ entonces $r(x) = (r(x)_1, \dots, r(x)_k)$ donde $r(x)_i = x_i \cap y$. Claramente, todas las fibras de r tienen la misma cardinalidad que llamamos $n = |r^{-1}(x)|$, de modo que $|L(y')| = n|L(y)|$. El hecho clave (usado en la última desigualdad de la expresión con la que concluye esta prueba) es que si $x \in L(y)$ y $x' \in r^{-1}(x)$, entonces $x' \in U_x$. Para ver esto, tómese $x = (x_1, \dots, x_k) \in L(y)$ y $x' = (x'_1, \dots, x'_k) \in r^{-1}(x)$. Comprobemos que $x'_i \in \Phi_{x_i}^{G_i^x}$: Si $x'_i \subset y$ entonces $x'_i = x_i$. Si $x'_i = \{\gamma\} \subset y' \setminus y$ entonces $x_i = \emptyset$

y como $y' \in V$, $\gamma \notin G_i^x$ y de nuevo $x_i' \in \Phi_{x_i}^{G_i^x}$. Finalmente,

$$
\begin{aligned}
|T(f)(y') - T(f)(y)| &= \left| \frac{1}{|L(y')|} \sum_{x' \in L(y')} f(x') - \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|L(y')|} \sum_{x \in L(y)} \sum_{x' \in r^{-1}(x)} f(x') - \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} \sum_{x' \in r^{-1}(x)} f(x') - \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} f(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{x' \in r^{-1}(x)} f(x') \right) - f(x) \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} \left(\frac{1}{n} \sum_{x' \in r^{-1}(x)} (f(x') - f(x)) \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} \left(\frac{1}{n} \sum_{x' \in r^{-1}(x)} |f(x') - f(x)| \right) \\
&< \frac{1}{|L(y)|} \sum_{x \in L(y)} \left(\frac{1}{n} \sum_{x' \in r^{-1}(x)} \varepsilon \right) = \varepsilon
\end{aligned}
$$

□

Lema 17. *(a) Sea $g : L \longrightarrow K$ una suprayección continua entre compactos que admite un operador regular de promedio y M un subconjunto cerrado de K. Entonces la restricción $g : g^{-1}(M) \longrightarrow M$ también admite un operador regular de promedio [6, Proposition 18].*

(b) Sea $\{g_i : L_i \longrightarrow K_i\}$ una familia de suprayecciones continuas entre compactos que admiten operadores regulares de promedio. Entonces la aplicación producto $\prod g_i : \prod L_i \longrightarrow \prod K_i$ también admite un operador regular de promedio [61, Proposition 4.7].

Prueba del Teorema 15: Sabemos que podemos ver K como subespacio cerrado de $B(\Gamma)$, de hecho como subespacio cerrado de $B^+(\Gamma)$ ya que $B(\Gamma)$ puede ser sumergido dentro de $B^+(\Gamma \times \{a,b\}) \sim B^+(\Gamma)$ mediante la aplicación $u(x)_{\gamma,a} = \text{máx}(0, x_\gamma)$, $u(x)_{\gamma,b} = \text{máx}(0, -x_\gamma)$. Consideramos pues K como subconjunto cerrado de $B^+(\Gamma)$ siendo $|\Gamma| = \kappa$. Sea $\phi : \{0,1\}^\omega \longrightarrow [0,1]$ dada por $\phi(x) = \sum r_i x_i$ donde $r_i = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i$. Se prueba en [6] que ϕ admite un operador regular de promedio y por tanto por el Lema 17 también la aplicación $\phi^\Gamma : \{0,1\}^{\omega \times \Gamma} \longrightarrow [0,1]^\Gamma$ y su restricción $\phi^\Gamma : L' = (\phi^\Gamma)^{-1}(K) \longrightarrow K$ admiten operadores regulares de promedio. El espacio L' es un subespacio de $L_0 = (\phi^\Gamma)^{-1}(B^+(\Gamma))$ para el que podemos dar la siguiente descripción:

$$\begin{aligned} x \in L_0 &\iff \phi^\Gamma(x) \in B^+(\Gamma) \\ &\iff \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi^\Gamma(x)_\gamma \leq 1 \\ &\iff \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{n=0}^{\infty} r_n x_{(\gamma,n)} \leq 1 \\ &\iff \sum_{n=0}^{\infty} r_n N_n(x) \leq 1, \end{aligned}$$

donde $N_n(x)$ es la cardinalidad de $supp(x|_{\Gamma\times\{n\}})$. Observemos ahora que, si M_n denota la parte entera de r_n^{-1}, entonces $L' \subset L_0 \subset \prod_{n=1}^{\infty} \sigma_{M_n}(\Gamma)$. Del Teorema 16 y del apartado (b) del Lema 17 se sigue la existencia de una suprayección continua $g : \sigma_1(\Gamma)^\omega \longrightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \sigma_{M_n}(\Gamma)$ que admite un operador regular de promedio. Haciendo uso del apartado (a) del Lema 17 se tiene una suprayección continua $g : L = g^{-1}(L') \longrightarrow L'$ que admite un operador regular de promedio y entonces la composición $L \longrightarrow L' \longrightarrow K$ es la aplicación que se buscaba. $\square$

Necesitamos ahora el llamado método de descomposición de Pełczyński, usado para establecer la existencia de isomorfismos entre espacios de Banach. Para dos espacios de Banach X e Y escribiremos $X|Y$ si existe un espacio de Banach Z tal que $X \oplus Z$ es isomorfo a Y, abreviadamente $X \oplus Z \sim Y$. Además, $Y = (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_{c_0}$ denotará la suma-c_0 de los espacios de Banach $X_1, X_2, \ldots$,

$$Y = \{y = (x_n) \in \prod X_n : \lim \|x_n\| = 0\}, \quad \|y\| = \sup_n \|x_n\|.$$

Teorema 18 (cf. [61], §8). *Sean X e Y espacios de Banach que cumplen que $X|Y$, $Y|X$ y $(X \oplus X \oplus \cdots)_{c_0} \sim X$, entonces $X \sim Y$.*

Si existe una suprayección continua $\phi : L \longrightarrow K$ que admite un operador regular de promedio T, entonces $C(K)|C(L)$ ya que $C(L) = C(K) \oplus ker(T)$, cf. [61]. Esto ocurre en particular si $L \subset K$ es un retracto de K, pues en este caso el operador restricción es operador regular de promedio para la retracción. Por otra parte, para garantizar la última hipótesis del Teorema 18 usaremos el criterio del siguiente Lema 19. Para espacios topológicos K_n, recordamos que por $K_1 \oplus K_2 \oplus \cdots$ denotamos la suma topológica discreta, mientras que $\alpha(S)$ representa la compactificación por un punto de un espacio localmente compacto S.

Lema 19. *Sea K un compacto homeomorfo a $\alpha(K \oplus K \oplus \cdots)$. Entonces el espacio de Banach $(C(K) \oplus C(K) \oplus \cdots)_{c_0}$ es isomorfo a $C(K)$.*

Prueba: Aplicamos el Teorema 18 a $X = (C(K) \oplus C(K) \oplus \cdots)_{c_0}$ e $Y = C(K)$. Lo único que hay que comprobar es que $X|Y$. Sea ∞ el punto del infinito de $\alpha(K \oplus K \oplus \cdots) \sim K$. Entonces $X \sim Y' = \{f \in C(K) : f(\infty) = 0\}$ e $Y \sim Y' \oplus \mathbb{R}$. $\square$

Prueba del Teorema 13: Sean $K = \sigma_1(\Gamma)^\omega$ y $L = \prod \sigma_{k_n}(\Gamma)$. Aplicamos el Teorema 18 a $X = C(K)$ e $Y = C(L)$. En primer lugar, del Teorema 16 y el Lema 17(b) se sigue la existencia de una suprayección continua $f : K \longrightarrow L$ que admite un operador regular de promedio y por consiguiente $C(L)|C(K)$. Por otra parte, K es un retracto de L porque para cada k, $\sigma_1(\Gamma)$ es homeomorfo a un cerrado-abierto de $\sigma_k(\Gamma)$: la familia de todos los elementos de $\sigma_k(\Gamma)$ que contienen a ciertos $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ fijados. Por tanto, también $C(K)|C(L)$. Queda ver, a la vista del Lema 19, que $\alpha(K \oplus K \oplus \cdots) \sim K$. Para ello, fijemos $\gamma \in \Gamma$ y definamos para $n = 1, 2, \ldots$

$$K_n = \{x \in K = \sigma_1(\Gamma)^\omega : \gamma \in x_1 \cap \cdots \cap x_{n-1} \setminus x_n\}.$$

Los conjuntos K_n son cerrado-abiertos homeomorfos al propio K y K es la compactificación por un punto de su unión con punto del infinito $(\{\gamma\}, \{\gamma\}, \ldots)$. $\square$

Capítulo 2

El número de débil compactos que generan un espacio de Banach

En este capítulo estudiamos los siguientes índices topológicos:

Definición 20. *Sea X un espacio topológico.*

1. *El índice de generación compacta de X, $CG(X)$, se define como el menor cardinal infinito κ tal que existe una familia $\{K_\lambda : \lambda < \kappa\}$ de subconjuntos compactos de X cuya unión es densa en X.*
2. *El índice de $\mathscr{K}$-analiticidad de X, $\ell K(X)$, es el menor cardinal infinito κ para el que existe un espacio métrico completo M de peso κ y una usco $M \twoheadrightarrow 2^X$.*
3. *El índice de $\mathscr{K}$-determinación de X, $\ell\Sigma(X)$, es el menor cardinal infinito κ para el que existe un espacio métrico M de peso κ y una usco $M \twoheadrightarrow 2^X$.*
4. *El índice de Nagami de X, $Nag(X)$, es el menor cardinal infinito κ para el que existe un espacio topológico (completamente regular) M de peso κ y una usco $M \twoheadrightarrow 2^X$.*
5. *El número de Lindelöf de X, $\ell(X)$, es el menor cardinal infinito κ tal que cualquier cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento de a lo sumo κ abiertos.*

Si X es un espacio de Banach, todos los índices se referirán siempre a la topología débil de X. De este modo las clases de espacios de Banach débilmente compactamente generados, débilmente $\mathscr{K}$-analíticos y débil Lindelöf corresponden respectivamente con los espacios X tales que $CG(X) = \omega$, $\ell K(X) = \omega$ y $\ell(X) = \omega$, mientras que los espacios débilmente numerablemente determinados son aquellos para los que $\ell\Sigma(X) = \omega$ o equivalentemente $Nag(X) = \omega$. En general, un espacio topológico se dice de Lindelöf si $\ell(X) = \omega$. Para cualquier espacio de Banach X se tiene

$$\ell(X) \leq Nag(X) \leq \ell\Sigma(X) \leq \ell K(X) \leq CG(X)$$

La primera desigualdad puede encontrarse en [23] y se sigue del hecho de que el número de Lindelöf no puede incrementarse al pasar a la imagen por una usco. El resto de desigualdades son evidentes excepto quizá la última, véase la Sección 2.6.

2.1. Números cardinales y espacios métricos

En esta sección fijaremos algunas notaciones para este capítulo y definiremos algunos números cardinales que serán usados en las Secciones 2.6 y 2.7 y en el Capítulo 3. Recordamos que un número cardinal κ se identifica con el conjunto de los ordinales menores que κ, y en particular κ es un conjunto de cardinalidad κ, y lo consideraremos también como un espacio topológico dotado de la topología discreta. Por κ^ω denotaremos el conjunto de todas las sucesiones de elementos de κ dotado de la topología producto (con respecto a la topología discreta en cada factor), así como la cardinalidad de dicho conjunto. Finalmente, 2^A denota la familia de todos los subconjuntos de A, y cuando $A = \kappa$ es un cardinal, 2^κ también denota la cardinalidad de este conjunto.

Definición 21. *Sea κ un cardinal infinito:*

1. *El cardinal $\mathbf{d}(\kappa)$ se define como el menor cardinal λ tal que κ^ω es unión de λ subconjuntos compactos.*
2. *Sea τ un cardinal tal que $\tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$. El cardinal $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ es el menor cardinal λ para el que existe un conjunto A de cardinalidad λ tal que A no está contenido en ninguna unión de menos de τ subconjuntos compactos de κ^ω.*

Nótese que siempre $\kappa \leq \mathbf{d}(\kappa) \leq \kappa^\omega$ y $\tau \leq \mathbf{b}_\kappa(\tau) \leq \kappa^\omega$, y que $\mathbf{b}_\kappa(\tau) = \tau$ si $\tau \leq \kappa$ (podemos considerar el conjunto $A = \tau \times \kappa^\omega$). Todo compacto metrizable o es numerable o tiene la cardinalidad del continuo, luego $\mathbf{d}(\kappa) = \kappa^\omega$ para $\kappa > 2^\omega$ y $\mathbf{b}_\kappa(\tau) = \tau$ siempre que $2^\omega < \tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$. Por otra parte, si $cof(\kappa) > \omega$ entonces $\kappa^\omega = \bigcup_{\alpha<\kappa} \alpha^\omega$, y este hecho implica que $\mathbf{d}(\kappa) = \sum_{\alpha<\kappa} \mathbf{d}(|\alpha|)$. Los casos en que es difícil calcular $\mathbf{d}(\kappa)$ ocurren cuando κ es un cardinal de cofinalidad ω menor que el continuo. Por ejemplo, cuando $\kappa = \omega$ referimos a [73] para información sobre el cardinal $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\omega)$. Ilustramos también la situación para $\kappa = \omega_\omega$, para lo que necesitamos la siguiente observación, que nos señaló David Fremlin:

Proposición 22. *Para un cardinal infinito κ, $\mathbf{d}(\kappa) = \text{máx}[\mathbf{d}, \mathrm{cf}([\kappa]^{\leq\omega})]$, donde $\mathrm{cf}([\kappa]^{\leq\omega})$ es la menor cardinalidad de una familia cofinal A de subconjuntos numerables de κ, es decir, una familia tal que cada subconjunto numerable de κ es subconjunto de algún miembro de A.*

Mencionamos que Shelah ha obtenido que $\mathrm{cf}([\omega_\omega]^{\leq\omega}) < \omega_{\omega_4}$, cf. [22]. La prueba de la Proposición 22 no es difícil: si B es una familia de compactos que cubre κ^ω, entonces la familia $A = \{\{x_n : (x_i)_{i<\omega} \in K, n < \omega\} : K \in B\}$ es una familia cofinal de subconjuntos numerables de κ, y recíprocamente si A es una familia cofinal de subconjuntos de κ y para cada $s \in A$, C_s es una familia de $\mathbf{d}$ compactos cubriendo s^ω, entonces $B = \bigcup_{s\in A} C_s$ es una familia de compactos que cubre κ^ω.

Sobre los cardinales $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ sabemos poco más excepto para $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\omega(\omega_1)$ [73] y el hecho de que en algunos casos podemos establecer una relación con el conocido $\mathbf{b}$, por ejemplo $\mathbf{b} \leq \mathbf{b}_\omega(\omega_2) = \mathbf{b}_{\omega_1}(\omega_2)$ cuando $\omega_1 < \mathbf{d}$.

2.2. El índice de $\mathscr{K}$-analiticidad

Usaremos con frecuencia la siguiente caracterización del índice de $\mathscr{K}$-analiticidad:

Proposición 23. *Un espacio topológico X verifica $\ell K(X) \leq \kappa$ si y sólo si existe una usco $\kappa^\omega \twoheadrightarrow 2^X$.*

Prueba: Recordamos que cualquier espacio métrico completo Σ de peso κ es imagen continua de un subespacio cerrado M de κ^ω: Se considera una base $\{O_\lambda : \lambda < \kappa\}$ de Σ y $M = \{x \in \kappa^\omega : diam(O_{x_n}) < \frac{1}{n}, \overline{O_{x_{n+1}}} \subset O_{x_n}\}$. Además, para cada M subconjunto cerrado de κ^ω existe una retracción $p : \kappa^\omega \longrightarrow M$ [43, Proposition 2.8]. Por lo tanto, si $\ell K(Y) \leq \kappa$ entonces existe una usco $\Sigma \twoheadrightarrow 2^X$ y tenemos suprayecciones continuas $\kappa^\omega \longrightarrow M \longrightarrow \Sigma$ que componiendo nos dan una usco $\kappa^\omega \twoheadrightarrow 2^X$. $\square$

Proposición 24. *Sean Σ, Σ_n, X, Y, X_n espacios topológicos.*

1. *Si Y es imagen continua de X y existe una usco $\phi : \Sigma \twoheadrightarrow 2^X$, también existe una usco $\psi : \Sigma \twoheadrightarrow 2^Y$.*
2. *Si Y es un subespacio cerrado de X y existe una usco $\phi : \Sigma \twoheadrightarrow 2^X$, también existe una usco $\psi : \Sigma' \twoheadrightarrow 2^Y$ siendo Σ' un subespacio cerrado de Σ.*
3. *Si existen uscos $\phi_n : \Sigma_n \twoheadrightarrow 2^{X_n}$, entonces también existe una usco $\prod_{n<\omega} \Sigma_n \twoheadrightarrow 2^{\prod X_n}$.*
4. *Si se tiene $X_n \subset X$ y existen uscos $\phi_n : \Sigma_n \twoheadrightarrow 2^{X_n}$, entonces también existe una usco $\bigcup_{n<\omega}\{n\} \times \Sigma_n \twoheadrightarrow 2^{\bigcup_{n<\omega} X_n}$.*

Prueba: En el apartado (1), si $f : X \longrightarrow Y$ es continua y suprayectiva basta considerar $\psi(\sigma) = f(\phi(\sigma))$. Para el apartado (2), $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma : \phi(\sigma) \cap Y \neq \emptyset\}$ y $\psi(\sigma) = \phi(\sigma) \cap Y$. En el (3) se define $\psi((\sigma_n)_{n<\omega}) = \prod_{n<\omega} \phi_n(\sigma_n)$. En el (4) $\psi(n, \sigma) = \phi_n(\sigma)$. $\square$

Las propiedades que recoge la Proposición 25 se pueden encontrar en [23] probadas para el índice $\ell\Sigma(X)$ y la prueba para $\ell K(X)$ o en su caso para $Nag(X)$ es análoga. Es bien conocido además el "caso numerable" de la Proposición 25 (lo que resultaría de considerar sólo si el valor de los índices es numerable o no numerable) y la demostración que presentamos aquí es fiel generalización de la de la prueba del caso numerable tal como aparece en [31].

Proposición 25. *Sea X un espacio de Banach y K un compacto.*

1. *Si Y es un subespacio cerrado de X, entonces $\ell K(Y) \leq \ell K(X)$, $\ell\Sigma(Y) \leq \ell\Sigma(X)$ y $Nag(Y) \leq Nag(X)$.*

2. *Si Y es un subconjunto de X con $\overline{span}(Y)=X$, entonces $\ell K(X)\leq \ell K(Y)$, $\ell\Sigma(X)\leq \ell\Sigma(Y)$ y $Nag(X)\leq Nag(Y)$.*

3. *Si Z es un subconjunto de $C(K)$ que separa los puntos de K, entonces $\ell K(C(K)) = \ell K(C_p(K))\leq \ell K(Z,\tau_p)=\ell K(Z,w)$, $\ell\Sigma(C(K))=\ell\Sigma(C_p(K))\leq \ell\Sigma(Z,\tau_p)=\ell\Sigma(Z,w)$ y $Nag(C_p(K))\leq Nag(Z,\tau_p)$.*

Prueba: El apartado 1 se sigue del apartado (1) de la Proposición 24.

El apartado (3) se prueba exactamente como [31, Theorem 7.1.8]: Supongamos que existe una usco $\Sigma \twoheadrightarrow 2^Z$ y llamemos $\mathscr{S}$ a la menor clase de espacios topológicos que contiene a Σ y $\mathbb{R}$ y es cerrada bajo subespacios cerrados, uniones discretas numerables y productos numerables., Haciendo uso de la Proposición 24, también existen uscos desde $\Sigma\times\Sigma\times\mathbb{R}$ en 2^{Z+Z}, $2^{Z\cdot Z}$ y $2^{\mathbb{R}Z}$. Iterando este hecho y usando también el apartado (4) de la Proposición 24 obtenemos que existe una usco $\Sigma_1 \twoheadrightarrow 2^W$ siendo W el álgebra generada por Z (es decir, el menor subespacio cerrado bajo productos) y $\Sigma_1\in\mathscr{S}$. Consideramos $B=\{f\in W : \|f\|\leq 1\}$ que es un subconjunto cerrado de (W,τ_p). Al ser W una subálgebra de $C(K)$ que separa los puntos de K, el Teorema de Stone-Weierstrass afirma que W es denso en $C(K)$ en la topología de la norma, lo que implica que es suprayectiva la aplicación continua $\psi : (W,\tau_p)\times(B,\tau_p)^{\mathbb{N}} \longrightarrow C_p(K)$ dada por $\psi(f,(f_n))(x) = f(x)+\sum_{n<\omega}2^{-n}f_n(x)$. Así pues, remitiéndonos de nuevo a la Proposición 24, concluimos que existe una usco $\Sigma_2 \twoheadrightarrow 2^{C_p(K)}$ siendo $\Sigma_2\in\mathscr{S}$. Este argumento prueba que $i(C_p(K))\leq i(Z,\tau_p)$ para cualquiera de los índices $i=\ell K$, $\ell\Sigma$, Nag.

Queda ver que $i(Z,w)=i(Z,\tau_p)$ para los índices $i=\ell K$, $\ell\Sigma$. La desigualdad $i(Z,w)\geq (Z,\tau_p)$ se sigue de que la identidad $(Z,w)\longrightarrow (Z,\tau_p)$ es una suprayección continua. Para la otra desigualdad, sea ahora $B=\{f\in Z : \|f\|\leq 1\}$. Comprobaremos que si Σ es un espacio métrico y $\phi : \Sigma \twoheadrightarrow 2^{(B,\tau_p)}$ es una usco, entonces la misma aplicación $\phi' : \Sigma \twoheadrightarrow 2^{(B,w)}$, $\phi'(\sigma)=\phi(\sigma)$, es también una usco. En primer lugar, por el Teorema de Grothendieck [35, Theorem 4.2] los débil compactos y los puntualmente compactos de $B_{C(K)}$ son los mismos, así que $\phi'(\sigma)$ es un compacto de (B,w) para cada σ. Comprobamos ahora que ϕ' es superiormente semicontinua: supongamos que U es un abierto de $(B_{C(K)},w)$ tal que $\phi(\sigma)\subset U$. Al ser Σ un espacio métrico, si no existiera V entorno de σ con $\phi(V)\subset U$ eso implicaría la existencia de una sucesión (σ_n) que converge a σ tal que $\phi(\sigma_n)\setminus U\neq\emptyset$ para todo $n<\omega$. La imagen por una usco de un conjunto compacto es compacto, así que cada uno de los conjuntos $A_n=\phi(\{\sigma\}\cup\{\sigma_i : i>n\})$ es puntualmente compacto en $B_{C(K)}$ y por tanto también débil compacto. Tenemos además que la sucesión $\{A_n\setminus U\}$ es una sucesión decreciente de subconjuntos compactos no vacíos de $B_{C(K)}$, luego existe $f\in\bigcap_{n<\omega}(A_n\setminus U)$. Como $\phi(\sigma)\subset U$, $f\notin\phi(\sigma)$ así que $\phi(\sigma)\subset B\setminus\{f\}$. Por la semicontinuidad superior de ϕ en la topología τ_p, ha de existir n_0 tal que $\phi(\sigma_n)\subset B\setminus\{f\}$ para todo $n > n_0$, lo que es absurdo.

Finalmente, el apartado (2) se sigue del apartado (1): si tenemos $\overline{span}(Y) = X$, entonces Y puede verse como un subconjunto de $C(B_{X^*})$ que separa los puntos de B_{X^*}, y la topología débil de X es la topología de convergencia puntual en $C(B_{X^*})$. $\square$

2.3. El índice de generación compacta

En esta sección veremos algunas de las propiedades elementales del índice $CG(X)$ en espacios de Banach análogas a propiedades bien conocidas de los espacios débilmente compactamente generados. La primera observación es que para un espacio de Banach X, $CG(X)$ es igual al menor cardinal infinito κ de una familia de débil compactos de X cuya unión genera un subconjunto denso de X, $X = \overline{span}\bigcup_{\lambda<\kappa} K_\lambda$, ya que si $\bigcup_{i<\kappa} K_i$ es una tal familia de débil compactos y definimos $K_F = |F| \cdot \overline{aco}\left(\bigcup_{i\in F} K_i\right)$ para cada subconjunto finito F de κ, tendremos otra familia de la misma cardinalidad cuya unión es ahora densa (aquí $aco(A)$ denota la envoltura absolutamente convexa de A, $aco(A) = conv(A \cup -A)$; $\overline{aco}(A)$ es débil compacto si A es débil compacto por el Teorema de Krein [34, Theorem 3.58]). Un compacto se dice de Eberlein si es homeomorfo a un débil compacto de un espacio de Banach, o equivalentemente (cf. [34, Corollary 12.2]) si es homeomorfo a un subconjunto compacto de $C_p(L)$ para algún compacto L. Es bien conocido (ver por ejemplo [31]) que el siguiente Teorema 27 se verifica para $\kappa = \omega$ y que estas condiciones equivalen entonces a que K sea un compacto de Eberlein. Haremos uso de este hecho y también de manera específica al difícil resultado de Amir y Lindenstrauss [1] que yace tras él:

Teorema 26 (Amir, Lindenstrauss). *Sea Y un espacio de Banach débilmente compactamente generado. Existe un conjunto Γ y un operador $T : Y^* \longrightarrow c_0(\Gamma)$ que es uno a uno y continuo respecto de las topologías débil* en Y^* y puntual en $c_0(\Gamma)$.*

Teorema 27. *Sea K un compacto y κ un cardinal infinito. Son equivalentes:*

1. *$CG(C(K)) \leq \kappa$.*
2. *$CG(C_p(K)) \leq \kappa$.*
3. *K es un subespacio cerrado de un producto $\prod_{\alpha<\kappa} K_\alpha$ con κ factores en el que cada K_α es un compacto de Eberlein.*
4. *El espacio K puede encontrarse como $K \subset [0,1]^\Gamma$ tal que $\Gamma = \bigcup_{\lambda<\kappa} \Gamma_\lambda$ y para cada $x \in K$, y cada $\lambda < \kappa$ el conjunto $\{\gamma \in \Gamma_\lambda : x_\gamma \neq 0\}$ es finito.*
5. *Existe una familia $\mathscr{U}$ de abiertos F_σ de K que T_0-separa los puntos de K (es decir, para cada $x_1 \neq x_0$ existe $U \in \mathscr{U}$ e $i \in \{0,1\}$ tal que $x_i \in U$ pero $x_{1-i} \notin U$) y que puede descomponerse en κ subfamilias punto-finitas $\mathscr{U} = \bigcup_{\lambda<\kappa} \mathscr{U}_\lambda$ (es decir, para cada $\lambda < \kappa$ y cada $x \in K$ $\{U \in \mathscr{U}_\lambda : x \in U\}$ es finito).*

Cuando estas condiciones se verifiquen, diremos que K es un compacto de κ-Eberlein.

Prueba: Que (1) implica (2) es claro puesto que la topología débil es más fina que la topología de convergencia puntual.

Que (2) implica (3): si $CG(C_p(K)) \leq \kappa$ entonces tenemos una familia $\{S_\lambda : \lambda < \kappa\}$ de compactos de $C_p(K)$ cuya unión es densa en $C_p(K)$. Definimos entonces K_λ como el cociente de K por la relación $x \sim y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ para cada $f \in S_\lambda$. Cada K_λ es un compacto de Eberlein ya que S_λ es un conjunto puntualmente compacto de funciones continuas que separa los puntos de K_λ, luego K_λ es homeomorfo a un compacto de $C_p(S_\lambda)$. Por otra parte K es un subespacio de $\prod_{\lambda<\kappa} K_\lambda$.

Que (3) es equivalente a (4) se sigue inmediatamente del hecho, consecuencia del Teorema de Amir-Lindenstrauss [1], de que K es un compacto de Eberlein si y sólo si verifica (4) para $\kappa = \omega$, si y sólo si se verifica (3) para $\kappa = \omega$, cf. [34, §11].

Para (3) implica (1), sea K un subespacio cerrado de $L = \prod_{\alpha<\kappa} K_\alpha$ donde cada K_α es un compacto de Eberlein. Puesto que $(C(K), w)$ es imagen continua de $(C(L), w)$ basta ver que $CG(C(L)) \leq \kappa$. Para cada subconjunto finito F de κ consideramos $K_F = \prod_{\alpha\in F} K_\alpha$ que es un compacto de Eberlein. La suprayección natural $L \longrightarrow K_F$ induce un operador uno a uno $T : C(K_F) \longrightarrow C(L)$, y como $C(K_F)$ es débilmente compactamente generado, $CG(T(C(K_F))) = \omega$. El Teorema de Stone-Weierstrass implica ahora que el conjunto $\bigcup\{T(C(K_F)) : F \in [\kappa]^{<\omega}\}$, al ser un álgebra de funciones que separa los puntos de L, es denso en $C(L)$, así que $CG(C(L)) \leq \kappa$.

Para (4) implica (5) considérese $U_{\gamma,q} = \{x \in K : x_\gamma > q\}$, $\gamma \in \Gamma$, $q \in \mathbb{Q}$ y se definen entonces $\mathscr{U}_{\lambda,q} = \{U_{\gamma,q} : \gamma \in \Gamma_\lambda\}$ y $\mathscr{U} = \bigcup_{\lambda<\kappa, q\in\mathbb{Q}} \mathscr{U}_{\lambda,q}$.

Para (5) implica (4), sabemos que para cada $U \in \mathscr{U}$ abierto F_σ existe una función continua $f_U : K \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_U(x) = 0$ si y sólo si $x \notin U$ y en ese caso el embebimiento $K \subset [0,1]^{\mathscr{U}}$ dado por $x \mapsto (f_U(x))_{U\in\mathscr{U}}$ cumple la condición (4). $\square$

Teorema 28. *Un espacio de Banach X es subespacio de un espacio de Banach Y con $CG(Y) \leq \kappa$ si y sólo si (B_{X^*}, w^*) es κ-Eberlein.*

Prueba: Si $K = (B_{X^*}, w^*)$ es κ-Eberlein, entonces $CG(C(K)) \leq \kappa$ y X es subespacio de $C(K)$. Recíprocamente, sea $\{Y_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia de κ subespacios débilmente compactamente generados de Y cuya unión es densa en Y. Por el Teorema 26, para cada α existe un operador uno-a-uno débil*- puntualmente de norma uno, $T_\alpha : Y_\alpha^* \longrightarrow c_0(\Gamma_\alpha)$ que induce por composición un operador débil*-puntualmente continuo $T'_\alpha : Y^* \longrightarrow c_0(\Gamma_\alpha)$. Tenemos así una función uno-a-uno débil*-puntualmente continua $\prod T'_\alpha : Y^* \longrightarrow \prod c_0(\Gamma_\alpha)$

lo que implica que B_{Y^*} es un compacto de κ-Eberlein en la topología débil*, por el apartado (3) del Teorema 27. Como B_{X^*} es imagen continua de B_{Y^*} queda ver que:

Teorema 29. *Toda imagen continua de un compacto de κ-Eberlein es un compacto de κ-Eberlein.*

Al contrario que en los anteriores resultados, ahora el Teorema 29 no se puede deducir fácilmente del conocido (y difícil) caso particular en que $\kappa = \omega$. Es necesario ahora adaptar los argumentos del caso numerable a este contexto más general. Conocemos al menos dos formas de hacer esto. Una de ellas es seguir la prueba de [20] cambiando donde sea necesario sucesiones convergentes por redes indicadas en el retículo de los subconjuntos finitos de κ. El otro argumento se explica al final de la Sección 3.1.

2.4. Familias adecuadas

Los ejemplos que presentaremos están basados en familias adecuadas de conjuntos, un concepto introducido por Talagrand [68], precisamente para dar ejemplos de este estilo en el caso numerable. En esta sección enunciaremos los hechos que necesitaremos sobre esta construcción.

Definición 30. *Una familia $\mathscr{A}$ de subconjuntos de un conjunto dado Δ se dice adecuada si para cada A, A pertenece a $\mathscr{A}$ si y sólo si cada subconjunto finito de A pertenece a $\mathscr{A}$. Asociado a tal familia, tenemos el compacto $K_{\mathscr{A}} \subset \{0,1\}^{\Delta}$ de las funciones características de los elementos de $\mathscr{A}$.*

El hecho clave probado por Talagrand es el siguiente:

Teorema 31. *Si Δ es un espacio topológico y $\mathscr{A}$ es una familia adecuada de subconjuntos de Δ formada por subconjuntos cerrados de Δ, entonces existe una usco $\phi : \Delta \twoheadrightarrow 2^X$ siendo X un subconjunto de $C_p(K_{\mathscr{A}})$ que separa los puntos de $K_{\mathscr{A}}$.*

Prueba: El conjunto que separa los puntos es $X = \Delta \cup \{0\}$ cuya topología de convergencia puntual coincide con la menor topología en la que cada conjunto $A \in \mathscr{A}$ es cerrado y la usco $\phi : \Delta \twoheadrightarrow 2^X$ está dada por $\delta \mapsto \{0, \delta\}$. Para verificar que ϕ es usco, basta ver que para cada abierto básico U de (X, τ_p), el conjunto $\{t \in \Delta : \phi(t) \subset U\}$ es abierto en Δ. De hecho, como $0 \in \phi(t)$ para todo t, basta verlo para U en entorno básico de 0 en (X, τ_p). Tal entorno básico es de la forma

$$\begin{aligned} U = U_{A_1,\ldots,A_n} &= \{0\} \cup \{\delta(t) \in X : \delta(t)(\chi_{A_i}) = 0,\ i = 1, \ldots, n\} \\ &= \{0\} \cup \{\delta(t) \in X : t \notin A_i = 0,\ i = 1, \ldots, n\} \end{aligned}$$

siendo $A_i \in \mathscr{A}$. En este caso, $\phi(t) \subset U$ si y sólo si $\delta(t) \in U$ si y sólo si $t \notin \bigcup A_i$, así que

$$\{t \in \Delta : \phi(t) \subset U\} = \Delta \setminus \bigcup_{1}^{n} A_i$$

que efectivamente, es abierto en Δ. $\square$

Haciendo uso de la Proposición 25 y el Teorema 31 obtenemos:

Corolario 32. *Si Σ es un espacio métrico completo de peso a lo sumo κ y $\mathscr{A}$ es una familia adecuada de subconjuntos cerrados de Σ, entonces $\ell K(C(K_{\mathscr{A}})) \leq \kappa$.*

También haremos uso del siguiente hecho:

Teorema 33. *Sea $\mathscr{A}$ una familia adecuada de subconjuntos de un conjunto Δ y supongamos que $K = K_{\mathscr{A}}$ es un compacto de κ-Eberlein. Entonces, existe una descomposición $\Delta = \bigcup_{\lambda<\kappa} \Delta_\lambda$ tal que para cada $x \in K_{\mathscr{A}}$ y cada $\lambda < \kappa$, x tiene sólo una cantidad finita de coordenadas no nulas en Δ_λ.*

Prueba: La prueba es análoga a la de [31, Theorem 4.3.2], cambiando donde se necesita familias numerables por familias de cardinalidad a lo sumo κ. El primer paso consiste en probar la siguiente afirmación general:

Afirmación: Si K es un compacto totalmente disconexo de κ-Eberlein, entonces el conjunto $C(K,\{0,1\}) \subset C(K)$ se puede expresar como una unión de κ débil compactos.

Prueba de la afirmación: Consideramos la familia $\mathscr{U}$ de la condición (5) del Teorema 27. Podemos suponer que cada $U \in \mathscr{U}$ es un cerrado-abierto, porque si no fuera así, cada $U \in \mathscr{U}$ al ser F_σ es unión numerable de conjuntos cerrado-abiertos $U = \bigcup_{n<\omega} U_n$ y podemos sustituir nuestra familia $\mathscr{U}$ original por $\mathscr{U}' = \{U_n : U \in \mathscr{U}, n < \omega\}$ con la descomposición $\mathscr{U}' = \bigcup_{\lambda<\kappa, n<\omega} \{U_n : U \in \mathscr{U}_\lambda\}$. Suponemos pues que $\mathscr{U}$ está formada por cerrado-abiertos. Sea $\mathscr{B}_1 = \mathscr{U} \cup \{K \setminus U : U \in \mathscr{U}\}$. Afirmamos que $\mathscr{B}_1$ es una subbase para la topología de K (es decir, las intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{B}_1$ forman una base). Efectivamente, si Ω es un abierto de K y $x \in \Omega$, entonces para cada $y \in (K \setminus \Omega)$ al ser $\mathscr{U}$ una familia T_0-separadora existe $U_y \in \mathscr{B}_1$ tal que $y \in U_y$ pero $x \notin U_y$. Por compacidad, existen $y_1, \ldots, y_r \in (K \setminus \Omega)$ tales que $K \setminus \Omega \subset \bigcup_{i=1}^r U_{y_i}$ y $x \in \bigcap_{i=1}^r (K \setminus U_{y_i}) \subset \Omega$. Luego $\mathscr{B}_1$ es una subbase. Ahora hacemos para cada $\lambda < \kappa$ $S_\lambda = \{0,1\} \cup \{\chi_U, \chi_{K\setminus U} : U \in \mathscr{U}_\lambda\}$. Como $\mathscr{U}_\lambda$ es una familia punto-finita, el conjunto S_λ es débil compacto en $C(K,\{0,1\}) \subset C(K)$ (por el Teorema de Grothendieck [35, Theorem 4.2] los débil compactos y los puntualmente compactos de la bola de $C(K)$ son los mismos y por ser $\mathscr{U}_\lambda$ punto-finita, $\{0\} \cup \{\chi_U : U \in \mathscr{U}_\lambda\}$ es puntualmente homeomorfo a la compactificación por un punto de un conjunto discreto con 0 como punto del infinito y lo mismo puede decirse de los complementos $\{1\}\cup\{\chi_{K\setminus U}: U\in\mathscr{U}_\lambda\}$). Recursivamente, para cada $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ sucesión finita de elementos de κ definimos

$$S_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}=\{\text{mín}(f,g),\text{máx}(f,g): f,g\in S_{(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})}\}\cup S_{\lambda_n}.$$

Cada $S_{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}$ es débil compacto y al ser $\mathscr{B}_1$ una subbase, cada clopen de K se expresa como unión finita de intersecciones finitas de elementos de $\mathscr{B}_1$ y por tanto $C(K,\{0,1\})=\bigcup_{x\in\bigcup_n\kappa^n}S_x$. Esto finaliza la prueba de la afirmación.

Volvemos a la prueba del teorema. Escribimos ahora $C(K,\{0,1\})=\bigcup_{\lambda<\kappa}S_\lambda$ siendo S_λ un conjunto débil compacto. Cada $\delta\in\Delta$ induce una función $\pi_\delta\in C(K,\{0,1\})$ dada por $\pi_\delta(x)=\chi_x(\delta)$. Hacemos $\Delta_\lambda=\{\delta\in\Delta:\pi_\delta\in S_\lambda\}$. Supongamos que tuviéramos $x=\chi_A\in K=K_{\mathscr{A}}$ y $\lambda<\kappa$ tal que x tiene infinitas coordenadas no nulas en Δ_λ, digamos $\{\delta_n: n<\omega\}$. Como $\{\pi_{\delta_n}: n<\omega\}\subset\Delta_\lambda$ y Δ_λ es débil compacto, existe $\psi\in\Delta_\lambda$ un punto de aglomeración de la sucesión $\{\pi_{\delta_n}: n<\omega\}$ en la topología débil. Por una parte $\psi(x)=1$ ya que $\pi_{\delta_n}(x)=1$ para todo n. Por otro lado, al ser la familia $\mathscr{A}$ adecuada, como $x=x_A\in K=K_{\mathscr{A}}$ entonces también $\chi_F\in K$ para todo subconjunto finito F de A. Claramente se tiene que $\text{lím}_{n\to\infty}\pi_{\delta_n}(\chi_F)=0$ para cada subconjunto finito F de $\mathscr{A}$, así que $\psi(\chi_F)=0$ y además, como $x=\chi_A=\text{lím}_{F\in[A]^{<\omega}}\chi_F$, también $\psi(x)=0$, una contradicción. $\square$

2.5. Espacios débilmente Lindelöf determinados con índice de generación compacta arbitrariamente grande

Recordamos en primer lugar algunas definiciones. Las nociones de compacto de Corson y espacio débilmente Lindelöf determinado son bien conocidas, cf [34], [31]. El concepto de compacto de compacto de κ-Corson ha sido estudiado en [19].

Definición 34. *Sea κ un cardinal infinito. Un compacto K se dice de κ-Corson si es un homeomorfo a un compacto $L\subset[0,1]^\Gamma$ para algún conjunto Γ de tal forma que para cada $x\in L$ se tiene $|\{\gamma\in\Gamma: x_\gamma>0\}|\le\kappa$. Un compacto se dice de Corson si es un compacto de ω-Corson. Un espacio de Banach X se dice débilmente Lindelöf determinado si (B_{X^*},w^*) es un compacto de Corson.*

Todo espacio de Banach débilmente Lindelöf determinado es débil Lindelöf [58]. No es cierto en general, aunque es consistente, que $C(K)$ sea débilmente Lindelöf determinado cuando K es un compacto de Corson: se establece en [5] que $C(K)$ es débilmente Lindelöf determinado si y sólo si K es un compacto de Corson con la propiedad (M), es decir, K es un compacto de Corson tal que toda medida de probabilidad de Radon en K tiene soporte separable (el soporte es el conjunto de los puntos tales que todos sus entornos tienen medida positiva). Observamos por otra parte que todo compacto de κ-Eberlein es de κ-Corson.

Necesitaremos también el siguente hecho bien conocido de la aritmética de cardinales (ver [46, I 10.40]):

Proposición 35. *Si τ es un cardinal infinito de cofinalidad ω, entonces $\tau < \tau^\omega$. En particular, para cada cardinal κ existe un cardinal $\tau > \kappa$ tal que $\tau < \tau^\omega$.*

Prueba: Si se tuviera $\tau = \tau^\omega$ entonces al ser $cof(\tau) = \omega$, tendríamos $\tau^\omega = \bigcup_{n<\omega} A_n$ donde $|A_n| < \tau$ (vemos ahora τ^ω como el conjunto de las sucesiones de elementos de τ). Esto permite elegir, para cada $n < \omega$ un elemento $x \in \tau$ tal que $x \neq y_n$ para todo $y \in A_n$. Al considerar la sucesión $(x_n)_{n<\omega} \in \tau^\omega \setminus \bigcup_{n<\omega} A_n$ llegamos a una contradicción. $\square$

Teorema 36. *Sea κ un cardinal cualquiera. Existe un espacio de Banach débilmente Lindelöf determinado X tal que $CG(X) > \kappa$.*

Prueba: Existe un espacio métrico Z que no puede expresarse como unión de κ subconjuntos discretos; efectivamente, haciendo uso de la Proposición 35, tomemos un cardinal $\tau > \kappa$ tal que $\tau < \tau^\omega$, entonces $Z = \tau^\omega$ tiene esta propiedad porque el peso de Z es τ así que sus subconjuntos discretos tienen cardinalidad menor o igual que τ. A partir de un tal espacio métrico Z, construiremos un compacto de Corson K que no es κ-Eberlein. La construcción sigue un espíritu similar a otras en [2].

Consideramos un buen orden $<$ en Z. Sea $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos A de Z tales que todo subconjunto finito de A es de la forma $\{\xi_1 < \ldots < \xi_n\}$ con $d(\xi_i, \xi_j) \leq \frac{1}{i}$ para $i < j$. Nótese que ésta es una familia adecuada de conjuntos y que cada $A \in \mathscr{A}$ es o bien finita o bien numerable. De hecho el tipo de orden de cualquier $A \in \mathscr{A}$ en el buen orden $<$ no puede ser mayor que $\omega + 1$ porque si $\{\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_\omega < \xi_{\omega+1}\}$ perteneciese a $\mathscr{A}$, entonces $\xi_\omega = \lim_{n\longrightarrow\infty} \xi_n = \xi_{\omega+1}$ lo que es absurdo. Por tanto, $K = K_{\mathscr{A}} \subset \{0,1\}^Z$ es un compacto de Corson y veremos que no es κ-Eberlein.

Si K fuera κ-Eberlein, por el Teorema 33 debería existir una descomposición $Z = \bigcup_{\lambda<\kappa} Z_\lambda$ tal que cada $A \in \mathscr{A}$ tiene sólo una cantidad finita de coordenadas en cada Z_λ. Elegimos λ tal que Z_λ no es discreto y tomamos z un punto de acumulación de Z_λ. Encontraremos un subconjunto infinito de Z_λ que pertenece a $\mathscr{A}$ lo que es una contradicción. Tomamos ξ_1 el primer elemento de Z_λ tal que $\xi_1 \in B(z,1)$ (estamos denotando por $B(x,\varepsilon)$ la bola abierta con centro x y radio ε en el espacio Z). En segundo lugar, tomamos ξ_2 el primer elemento de Z_λ mayor que ξ_1 tal que $\xi_2 \in B(z, \frac{1}{2}) \cap B(\xi_1, 1)$. En el paso n-ésimo, si $\xi_1 < \cdots < \xi_{n-1}$ ya han sido definidos tomamos como ξ_n el primer elemento de Z_λ mayor que ξ_{n-1} tal que $\xi_n \in B(z, \frac{1}{n}) \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} B(\xi_i, \frac{1}{i})$. Tras esta construcción, $\{\xi_n : n < \omega\}$ es un conjunto infinito de $\mathscr{A}$ dentro de Z_λ.

Finalmente, tomamos $X = C(K)$ con K el compacto anteriormente definido. Como K no es κ-Eberlein, $CG(X) > \kappa$. Por otra parte, se demuestra en [5, Proposition 4.10] que si K es un subconjunto compacto de $\{0,1\}^\Gamma$ con Γ bien ordenado y el tipo de orden del soporte de cualquier elemento de K está uniformemente acotado por un ordinal numerable, entonces K es un compacto de Corson con la propiedad (M) y por tanto $C(K)$ es débilmente Lindelöf determinado. $\square$

Hacemos notar que la relación de $CG(X)$ con el resto de índices es bien diferente porque la cardinalidad de un espacio completamente regular de peso κ es a lo sumo 2^κ (si $\mathscr{B}$ es una base del espacio Σ de cardinalidad κ, entonces tenemos una aplicación uno a uno $\sigma \mapsto \{B \in \mathscr{B} : \sigma \in B\}$ de Σ en $2^{\mathscr{B}}$), luego $CG(X) \leq 2^{Nag(X)}$. Por la misma razón $CG(X) \leq \ell\Sigma(X)^\omega$ (si ahora $\mathscr{B}$ es una base del espacio métrico Σ de cardinalidad κ podemos elegir para cada $\sigma \in \Sigma$ una sucesión de elementos de la base con intersección $\{\sigma\}$). Estas desigualdades combinadas con el Teorema 36 muestran que también existen espacios débilmente Lindelöf determinados con índices $Nag(X)$ y $\ell\Sigma(X)$ arbitrariamente grandes. Los espacios de Banach tales que $\ell\Sigma(X) = \omega$ (o equivalentemente $Nag(X) = \omega$) son los espacios débilmente numerablemente determinados, así que para $\kappa \geq 2^\omega$, el Teorema 36 proporciona ejemplos de espacios débilmente Lindelöf determinados que no son débilmente numerablemente determinados y de compactos de Corson que no son compactos de Gul'ko (un compacto K se dice un compacto de Gul'ko si $C(K)$ es un espacio débilmente numerablemente determinado).

Corolario 37. *Para cada cardinal κ existe un compacto de Corson L que no es homeomorfo a ningún subespacio de un producto de compactos de Gul'ko con κ factores.*

Prueba: Sea L un compacto de Corson tal que $CG(C(L)) > \kappa \cdot 2^\omega$. Supongamos que $L \subset \prod_{\lambda<\kappa} L_\lambda$ siendo cada L_λ un compacto de Gul'ko. Como para cada espacio de Banach X tenemos que $CG(X) \leq \ell\Sigma(X)^\omega$ se tiene en particular que todo compacto de Gul'ko es un compacto de 2^ω-Eberlein, por lo tanto si $L \subset \prod_{\lambda<\kappa} L_\lambda$, entonces L es de $\kappa \cdot 2^\omega$-Eberlein, que contradice que $CG(C(L)) > \kappa \cdot 2^\omega$. $\square$

2.6. La relación entre el índice de generación compacta y el índice de $\mathscr{K}$-analiticidad

En esta sección probamos el siguiente resultado:

Teorema 38. *Sean κ, τ, δ cardinales infinitos. Son equivalentes:*

1. $\kappa \leq \tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$ *y* $\delta \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau)$.
2. *Existe un espacio de Banach X tal que $\ell K(X) = \kappa$, $CG(X) = \tau$ y $dens(X) = \delta$.*

Nótese en primer lugar que si un espacio topológico Y es unión de τ compactos $\{K_\lambda\}_{\lambda<\tau}$, entonces $\ell K(Y) \leq \tau$ porque podemos encontrar una usco $\phi : \tau \twoheadrightarrow 2^Y$ dada por $\phi(\lambda) = K_\lambda$. Usando la Proposición 25 obtenemos como consecuencia que para cualquier espacio de Banach X,

$$\ell K(X) \leq CG(X). \tag{2.6.1}$$

Por otra parte, si $\ell K(X) \leq \kappa$ entonces existe una usco $\phi : \kappa^\omega \twoheadrightarrow 2^X$ y puesto que la imagen de un compacto por una usco es un compacto y κ^ω es unión de $\mathbf{d}(\kappa)$ compactos,

$$CG(X) \leq \mathbf{d}(\ell K(X)). \tag{2.6.2}$$

Finalmente, la última relación es que para cualquier espacio de Banach X,

$$dens(X) \geq \mathbf{b}_{\ell K(X)}(CG(X)). \tag{2.6.3}$$

La probamos por reducción al absurdo. Supongamos que no se verifica la desigualdad y llamemos $\delta = dens(X)$, $\kappa = \ell K(X)$ y $\tau = CG(X)$ de modo que $\delta < \mathbf{b}_\kappa(\tau)$. Tenemos una usco $\phi : \kappa^\omega \twoheadrightarrow 2^X$ y podemos encontrar un subconjunto $\Sigma \subset \kappa^\omega$ de cardinalidad δ tal que $\phi(\Sigma)$ es denso en X. Como $\delta < \mathbf{b}_\kappa(\tau)$, Σ es un subconjunto de una unión de menos de τ compactos de κ^ω, así que $CG(X) < \tau$, una contradicción.

Las relaciones (2.6.1) - (2.6.3) prueban una de las implicaciones del Teorema 38. Antes de pasar al recíproco, veamos cuál es la evaluación de los distintos índices en un cubo de Cantor generalizado: Para $K = \{0,1\}^\kappa$ y $X = C(K)$ tenemos que $\ell(X) = \ell K(X) = CG(X) = \kappa$. Por una parte, claramente $\{0,1\}^\kappa$ es κ-Eberlein, mientras que por otra, las aplicaciones coordenada $D = \{\pi_\lambda : \lambda \in \kappa\}$ constituyen un subconjunto puntualmente cerrado y discreto de $C(\{0,1\}^\kappa)$, lo que implica $\ell(D) = \kappa$ y $\ell(X) \geq \kappa$; efectivamente, D es discreto porque si $x_\lambda \in \{0,1\}^\kappa$ es la tupla que toma el valor 1 en λ y 0 en todos los $\mu \neq \lambda$, entonces $D \cap \{f \in C(\{0,1\}^\kappa) : f(x_\lambda) > 0\} = \{\pi_\lambda\}$, mientras que D es cerrado porque si $f : \{0,1\}^\kappa \longrightarrow \{0,1\}$ es una función continua, $f \notin D$ y f no constante, entonces f depende de una cantidad finita de coordenadas $F \subset \kappa$, $2 \leq |F| < \omega$ y si G es un subconjunto finito de $\{0,1\}^\kappa$ tal que $\{x|_F : x \in G\} = \{0,1\}^F$ y cada $x_\lambda = 0$ para todo $x \in G$ y todo $\lambda \notin F$, entonces $\{g \in C(\{0,1\}^\kappa) : |g(x) - f(x)| < \frac{1}{2} \forall x \in G\}$ es un entorno de f que no corta a D.

Ahora fijamos cardinales κ, τ y δ como en el apartado (1) del Teorema 38 y construiremos un espacio de Banach como en el aparatado (2). En primer lugar, fijaremos un subconjunto S de κ^ω de cardinalidad $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ que pueda descomponerse en una cantidad τ de trozos, $S = \bigcup_{\lambda<\tau} S_\lambda$ verificando las dos propiedades siguientes:

(S.1) Ningún S_λ está contenido en una unión de menos de τ compactos de κ^ω

(S.2) Existe un subconjunto $U \subset S$ de cardinalidad κ tal que $|U \cap S_\lambda| \leq 1$ para cada λ y tal que $x_0 \neq y_0$ para cualesquiera $x, y \in U$ diferentes.

Podemos construir S como sigue: Sea A un subconjunto de κ^ω de cardinalidad $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ que no puede ser cubierto por menos de τ compactos de κ^ω y $A' = \{a_\lambda : \lambda < \tau\}$ un subconjunto de A de cardinalidad τ. Sin pérdida de generalidad, suponemos que el conjunto $U = \{x \in \kappa^\omega : x_0 = x_n \forall n < \omega\}$ de las sucesiones constantes es un subconjunto de A'. Para $\lambda < \tau$, definimos $S_\lambda = \{x \in \kappa^\omega : x_{2n} = (a_\lambda)_n,\ (x_{2n+1})_{n\in\omega} \in A\}$ y $S = \bigcup_{\lambda<\tau} S_\lambda$.

Consideramos $\mathscr{A}$ la familia de todos los subconjuntos $A \subset S$ que verifican las dos siguientes propiedades:

(A.1) Existe $n(A) < \omega$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$ diferentes ocurre que $x_{n(A)} \neq y_{n(A)}$ pero $x_m = y_m$ para todo $m < n(A)$.

(A.2) $|A \cap S_\lambda| \leq 1$ para cada $\lambda < \tau$.

La familia $\mathscr{A}$ es una familia adecuada de subconjuntos cerrados de S, y por tanto si hacemos $L = K_{\mathscr{A}} \subset \{0,1\}^S$ y definimos $Y = C(L)$ tendremos que $\ell K(Y) \leq \kappa$. De hecho, $\ell K(Y) = \kappa$ porque si U es un conjunto como en (S.2) entonces todos los subconjuntos de U pertenecen a $\mathscr{A}$ y por tanto existe una copia de $\{0,1\}^\kappa$ dentro de L y como observamos anteriormente, $\ell K(C(\{0,1\}^\kappa) = \kappa$.

Por otra parte, la propiedad (A.2) implica que $L \subset \{0,1\}^S$ es un compacto de τ-Eberlein (la partición $S = \bigcup_{\lambda<\tau} S_\lambda$ cumple las condiciones del Teorema 27(4)) y por tanto, $CG(Y) \leq \tau$. Comprobamos ahora que $CG(Y) = \tau$. Supongamos, por reducción al absurdo que L es τ'-Eberlein para algún $\tau' < \tau$. Entonces por el Lema 33 podemos encontrar una partición $S = \bigcup_{i<\tau'} \Delta_i$ tal que cada elemento de L tiene sólo una cantidad finita de coordenadas no nulas en cada Δ_i. Analicemos por un momento lo que esta condición significa para los Δ_i. Para un subconjunto F de κ^n, denotaremos

$$F \times \kappa^{>n} = \{x \in \kappa^\omega : (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in F\}$$

y si $G \subset \kappa^m$ con $m > n$ escribiremos $F < G$ si las restricciones de los elementos de G a las primeras n coordenadas constituyen precisamente el conjunto F. El hecho de que no podamos encontrar un conjunto infinito A de Δ_i cumpliendo (A.2) ni tampoco (A.1) con n(A)=0 implica que existen conjuntos finitos $F_0 \subset \kappa$ y $G_0 \subset \tau$ tales que $\Delta_i \subset F_0 \times \kappa^{>0} \cup \bigcup_{\lambda\in G_0} S_\lambda$. Análogamente, prestando atención en cada paso a los conjuntos A tales que $n(A) = n$, podemos encontrar recursivamente para cada $n < \omega$ conjuntos finitos $F_n \subset \kappa^n$ y $G_n \subset \tau$ tales que $F_{n-1} < F_n$, $G_{n-1} \subset G_n$ y $\Delta_i \subset F_n \times \kappa^{>n} \cup \bigcup_{\lambda\in G_n} S_\lambda$. Esto implica que para cada $i < \tau'$ podemos encontrar un compacto $K_i = \bigcap_{n<\omega} F_n \times \kappa^{>n}$ de κ^ω

y un conjunto numerable $G_i \subset \tau$ tales que $\Delta_i \subset K_i \cup \bigcup_{\lambda \in G_i} S_\lambda$. Por consiguiente,

$$S = \bigcup_{i<\tau'} K_i \cup \bigcup_{\lambda \in \bigcup_{i<\tau'} G_i} S_\lambda .$$

Como $|\bigcup_{i<\tau'} G_i| \leq \tau' \cdot \omega < \tau$, podemos tomar $\lambda_0 \not\in \bigcup_{i<\tau'} G_i$ y entonces S_{λ_0} está cubierto por $\tau' < \tau$ subconjuntos compactos de κ^ω, lo que constituye una contradicción.

Hasta aquí, sabemos que $\ell K(Y) = \kappa$ y $CG(Y) = \tau$. Como $|S| = \mathbf{b}_\kappa(\tau)$, éste es el peso de $L \subset \{0,1\}^S$ (no puede ser menor por la relación general (2.6.3)), de modo que $dens(Y) = \mathbf{b}_\kappa(\tau)$.

Finalmente, consideramos el espacio $X = C(L) \oplus c_0(\delta)$. El espacio $c_0(\delta)$ es débilmente compactamente generado, así que $CG(c_0(\delta)) = \omega = \ell K(c_0(\delta))$ y $dens(c_0(\delta)) = \delta$. Todos estos índices, cuando se consideran sobre un producto finito, toman como valor el máximo de los valores en cada factor, así que X es el espacio que buscábamos.

2.7. El número de compactos que generan un subespacio

En esta sección probaremos el Teorema 39:

Teorema 39. *Sean κ, τ, δ cardinales infinitos. Son equivalentes:*

1. $\tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$ *y* $\delta \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau)$.
2. *Existe un espacio de Banach X y un subespacio Y de X tales que $CG(X) = \kappa$, $CG(Y) = \tau$ y $dens(Y) = \delta$.*

La situación es bastante similar a la de la sección anterior. Supongamos que estamos bajo las condiciones del apartado (2) del Teorema 39. Que $\tau \leq \delta$ es evidente. Siendo Y un subespacio cerrado de X, $\ell K(Y) \leq \ell K(X)$, así que usando (2.6.2) obtenemos

$$\tau = CG(Y) \leq \mathbf{d}(\ell K(Y)) \leq \mathbf{d}(\ell K(X)) \leq \mathbf{d}(\kappa),$$

y como $\ell K(Y) \leq \kappa$, por (2.6.3),

$$\delta = dens(Y) \geq \mathbf{b}_{\ell K(Y)}(CG(Y)) = \mathbf{b}_{\ell K(Y)}(\tau) \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau).$$

Para la otra implicación del Teorema 39, si $\tau < \text{mín}(\kappa, \delta)$, es suficiente tomar $X = C(\{0,1\}^\kappa) \oplus c_0(\delta)$ e $Y = C(\{0,1\}^\tau) \oplus c_0(\delta)$. Por lo tanto, de ahora en adelante suponemos que $\kappa \leq \tau \leq \mathbf{d}(\kappa)$ y $\delta \geq \mathbf{b}_\kappa(\tau)$, y adaptaremos un ejemplo de Argyros [31, Section 1.6] con modificaciones similares a las que llevamos a cabo en la prueba del Teorema 38. En primer lugar, tomamos igual que en aquella prueba un subconjunto S de κ^ω de cardinalidad $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ que puede descomponerse en τ trozos $S = \bigcup_{\lambda<\tau} S_\lambda$ verificando (S.1) y (S.2). Consideramos el compacto $K \subset [0,1]^S$ que consiste en las funciones de la forma $\frac{1}{n}\chi_A$ (χ_A es la función característica del conjunto A) para algún natural n y algún conjunto A satisfaciendo:

(B.1) Para cualesquiera dos elementos distintos $x, y \in A$, ocurre que $x_n \neq y_n$ pero $x_m = y_m$ para todo $m < n$.

(B.2) $|A \cap S_\lambda| \leq 1$ para cada $\lambda < \tau$.

Puesto que la descomposición $S = \bigcup_{t\in\kappa^n}\{\sigma \in S : \sigma|_n = t\}$ verifica las condiciones del Teorema 27(4) para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, K es un compacto de κ-Eberlein y como, de nuevo, K contiene una copia de $\{0,1\}^\kappa$, $CG(C(K)) = \kappa$. Para cada $\sigma \in S$ consideramos la función "proyección" $f_\sigma \in C(K)$ y definimos Y como el subespacio de $X = C(K)$ generado por $\{f_\sigma : \sigma \in S\}$. Para cada $\lambda < \tau$, se sigue de la condición (B.2) que $\{f_\sigma : \sigma \in S_\lambda\} \cup \{0\}$ es un subconjunto puntualmente (por tanto débilmente) compacto de $C(K)$. Por tanto, $CG(Y) \leq \tau$. Suponemos por reducción al absurdo que $CG(Y) = \theta < \tau$. El resto de la prueba sigue esencialmente [31, Theorem 1.6.3]. Como consecuencia del Teorema de Amir-Lindenstrauss, podemos encontrar un conjunto de generadores de Y de la forma $\{y_\delta : \delta \in \Delta\}$ tal que $\Delta = \bigcup_{\eta<\theta}\Delta^\eta$ y $\{y_\delta : \delta \in \Delta^\eta\} \cup \{0\}$ es homeomorfo en la topología débil a la compactificación por un punto de un conjunto discreto, siendo 0 el punto del infinito. Definimos una función $F : S \times \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ como $F(\sigma,\delta) = y_\delta(\chi_{\{\sigma\}})$.

Afirmación 1: Para cada $\sigma \in S$, $1 \leq |\{\delta \in \Delta : F(\sigma,\delta) \neq 0\}| \leq \theta$. Prueba: si el conjunto fuese vacío, como $\{y_\delta : \delta \in \Delta\}$ genera Y eso significaría que $y(\chi_{\{\sigma\}}) = 0$ para todo $y \in Y$ lo que es falso para $y = f_\sigma$. Por otra parte, como 0 is el punto límite en la topología débil de $\{y_\delta : \delta \in \Delta^\eta\}$ cada conjunto $\{\delta \in \Delta^\eta : |F(\sigma,\delta)| > \frac{1}{m}\}$ es finito.

Afirmación 2: Para cada $\delta \in \Delta$, $|\{\sigma \in S : F(\sigma,\delta) \neq 0\}| \leq \omega$. De hecho, cada uno de los conjuntos $\{\sigma \in S : |F(\sigma,\delta)| > \frac{1}{m}\}$ es finito porque podemos encontrar un elemento $y \in Y$ que es combinación lineal de ciertos $f_{\sigma^1}, \ldots, f_{\sigma^k}$ con $\|y - y_\delta\| < \frac{1}{2m}$ y en este caso, siempre que $|F(\sigma,\delta)| > \frac{1}{m}$ debe ocurrir $\sigma = \sigma^i$ para algún $i \leq k$.

A partir de estas dos afirmaciones, usando un argumento de saturación encontramos una partición $S = \bigcup_{\alpha<\lambda}\Gamma_\alpha$ y conjuntos disjuntos Δ_α, todos estos conjuntos de cardinalidad a lo sumo θ tales que siempre que $F(\sigma,\delta) \neq 0$ existe $\alpha < \lambda$ tal que $\sigma \in \Gamma_\alpha$ y $\delta \in \Delta_\alpha$.

Como $|\Gamma_\alpha| \leq \theta$ podemos enumerarlo como $\{\sigma^\alpha_\nu : \nu < \theta\}$ (con repeticiones si fuese necesario). Definimos entonces $\Sigma_\nu = \{\sigma^\alpha_\nu : \alpha < \lambda\}$ de modo que $S = \bigcup_{\nu<\theta}\Sigma_\nu$. Además, para $\nu < \theta$, $m \in \mathbb{N}$ y $\eta < \theta$ definimos

$$\Sigma_{\nu m\eta} = \left\{\sigma \in \Sigma_\nu : \exists\delta \in \Delta^\eta : y_\delta(\chi_{\{\sigma\}}) > \frac{1}{m}\right\}.$$

Por la afirmación 1, $\Sigma_\nu = \bigcup_{m\eta} \Sigma_{\nu m\eta}$ y además $S = \bigcup_{\nu<\theta, m<\omega, \eta<\theta} \Sigma_{\nu m\eta}$.

En la prueba del Teorema 39 mostramos que siempre que S se descompone en menos de τ piezas, existe un conjunto infinito $A \subset S$ verificando (A.1) y (A.2) y contenido en una de las piezas. Esto se traduce ahora en que de nuevo, existe una pieza de la descomposición $S = \bigcup_{\nu<\theta,m<\omega,\eta<\theta} \Sigma_{\nu m\eta}$, es decir $\nu < \theta$, $m < \omega$, $\eta < \theta$ y un conjunto infinito A cumpliendo (B.1) y (B.2) para cierto n y que está contenido en $\Sigma_{\nu m\eta}$, escribimos $A = \{\sigma_i : i < \omega\}$. Sea α_i el único ordinal tal que $\sigma_i \in \Gamma_{\alpha_i}$. Como $A \subset \Sigma_\nu$, $\sigma_i = \sigma_\nu^{\alpha_i}$ y si $i \neq j$ entonces $\alpha_i \neq \alpha_j$. Además, puesto que $A \subset \Sigma_{\nu m\eta}$ para cada i, existe $\delta_i \in \Delta^\eta$ tal que $y_{\delta_i}(\chi_{\{\sigma_i\}}) > \frac{1}{m}$. Nótese que si $i \neq j$ entonces $\delta_i \in \Delta_{\alpha_i}$ así que $\delta_i \notin \Delta_{\alpha_j}$ e $y_{\delta_i}(\chi_{\{\sigma_j\}}) = 0$.

Sea ahora B un subconjunto finito de A. Entonces para cada $\sigma \in \Sigma$ tenemos

$$f_\sigma(\frac{1}{l}\chi_B) = \frac{1}{l}\chi_B(\sigma) = \frac{1}{l}\sum_{\sigma'\in B}\chi_{\{\sigma'\}}(\sigma) = \frac{1}{l}\sum_{\sigma'\in B} f_\sigma(\chi_{\{\sigma'\}}).$$

Por lo tanto, $y(\frac{1}{l}\chi_B) = \frac{1}{l}\sum_{\sigma'\in B} y(\chi_{\{\sigma'\}})$ para cada $y \in Y$. Ahora sea $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ una sucesión de subconjuntos finitos de A cuya unión es A. Entonces $\frac{1}{l}\chi_{B_j} \longrightarrow \frac{1}{l}\chi_A$ y así

$$|y_{\delta_i}(\frac{1}{l}\chi_A)| = \lim_{j\longrightarrow\infty} |y_{\delta_i}(\frac{1}{l}\chi_{B_j})| = \frac{1}{l}|y_{\delta_i}(\chi_{\{\sigma_i\}})| > \frac{1}{lm}$$

Esto es una contradicción ya que $\{\delta_i : i < \omega\} \subset \Delta^\eta$ así que converge débilmente a 0. $\square$

2.8. Índices de Nagami y $\mathscr{K}$-determinación

Esencialmente, el único ejemplo de un espacio de Banach X en el que $\ell\Sigma(X) < \ell K(X)$ es debido a Talagrand [69] (véase también [25] donde se generaliza esta construcción), una variación del cual puede tomarse de carácter de densidad ω_1 (simplemente, si se sustituye el conjunto T de [69, p. 78] por un subconjunto $T' \subset T$ de cardinalidad ω_1 tal que T' contenga árboles de índice de derivación arbitrariamente grande, se obtiene un ejemplo con estas propiedades). En este caso $\ell\Sigma(X) = \omega < \omega_1 = \ell K(X)$. Este ejemplo no se presta tan fácilmente a generalizaciones como las llevadas a cabo en las secciones anteriores y ni siquiera sabemos si existen espacios de Banach X con $\omega < \ell\Sigma(X) < \ell K(X)$.

Respecto al índice de Nagami, se da en [23] un ejemplo de un espacio topológico Y con $Nag(Y) < \ell\Sigma(Y)$. Damos a continuación otros ejemplos de tales espacios de la forma $Y = C_p(K)$ con K compacto. Esto todavía no proporciona ejemplos de espacios de Banach en los que los dos índices no coinciden porque no está claro si el índice de Nagami es el mismo para la topología puntual y la topología débil de $C(K)$: la prueba de que $\ell\Sigma(C(K)) = \ell\Sigma(C_p(K))$ ó $\ell K(C(K)) = \ell K(C_p(K))$ (Proposición 25 ó [23] depende fuertemente en el hecho de que los puntos de acumulación en espacios métricos son límites de sucesiones.

Teorema 40. *Para cada cardinal infinito κ existe un compacto K que verifica las desigualdades $Nag(C_p(K)) \leq \kappa < CG(C_p(K))$.*

Prueba: Consideramos el espacio $T = \kappa^\kappa$ (El producto de κ espacios discretos de cardinalidad κ) que tiene peso κ y la familia adecuada $\mathscr{A}$ de todos los subconjuntos A de T tales que existe $\lambda < \kappa$ tales que para cualquier $x \neq y$ en A, $x|_{[0,\lambda)} = y|_{[0,\lambda)}$ y $x_\lambda \neq y_\lambda$. Tomamos $K = K_{\mathscr{A}}$. Sabemos por el Teorema 31 que existe una usco $T \longrightarrow 2^{C(K)}$ cuya imagen separa los puntos de $C(K)$. Por la Proposición 25, esto implica que $Nag(C_p(K)) \leq \kappa$. Supongamos ahora que K fuese κ-Eberlein. Entonces, por el Teorema 33, podríamos encontrar una descomposición $T = \bigcup_{i<\kappa} T_i$ tal que todo conjunto de $\mathscr{A}$ tiene solamente una cantidad finita de elementos en cada T_i. Encontraremos $t \in T = \kappa^\kappa$ tal que $t \notin T_i$ para ningún $i < \kappa$, obteniendo así una contradicción. Lo definimos recursivamente. El conjunto $\{x_0 : x \in T_0\} \subset \kappa$ es finito así que podemos escoger t_0 fuera de él. Esto va a garantizar que $t \notin T_0$. Si ya hemos definido t_j ara $j < i$, el conjunto $\{x_i : x \in T_i \text{ y } x_j = t_j \text{ para todo } j < i\}$ es finito, así que podemos escoger t_i fuera de él. Esto garantizará que $t \notin T_i$. $\square$

Corolario 41. *Para cada cardinal infinito τ existe un compacto K que verifica las desigualdades $Nag(C_p(K)) \leq \tau^\omega < \ell\Sigma(C_p(K))$.*

Prueba: Consideramos K el compacto dado por el Teorema 40 para el cardinal $\kappa = \tau^\omega$, de modo que $Nag(C_p(K)) \leq \tau^\omega < CG(C_p(K))$. Además, como $CG(C_p(K)) \leq \ell\Sigma(C_p(K))^\omega$ se tiene que $\tau^\omega < \ell\Sigma(C_p(K))^\omega$ y por tanto $\tau^\omega < \ell\Sigma(C_p(K))$. $\square$

2.9. Compactos de κ-Gul'ko y κ-Talagrand

En esta sección exponemos las pruebas de los Teoremas 44 y 45 que constituyen análogos de los correspondientes resultados conocidos de caracterización de los compactos asociados a espacios débilmente $\mathscr{K}$-analíticos y débilmente numerablemente determinados conocidos como compactos de Talagrand y compactos de Gul'ko respectivamente. Las demostraciones de estos resultados que presentamos aquí siguen el mismo esquema que las del caso numerable, tal y como aparecen en [31]. De hecho, varios de los argumentos reproducen literal o casi literalmente otros que pueden encontrarse en los Capítulos 6 y 7 de [31].

Por conveniencia, introduciremos las definiciones de compactos de κ-Gul'ko y κ-Talagrand en términos de inmersiones en cubos:

Definición 42. *Sea K un compacto y κ un cardinal infinito.*

1. *Diremos que K es un compacto de κ-Talagrand si es homeomorfo a un compacto $L \subset [-1,1]^{\Delta}$ para el que existen subconjuntos $\{\Delta_s : s \in \kappa^{(\omega)}\}$ de Δ tales que para cada $\varepsilon > 0$, cada $x \in K$ y cada $\sigma \in \kappa^{\mathbb{N}}$ existe n tal que x sólo tiene una cantidad finita de coordenadas δ en $\Delta_{\sigma|_n}$ con $|x_\delta| > \varepsilon$.*
2. *K es κ-Gul'ko si es homeomorfo a un compacto $L \subset [-1,1]^{\Delta}$ para el que existe un conjunto $\Sigma \subset \kappa^{\omega}$ y una familia de subconjuntos $\{\Delta_s : s \in \kappa^{(\omega)}\}$ de Δ tales que $\Delta = \bigcup_{\sigma\in\Sigma}\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Delta_{\sigma|_n}$ y tales que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\sigma \in \Sigma$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que x tiene sólo una cantidad finita de coordenadas δ en $\Delta_{\sigma|_n}$ con $|x_\delta| > \varepsilon$.*

Nótese que todo compacto de κ-Talagrand es de κ-Gul'ko y que todo compacto de κ-Gul'ko es de κ-Corson.

Definición 43. *Sea Γ un conjunto y Σ un espacio topológico. Definimos el siguiente subespacio de $\ell_\infty(\Sigma\times\Gamma)$,*

$$c_1(\Sigma\times\Gamma) = \{f \in \ell_\infty(\Sigma\times\Gamma) : f|_{K\times\Gamma} \in c_0(K\times\Gamma) \text{ para todo } K \subset \Sigma \text{ compacto}\}$$

Teorema 44. *Sea X un espacio de Banach y κ un cardinal infinito. Son equivalentes:*

1. *$\ell\Sigma(X) \leq \kappa$ (resp. $\ell K(X) \leq \kappa$).*
2. *Existe un operador uno a uno débil*-a-puntualmente continuo $T : X^* \longrightarrow c_1(\Gamma\times\Sigma)$ para algún conjunto Γ y algún espacio métrico (resp. espacio métrico completo) Σ de peso menor o igual que κ.*
3. *La bola dual B_{X^*} es un compacto de κ-Gul'ko en la topología débil* (resp. un compacto de κ-Talagrand).*

Teorema 45. *Sea K un compacto y κ un cardinal infinito. Son equivalentes:*

1. *K es κ-Gul'ko. (resp. κ-Talagrand).*
2. *$\ell\Sigma(C(K)) \leq \kappa$ (resp. $\ell K(C(K)) \leq \kappa$).*
3. *$\ell\Sigma(C_p(K)) \leq \kappa$ (resp. $\ell K(C_p(K)) \leq \kappa$).*

Una consecuencia del Teorema 45 es que un compacto K que cumpla $\ell\Sigma(C(K)) \leq \kappa$ es un compacto de κ-Corson. Algunas de las propiedades elementales de un compacto K

de κ-Corson son la κ-monoliticidad (la adherencia de un subconjunto de K de cardinalidad menor o igual que κ tiene peso menor o igual que κ) y la κ-estrechez (*tightness* en inglés) (la adherencia de un conjunto $A \subset K$ es igual a la unión de las adherencias de los subconjuntos de A de cardinalidad menor o igual que κ). Estas dos propiedades se prueban en [23] para los compactos K con $\ell\Sigma(C(K)) \leq \kappa$ con argumentos más elementales.

La principal herramienta para demostrar los Teoremas 44 y 45 en el caso numerable es un resultado de Vašák [74] que asegura la existencia de resoluciones proyetivas separables de la identidad en espacios de Banach débilmente numerablemente determinados. En este caso, lo que ocurre es que en un espacio de Banach X con $\ell\Sigma(X) \leq \kappa$ existe una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad, que es lo mismo que una resolución proyectiva separable de la identidad salvo que las componentes, en lugar de ser separables tiene en general tamaño menor o igual que κ. De forma precisa:

Definición 46. *Sea X un espacio de Banach de carácter de densidad $\mu > \kappa$ y sea también $\{P_\alpha : \kappa \leq \alpha \leq \mu\}$ una sucesión transfinita de proyecciones en X (es decir, operadores $P_\alpha : X \longrightarrow X$ tales que $P_\alpha \circ P_\alpha = P_\alpha$) con $P_\kappa = 0$, $P_\mu = 1_X$. Diremos que esta sucesión de proyecciones es una κ-resolución proyectiva de la identidad en X si se verifican:*

1. $\|P_\alpha\| = 1$ *para todo* α.
2. $dens(P_\alpha(X)) \leq |\alpha|$.
3. $P_\alpha \circ P_\beta = P_\beta \circ P_\alpha = P_\beta$ *siempre que* $\kappa \leq \beta \leq \alpha$.
4. $\bigcup_{\beta<\alpha} P_{\beta+1}(X)$ *es denso en norma en* $P_\alpha(X)$.

Diremos que la sucesión de proyecciones es una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad. si se verifican las popiedades 2,3 y 4 anteriores además de

1'. *Existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|P_\alpha\| \leq M$ para todo α.*
5. $dens((P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X)) \leq \kappa$ *para todo* α.

Una herramienta fundamental para encontrar resoluciones proyectivas de la identidad son los llamados generadores proyectivos, introducidos por Orihuela y Valdivia [59]. En nuestro caso necesitamos lo siguiente:

Definición 47. *Sea κ un cardinal infinito y V un espacio de Banach. Un κ-generador proyectivo en V es un par (W, Φ) donde W es un subconjunto uno-normante de V^* con $\overline{W}$ espacio vectorial, y $\Phi : W \longrightarrow 2^V$ es una aplicación multivaluada que toma por valores conjuntos conjuntos de cardinalidad menor o igual que κ tal que para cada conjunto no vacío $B \subset W$ con $\overline{B}$ espacio vectorial, $\Phi(B)^\perp \cap \overline{B}^* = \emptyset$.*

Recordamos que $A^\perp = \{v^* \in V^* : v^*(a) = 0\ \forall a \in A\}$ y que W se dice uno-normante si para cada $v \in V$ se tiene que $\|v\| = \sup\{x^*(v) : x^* \in W \cap B_{V^*}\}$. Los prueba de la Proposición 51 requiere una serie de lemas y aunque es prácticamente idéntica a la de su particularización para $\kappa = \omega$, no obstante la incluimos a continuación. Recordamos que si

V es un espacio de Banach y $A \subset V$, $A^{\perp} = \{v^* \in V^* : v^*(a) = 0 \text{ para todo } a \in A\}$ y si $B \subset V^*$, $B_{\perp} = \{v \in V : b(v) = 0 \text{ para todo } b \in B\}$. El primer lema, Lema 48 es una caracterización de las proyecciones en espacios de Banach y referimos a [31, Lemma 6.1.1] para su prueba.

Lema 48. *Sea V un espacio de Banach y $A \subset V$ y $B \subset V^*$ conjuntos tales que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son espacios vectoriales, $\|a\| = \sup\{x^*(a) : x^* \in B \cap B_{V^*}\}$ para todo $a \in A$ y $A^{\perp} \cap \overline{B}^* = \{0\}$. Entonces existe una proyección $P : V \longrightarrow V$, es decir, un operador tal que $P \circ P = P$, con $\|P\| = 1$, , $P(V) = \overline{A}$, $P^{-1}(0) = B_{\perp}$ y $P^*(V^*) = \overline{B}^*$.*

Lema 49. *Sea V un espacio de Banach e $Y \subset V$ un subespacio. Sea W un subconjunto de V^* con $\overline{W}$ espacio vectorial y sean $\Phi : W \longrightarrow 2^V$ y $\Psi : V \longrightarrow 2^W$ dos aplicaciones multivaluadas que toman como valores conjuntos de cardinalidad menor o igual que κ. Sea $\aleph$ un cardinal infinito y sean $A_0 \subset V$ y $B_0 \subset W$ conjuntos de cardinalidad menor o igual que $\aleph$. Entonces existen conjuntos $A_0 \subset A \subset V$ y $B_0 \subset B \subset W$ tales que $\overline{A} \cap Y = \overline{A \cap Y}$, $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son espacios vectoriales, $|A| \le \kappa \cdot \aleph$, $|B| \le \kappa \cdot \aleph$ y $\Phi(B) \subset A$ y $\Psi(A) \subset B$.*

Prueba: Igual a la de [31, Lema 6.1.3]. Sea $f : V \longrightarrow Y$ una aplicación que asocie a cada $v \in V$ un punto $f(v) \in Y$ tal que $\|v - f(v)\| \le 2\text{dist}(v, Y) = \inf\{\|v - y\| : y \in Y\}$. Recursivamente construiremos sucesiones de conjuntos $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset V$ y $B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset W$ como sigue. Si ya hemos definido A_i y B_i para $i = 0, \ldots, n-1$, hacemos

$$A_n = \{\sum_{i=1}^{m} r_i v_i : v_i \in A_{n-1} \cup f(A_{n-1}) \cup \Phi(B_{n-1}), r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \ldots, m, m < \omega\}$$

$$B_n = \{\sum_{i=1}^{m} r_i v_i^* : v_i^* \in B_{n-1} \cup \Psi(A_{n-1}), r_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \ldots, m, m < \omega\}$$

Sean ahora $A = \bigcup_{n<\omega} A_n$ y $B = \bigcup_{n<\omega} B_n$. Claramente Ay B son $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales, luego $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales. También es claro que $|A| \le \kappa \cdot \aleph$, $|B| \le \kappa \cdot \aleph$, $\Phi(B) \subset A$ y $\Psi(A) \subset B$. Sólo queda ver que $\overline{A} \cap Y = \overline{A \cap Y}$. Sea $y \in \overline{A} \cap Y$, de modo que existe una sucesión $\{a_i : i < \omega\} \subset A$ que converge a y. Para cada $i < \omega$ escogemos n_i tal que $a_i \in A_{n_i}$. Entonces

$$\|f(a_i) - y\| \le \|f(a_i) - a_i\| + \|a_i - y\| \le 2\text{dist}(a_i, Y) + \|a_i - y\| \le 3\|a_i - y\| \longrightarrow 0$$

cuando $i \longrightarrow \infty$. Como $f(a_i) \in f(A_{n_i}) \subset A_{n_i+1} \subset A$, se sigue que $y \in \overline{A \cap Y}$. $\square$

Lema 50. *Sean V, Y, W, Φ y Ψ como en el lema anterior. Supongamos además que $\mu = dens(Y) > \kappa$. Entonces existen familias $\{A_\alpha : \kappa < \alpha \le \mu\}$ y $\{B_\alpha : \kappa < \alpha \le \mu\}$ de subconjuntos de V y W respectivamente tales que $\overline{A_\mu} \supset Y$ y para cada $\kappa < \alpha \le \mu$ se verifican*

1. *$\overline{A_\alpha}$ y $\overline{B_\alpha}$ son espacios vectoriales,*

2. $\overline{A_\alpha} \cap Y = \overline{A_\alpha \cap Y}$,
3. $|A_\alpha| \leq |\alpha|$ *y* $|B_\alpha| \leq |\alpha|$,
4. $\Phi(B_\alpha) \subset A_\alpha$ *y* $\Psi(A_\alpha) \subset B_\alpha$,
5. $A_\beta \subset A_\alpha$ *y* $B_\beta \subset B_\alpha$ *siempre que* $\kappa < \beta \leq \alpha$, *y*
6. $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_{\beta+1}$, $B_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} B_{\beta+1}$.

Prueba: Igual a la de [31, Proposition 6.1.4]. Sea $f : V \longrightarrow Y$ la misma aplicación que definíamos en el lema anterior. Sea $\{y_\alpha : \kappa \leq \alpha < \mu\}$ un subconjunto denso de Y. Haremos una construcción recursiva en α. Si hacemos $A_0 = \{y_\kappa\}$, $B_0 = \emptyset$ y $\aleph = \kappa$ en el Lema 49 obtenemos conjuntos $A_0 \subset A \subset V$ y $B_0 \subset B \subset W$ y definimos precisamente $A_{\kappa+1} = A$ y $B_{\kappa+1} = B$. Fijamos ahora $\gamma \in]\kappa+1, \mu]$ y suponemos que hemos construido ya A_α y B_α para $\kappa < \alpha < \gamma$ con todas las propiedades requeridas y además $f(A_\beta) \subset A_\alpha$ si $\kappa < \beta < \alpha$. Si γ es un ordinal límite, definimos $A_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} A_\alpha$ y $B_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} B_\alpha$. Si $\gamma = \delta+1$ es un ordinal sucesor, aplicamos el Lema 49 a $A_0 = A_\delta \cup \cup\{y_\delta\} \cup f(A_\delta)$, $B_0 = B_\delta$ y $\aleph = |\gamma|$ y definimos $A_\gamma = A$ y $B_\gamma = B$ como los conjuntos que proporciona dicho lema. La única propiedad a verificar que no es evidente es el hecho de que $\overline{A_\gamma} \cap Y = \overline{A_\gamma \cap Y}$ cuando γ es un ordinal límite. Para esto, sea $y \in \overline{A_\gamma} \cap Y$ y $\{a_i : i < \omega\}$ una sucesión en A_γ que converja a $y \in Y$. Tenemos que $\|f(a_i) - y\| \leq 3\|a_i - y\| \longrightarrow 0$ cuando $i \longrightarrow \infty$ y $f(a_i) \in f(A_{\beta_i} \subset A_{\beta_i+1} \subset A_\gamma$ para algún $\beta_i < \gamma$. Por tanto, $y \in \overline{A_\gamma \cap Y}$. $\square$

Proposición 51. *Si un espacio de Banach admite un κ-generador proyectivo, entonces tiene una κ-resolución proyectiva de la identidad.*

Prueba: Igual a la de [31, Proposition 6.1.7]. Sea (W, Φ) un κ-generador proyectivo del espacio de Banach V. Sea $P_\kappa = 0$ el operador nulo. Para cada $v \in V$ escogemos un subconjunto numerable $\Psi(v)$ de W tal que $\|v\| = \sup\{x^*(v) : x^* \in \Psi(v) \cap B_{V^*}\}$ lo que podemos encotrar al ser W uno-normante. De esta manera hemos definido una aplicación multivaluada $\Psi : V \longrightarrow 2^W$ que toma valores numerables. El Lema 50 para $Y = V$ nos proporciona conjuntos $\{A_\alpha : \kappa < \alpha \leq \mu\}$ y $\{B_\alpha : \kappa < \alpha \leq \mu\}$ verificando las propiedades allí indicadas. Sea $\alpha \in]\kappa, \mu]$. Para cada $a \in A_\alpha$, como $\Psi(A_\alpha) \subset B_\alpha$, tenemos que

$$\|a\| = \sup\{x^*(a) : x^* \in \Psi(a) \cap B_{V^*}\} \leq \sup\{x^*(a) : x^* \in B_\alpha \cap B_{V^*}\} \leq \|a\|$$

y como $\Phi(B_\alpha) \subset A_\alpha$ y (W, Φ) es un κ-generador proyectivo, $A_\alpha^\perp \cap \overline{B_\alpha}^* \subset \Phi(B_\alpha)^\perp \cap \overline{B_\alpha}^* = \{0\}$. Se sigue entonces del Lema 48 la existencia de un operador proyección $P_\alpha : V \longrightarrow V$ con $P_\alpha(V) = \overline{A_\alpha}$, $P_\alpha^{-1}(0) = B_{\alpha\perp}$ y $P_\alpha^*(V^*) = \overline{B_\alpha}^*$. Los operadores $\{P_\alpha : \kappa \leq \alpha \leq \mu\}$ constituyen una κ-resolución proyectiva de la identidad, al cumplir los conjuntos $\{A_\alpha\}$ y $\{B_\alpha\}$ las propiedades del Lema 50. $\square$

Teorema 52. *Si V es un espacio de Banach con $\ell\Sigma(V) \leq \kappa$ entonces existe un κ-generador proyectivo en V. De hecho, existe una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad en V.*

Prueba: Siguiendo la prueba de [31, Proposition 7.2.1], sabemos que existe una usco $\phi : \Sigma' \twoheadrightarrow 2^{(B_V,w)}$ donde Σ' es un espacio métrico de peso menor o igual que κ, luego $\Sigma' \subset \kappa^{\omega}$. Para cada $s \in \kappa^{(\omega)}$ definimos $Y_s = \bigcup\{\phi(\sigma) : \sigma \in \Sigma', \sigma \succ s\}$. Para cada $\xi \in V^*$ y cada $s \in \kappa^{(\omega)}$ encontramos un conjunto numerable $\Phi_s(\xi) \subset Y_s$ tal que $\inf\{y(\xi) : y \in Y_s\} = \inf\{y(\xi) : y \in \Phi_s(\xi)\}$ y definimos entonces $\Phi : V^* \longrightarrow 2^V$ como $\Phi(\xi) = \bigcup\{\Phi_s(\xi) : s \in S\}$. Claramente Φ es una aplicación multivaluada que toma valores de cardinalidad menor o igual que κ. La comprobación de que (V^*, Φ) es un generador proyectivo es ahora idéntica a la de [31, Proposition 7.2.1]. El único punto que quizás requiera alguna aclaración es el hecho de que para cada $\sigma \in \Sigma'$, $\phi(\sigma) = \bigcap_{n<\omega} \overline{Y_{\sigma|_n}}^*$ (la clausura se toma en $(B_{V^{**}}, w^*)$), pero esto es consecuencia inmediata de la semicontinuidad superior: si $v \notin \phi(\sigma)$ entonces existen débil* abiertos disjuntos de V^{**}, $\phi(\sigma) \subset U$ y $v \in V$ y por la semicontinuidad superior existe un entorno W de σ tal que $\phi(W) \subset U$ lo que implica que ha de existir un $n < \omega$ tal que $Y_{\sigma|_n} \cap V = \emptyset$.

Al tener V un κ-generador proyectivo, tiene una κ resolución proyectiva de la identidad. Supongamos que existiera algún espacio de Banach V con $\ell\Sigma(V) \leq \kappa$ y sin una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad. Supongamos que V es de carácter de densidad mínimo μ entre los espacios con esa propiedad. En V hay una resolución proyectiva de la identidad $\{P_\alpha : \kappa \leq \alpha \leq \mu\}$. Para cada α, $dens((P_{\alpha+1} - P_\alpha)(V)) < \mu$ así que existe una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad en $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(V)$, $\{Q_{\alpha,\beta} : \kappa \leq \beta \leq |\alpha|\}$. “Pegando” todas estas resoluciones obtenemos una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad en V llegando así a una contradicción. De manera más precisa, se hace $P_{\alpha,\beta} = P_\alpha + Q_{\alpha,\beta}$ y reordenando lexicográficamente ($(\alpha,\beta) < (\alpha',\beta')$ si $\alpha < \alpha'$ o $\alpha = \alpha'$ y $\beta < \beta'$), las $P_{\alpha,\beta}$ constituyen una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad en V. $\square$

Prueba de $(1 \Rightarrow 2)$ en el Teorema 44: Sea $\phi : \Sigma' \twoheadrightarrow 2^X$ una usco con Σ' a espacio métrico (resp. un espacio métrico completo) de peso κ. Tenemos una κ-κ-resolución proyectiva de la identidad $\{Q_\alpha\}_{\kappa \leq \alpha < \mu}$. Escogemos $\{v_i^\alpha\}_{i<\kappa}$ un subconjunto denso de la bola unidad de $(Q_{\alpha+1} - Q_\alpha)(X)$. Para cada i, α escogemos $\sigma_i^\alpha \in \Sigma'$ tal que $v_i^\alpha \in \phi(\sigma_i^\alpha)$. Definimos $\Sigma = \kappa \times \Sigma'$ (consideramos κ como conjunto de cardinalidad κ dotado de la topología discreta), $\Gamma = \kappa \times [\kappa, \mu)$ y

$$T : V^* \longrightarrow c_1(\kappa \times \Sigma' \times \kappa \times [\kappa, \mu))$$

por $T(v^*)_{j,\sigma,i,\alpha} = v^*(v_i^\alpha)$ si $i = j$ y $\sigma = \sigma_i^\alpha$ mientras que $T(v^*)_{i,\alpha,j,\sigma} = 0$ en otro caso. Tenemos que comprobar que la imagen de T está realmente dentro del espacio $c_1(\kappa \times \Sigma' \times \kappa \times [\kappa, \mu))$. Tomemos pues $K \subset \Sigma = \kappa \times \Sigma'$ un compacto, de tal forma que existe un conjunto finito $F \subset \kappa$ y un compacto $K' \subset \Sigma'$ tal que $K \subset F \times K'$. Supongamos por reducción al absurdo que, para algún v^* y algún ε existe un conjunto infinito $S \subset F \times K' \times \Gamma$ con $|T(v^*)_\xi| > \varepsilon$ para todo $\xi \in S$. Podemos suponer que $F = \{i\}$ y S

es una sucesión de la forma $\{s_n = (i, k_n, i, \alpha_n)\}$ donde $k_n = \sigma_i^{\alpha_n} \in K'$ y los α_n son todos diferentes. Entonces $T(v^*)_{s_n} = v^*(v_i^{\alpha_n})$. Nótese que $v_i^{\alpha_n} \in \phi(\sigma_i^{\alpha_n}) \subset \phi(K')$ y como $\phi(K')$ es débilmente compacto existe $v \in V$ un punto de acumulación de los $\{v_i^{\alpha_n}, n < \omega\}$. Como cada $v_i^{\alpha_n}$ pertenece a una pieza distinta de la resolución $v_i^{\alpha_n} \in (Q_{\alpha_n+1} - Q_{\alpha_n})(x)$, esto obliga a que $v = 0$. Esto entra en contradicción con el hecho de que $|T(v^*)_{s_n}| > \varepsilon$. $\square$

Prueba de $(2 \Rightarrow 3)$ en el Teorema 44: De (2) sabemos que $K = B_{X^*}$ un conjunto puntualmente compacto del espacio $Z = c_1(\Sigma \times \Gamma)$ con Σ un espacio métrico (resp. completo) de peso κ . El espacio Σ es un subespacio de κ^ω (respectivamente, podemos suponer que $\Sigma = \kappa^\omega$, cf. seccion2.2). De hecho, como T es acotado, podemos suponer que K es un subconjunto de la bola unidad de Z, $K \subset B_Z \subset [-1,1]^{\Sigma \times \Gamma}$. Afirmamos que $\Delta = \Sigma \times \Gamma$ y sus subfamilias $\Delta_s = \{(\sigma, \gamma) \in \Delta : \sigma|_{length(s)} = s\}$ verifican la definición que hemos dado de compacto de κ-Gul'ko. Supongamos por reducción al absurdo que podemos encontrar $x \in K$, $\varepsilon > 0$ y $\sigma \in \Sigma$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen infinitos $\delta \in \Delta_{\sigma|_n}$ tales que $|x_\delta| > \varepsilon$. Entonces es posible construir una sucesión $\{\delta_n = (\sigma_n, \gamma_n)\} \subset \Delta$ tal que $|x_{\delta_n}| > \varepsilon$ para cada n y tal que $\sigma_n|_n = \sigma|_n$. Esto contradice el hecho de que $x \in c_1(\Sigma \times \Gamma)$, puesto que $\{\sigma_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\sigma\}$ es un subconjunto compacto de Σ. $\square$

Prueba de $(1 \Rightarrow 2)$ del Teorema 45: Supongamos que $K \subset [-1,1]^\Delta$ y que tenemos una familia $\{\Delta_s : s \in \kappa^{(\omega)}\}$ y $\Sigma \subset \kappa^\omega$ como en la Definición 42 de compacto de κ-Gul'ko (o κ-Talagrand). Entonces, el conjunto $\Delta \cup \{0\}$ puede verse como un subconjunto de $C_p(K)$ que separa los puntos de K y se tiene una usco $\phi : \Sigma \twoheadrightarrow 2^{\Delta \cup \{0\}}$ dada por $\phi(\sigma) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_{\sigma|_n} \cup \{0\}$. Cada $\phi(\sigma)$ es compacto, ya que de la Definición 42 se sigue que $\phi(\sigma)$ es homeomorfo en la topología de convergencia puntual a la compactificación por un punto de un conjunto discreto con punto del infinito 0. Para ver que ϕ es superiormente semicontinua, supongamos que $\phi(\sigma) \subset U$ siendo $U \subset C_p(K)$ un abierto. Como $0 \in \phi(\sigma)$, U contiene un entorno de 0 de la forma $V = \{f \in C_p(K) : |f(x^i)| < \varepsilon \; i = 1, \ldots, m\} \subset U$ para ciertos $x^1, \ldots, x^m \in K$. Por la Definición 42 de compacto de κ-Gul'ko, existe un número natural k tal que $F = \{\delta \in \Delta_{\sigma|k} : |x^i_\delta| > \varepsilon\}$ es finito (podemos suponer que se trata del mismo n para todos los $i \in \{1, \ldots, k\}$). Al ser F finito, podemos encontrar también $k' > k$ tal que $F \cap \bigcap_{n < k'} \Delta_{\sigma|_n} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_{\sigma|_n}$. En ese caso $W = \{\tau \in \Sigma : \tau|_{k'} = \sigma|_{k'}\}$ es un entorno de σ y $\phi(\tau) \subset U$ siempre que $\tau \in W$.

Prueba $(2 \Rightarrow 1)$ del Teorema 45: Se sigue inmediatamente de la implicación $(1 \Rightarrow 3)$ del Teorema 44 puesto que $K \subset B_{C(K)^*}$. $\square$

Prueba de $(3 \Rightarrow 1)$ del Teorema 44: Se sigue de la implicación $(2 \Rightarrow 1)$ del Teorema 45 ya que $X \subset C(B_{X^*})$. $\square$

Definición 53. *Una familia bien ordenada de abiertos es una familia $\{U_\xi : \xi < \alpha\}$ de abiertos indicada en un ordinal α tal que $U_\xi \subset U_\zeta$ siempre que $\xi < \zeta$.*

Definición 54. *Sea κ un cardinal infinito. Un compacto K se dice κ-fragmentable si existen familias bien ordenadas de abiertos $\{\{U^\lambda_\xi : \xi < \alpha_\lambda\} : \lambda < \kappa\}$ que T_0-separan los puntos de K, es decir, para cada $x,y \in K$ diferentes existen λ, ξ tales que $|U^\lambda_\xi \cap \{x,y\}| = 1$.*

Por un resultado de Ribarska [65] un compacto es ω-fragmentable según esta definición si y sólo si existe una métrica que lo fragmenta, si y sólo si existe una casi métrica que lo fragmenta.

Teorema 55. *Todo compacto de κ-Gul'ko es κ-fragmentable.*

Prueba: Es completamente análoga a la de [31, Theorem 7.2.8], que corresponde al caso $\kappa = \omega$. Sea $L \subset [-1,1]^\Delta$ un compacto de κ-Gul'ko y $\{\Delta_s : s \in \kappa^{(\omega)}\}$ conjuntos como en la Definición 42. Para cada $s \in \kappa^{(\omega)}$, $0 < p < \omega$, sean $\mathscr{W}^+_{s,p} = \{\{x \in L : x_\delta > \frac{1}{p}\} : \delta \in \Delta_s\}$ y $\mathscr{W}^-_{s,p} = \{\{x \in L : x_\delta < -\frac{1}{p}\} : \delta \in \Delta_s\}$. De esta manera tenemos una familia $\mathscr{W} = \bigcup_{\nu<\kappa} \mathscr{W}_\nu$ de abiertos F_σ de L que T_0-separan los puntos de L y con la siguiente propiedad: Para cada $x \in L$ y cada $W \in \mathscr{W}$ existe $\nu < \kappa$ tal que $W \in \mathscr{W}_\nu$ y $ord(x, \mathscr{W}_\nu) < \omega$ (denotamos $ord(x, \mathscr{U}) = |\{U \in \mathscr{U} : x \in U\}|$). Definimos ahora los siguientes subconjuntos cerrados de L:

$$X_{m\nu} = \{x \in L : ord(x, \mathscr{W}_\nu) \leq m\} \quad \nu < \kappa,\ m < \omega$$

Para cada $m < \omega$ y $\nu < \kappa$ definiremos una familia bien ordenada de abiertos $\{V^{m\nu}_\xi\}$. Empezamos por hacer $V^{m\nu}_0 = \emptyset$, $V^{m\nu}_1 = L \setminus x_{m\nu}$. Supongamos que ya hemos definido $V^{m\nu}_\eta$ para todo $\eta < \xi$ y definamos $V^{m\nu}_\xi$. Sea $W^{m\nu}_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} V^{m\nu}_\eta$. Si $W^{m\nu}_\xi = L$ hacemos $V^{m\nu}_\xi = L$ y terminamos el proceso. En caso contrario, escogemos $x_0 \in L \setminus W^{m\nu}_\xi$ tal que

$$ord(x_0, \mathscr{W}_\nu) = \text{máx}\{ord(x, \mathscr{W}_\nu) : x \in L \setminus W^{m\nu}_\xi\}.$$

Nótese que existe tal x_0 y $ord(x_0, \mathscr{W}_\nu) \leq m$ ya que $L \setminus W^{m\nu}_\xi \subset L \setminus W^{m\nu}_1 = X_{m\nu}$. Definimos entonces

$$V_\xi = W^{m\nu}_\xi \cup \bigcap \{W \in \mathscr{W}_\nu : x_0 \in W\}.$$

Esto finaliza la construcción de los $V^{m\nu}_\xi$. Queda ver que las familias bien ordenadas de abiertos $\{\{V^{m\nu}_\xi : \xi < \alpha_{m\nu}\} : m < \omega,\ \nu < \kappa\}$ T_0-separan los puntos de L. Sean x_1 y x_2 dos puntos distintos de L. Existe $W \in \mathscr{W}$ tal que $|W \cap \{x_1, x_2\}| = 1$, digamos $W \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1\}$. Es más, sabemos que existe $\nu < \omega$ tal que $W \in \mathscr{W}_\nu$ y $m = ord(x_1, \mathscr{W}_\nu) < \omega$. Así pues $x_1 \in X_{m\nu}$ y sea $\xi = \text{mín}\{\zeta : x_1 \in V^{m\nu}_\zeta\}$. Ahora $x_1 \in W \cap V^{m\nu}_\xi \setminus \bigcup_{\zeta<\xi} V^{m\nu}_\zeta$. La forma en que definimos $V^{m\nu}_\xi$ garantiza que $W \supset V^{m\nu}_\xi \setminus \bigcup_{\zeta<\xi} V^{m\nu}_\zeta$ de modo que $x_2 \notin V^{m\nu}_\xi \setminus \bigcup_{\zeta<\xi} V^{m\nu}_\zeta$ y como $x_1 \in V^{m\nu}_\xi \setminus \bigcup_{\zeta<\xi} V^{m\nu}_\zeta$ ha de existir $\zeta \leq \xi$ tal que $|V^{m\nu}_\zeta \cap \{x_1, x_2\}| = 1$. $\square$

Capítulo 3

Compactos de Radon-Nikodým y espacios de Asplund

3.1. Compactos de Radon-Nikodým y generalizaciones

El concepto de compacto de Radon-Nikodým es debido a Reynov [64] y se define como un espacio topológico que es homeomorfo a un débil* compacto del dual de un espacio de Asplund. Recordamos que un espacio de Banach X es de Asplund si cada subespacio separable de X tiene dual separable. En [56], se da la siguiente caracterización:

Teorema 56. *Un compacto K es de Radon-Nikodým si y sólo si existe una métrica inferiormente semicontinua d en K que fragmenta K.*

Recordar que una función $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ de un espacio topológico a la recta real es inferiormente semicontinua si $\{y : g(y) \leq r\}$ es cerrado en Y para cada número real r.

Es un problema abierto si la imagen continua de un compacto de Radon-Nikodým es un compacto de Radon-Nikodým. Arvanitakis [9] ha abordado este problema del siguiente modo: si K es un compacto de Radon-Nikodým y $\pi : K \longrightarrow L$ es una suprayección continua, entonces tenemos una métrica inferiormente semicontinua d sobre K, y si queremos probar que L es Radon-Nikodým, debemos encontrar tal métrica en L. Un candidato natural es el siguiente:

$$d_1(x,y) \quad = \quad d(\pi^{-1}(x),\pi^{-1}(y)) = \inf\{d(t,s) : \pi(t) = x,\ \pi(s) = y\}.$$

La aplicación d_1 es inferiormente semicontinua, fragmenta L y es una casi métrica, es decir, es simétrica y se anula si y sólo si $x = y$. Pero no es una métrica porque en general, falla la desigualdad triangular. De este modo, Arvanitakis [9] introduce el siguiente concepto:

Definición 57. *Un compacto L se dice casi Radon-Nikodým si existe una casi métrica inferiormente semicontinua que lo fragmenta.*

La clase de los compactos de casi Radon-Nikodým es cerrada para imágenes continuas pero se desconoce si coincide con la clase de los compactos de Radon-Nikodým o con la de sus imágenes continuas. Aparecen en la literatura al menos otras dos superclases de las imágenes continuas de los compactos de Radon-Nikodým. Reznichenko [8, p. 104] define un compacto L como fuertemente fragmentable si existe una métrica d que fragmenta L tal que cada para de puntos diferentes de L tienen entornos a d-distancia positiva. Namioka [57] demostró que las clases de compactos de casi Radon-Nikodým y fuertamente fragmentables son iguales. La otra superclase es la de los compactos numerablemente inferiormente fragmentables, introducida por Fabian, Heisler y Matoušková [33]. El siguiente Teorema 58 muestra, para $\kappa = \omega$, que esta clase también coincide con las otras dos. De hecho la condición (2) del Teorema 58 para $\kappa = \omega$ es exactamente la definición de compacto numerablemente inferiormente fragmentable, mientras un resultado de Namioka [57] establece que la condición (1) cuando $\kappa = \omega$ es equivalente a ser un compacto de casi Radon-Nikodým.

Introducimos algunas definiciones y notaciones. Un subconjunto C de $K \times K$ se dice que es un casi entorno de la diagonal de K [56] si contiene a la diagonal de K, $\Delta_K \subset C$, y para cada subconjunto (cerrado) no vacío $L \subset K$ existe un abierto relativo no vacío U de L tal que $U \times U \subset C$. Una pseudométrica d sobre K diremos que ε-fragmenta K si $\{(x,y) \in K \times K : d(x,y) < \varepsilon\}$ es un casi entorno de la diagonal. Si A es una familia de funciones puntualmente acotada sobre K definimos la pseudométrica

$$d_A(x,y) = \sup\{|f(x) - f(y)| : f \in A\}.$$

Teorema 58. *Sea K un subconjunto compacto de $[-1,1]^\Gamma$ y κ un cardinal infinito. Son equivalentes:*

1. *Existe una familia $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ de casi entornos cerrados de la diagonal de K tal que $\bigcap_{\lambda<\kappa} C_\lambda = \Delta_K$.*
2. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una descomposición $C(K) = \bigcup_{\lambda<\kappa} \Gamma_{\lambda,\varepsilon}$ en conjuntos acotados tal que $d_{\lambda,\varepsilon}$ ε-fragmenta K para cada λ.*
3. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe una descomposición $\Gamma = \bigcup_{\lambda<\kappa} \Gamma_{\lambda,\varepsilon}$ tal que $d_{\lambda,\varepsilon}$ ε-fragmenta K para cada λ.*

Cuando se cumplan estas condiciones, diremos que K es un compacto de κ-casi Radon-Nikodým.

Prueba: Si K verifica (1) definimos entonces para cada $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $C_{\bar{\lambda}} = \bigcap_{i=1}^n C_{\lambda_i}$ que es un casi entorno cerrado de la diagonal, y

$$\Gamma_{\bar{\lambda},\varepsilon} = \left\{ f \in C(K) : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ para todo } (x,y) \in C_{\bar{\lambda}} \right\} \cap \{ f : \|f\|_\infty \leq n\}$$

Cada $d_{\Gamma_{\bar{\lambda},\varepsilon}}$ ε-fragmenta K puesto que $C_{\bar{\lambda}}$ es un casi entorno de la diagonal. Por otra parte, para probar que $C(K) = \bigcup_{\bar{\lambda}} \Gamma_{\bar{\lambda},\varepsilon}$ para cada ε, obsérvese que para cualquier $f \in C(K)$ los

conjuntos
$$C^-_{\overline{\lambda}} = \left\{(x,y) \in K \times K : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \text{ y } (x,y) \in C^-_{\overline{\lambda}}\right\}$$
constituyen una familia de subconjuntos compactos de $K \times K$ con intersección vacía, por lo que debe existir $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ con $n > \|f\|_\infty$ tal que $C^-_{\overline{\lambda}}$ es vacío y en ese caso $f \in A^-_{\overline{\lambda},\varepsilon}$.

Que (2) implica (3) es evidente identificando cada coordenada $\gamma \in \Gamma$ con la correspondiente función continua sobre K.

Supongamos que se verifica (3). Como $d_{\Gamma_{\lambda,\varepsilon}}$ ε-fragmenta K, esto significa que cada conjunto $C_{\lambda,p} = \{(x,y) \in K \times K : d_{\Gamma_{\lambda,p}}(x,y) \leq \frac{1}{p}\}$ es un casi entorno de la diagonal, que es además cerrado. Por otra parte, nótese que para cada $\lambda < \kappa$ y $p < \omega$, $(x,y) \in C_{\lambda,p}$ si y sólo si $|x_\gamma - y_\gamma| \leq \frac{1}{p}$ para todo $\gamma \in \Gamma_{\lambda,p}$ luego
$$\bigcap_{\lambda,p} C_{\lambda p} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \left\{(x,y) : |x_\gamma - y_\gamma| \leq \frac{1}{p} \text{ para todo } \gamma \in \bigcup_{\lambda<\kappa} \Gamma_{\lambda,p} = \Gamma\right\} = \Delta_K$$
$\square$

Teorema 59. *Si K es un compacto de κ-casi Radon-Nikodým y $f : K \longrightarrow L$ es una suprayección continua, entonces L es de κ-casi Radon-Nikodým.*

Prueba: Sigue un argumento similar al de Namioka [56] de que la imagen de un compacto fragmentable es fragmentable y la de Arvanitakis de que la imagen de un compacto de casi Radon-Nikodým es un compacto de casi Radon-Nikodým. Veamos en primer lugar que si C es un casi entorno de la diagonal de K, entonces $f(C) = \{(f(x), f(y)) : (x,y) \in C\}$ es un casi entorno de la diagonal de L. Sea $X \subset L$ cerrado. Usando el lema de Zorn, encontramos un subconjunto cerrado Y de K minimal entre aquellos que cumplen $f(Y) = X$. Al ser C un casi entorno de la diagonal existe U abierto relativo no vacío de Y tal que $U \times U \subset C$. La minimalidad de Y implica que ha de existir $V \subset f(U)$ abierto no vacío de X (si no existiera se tendría $f(Y \setminus U) = \overline{f(Y \setminus U)} = X$), el cual cumple que $V \times V \subset f(C)$ lo que concluye la prueba de que $f(C)$ es un casi entorno de la diagonal de L. Si ahora K es de κ-casi Radon-Nikodým, existe una familia de casi entornos de la diagonal de K $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ con $\bigcap_{\lambda<\kappa} C_\lambda = \Delta_K$ y podemos suponer que dicha familia es cerrada bajo intersecciones finitas. Veamos que $\bigcap_{\lambda<\kappa} f(C_\lambda) = \Delta_L$. Si $(x,y) \in L \times L \setminus \Delta_L$, entonces $f^{-1}(x) \times f^{-1}(y)$ es un compacto de $K \times K$ disjunto con Δ_K, así que por compacidad y por ser la familia $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ cerrada bajo intersecciones finitas con $\bigcap_{\lambda<\kappa} C_\lambda = \Delta_K$ existe $\lambda < \kappa$ tal que $C_\lambda \cap (f^{-1}(x) \times f^{-1}(y)) = \emptyset$. En este caso $(x,y) \notin f(C_\lambda)$. $\square$

Teorema 60. *Sean κ un cardinal infinito y $K \subset [-1,1]^\Gamma$ un compacto de κ-casi Radon-Nikodým*

1. *Existe una descomposición $\Gamma = \bigcup_{\lambda<\mathbf{d}(\kappa)} \Gamma_\lambda$ tal que cada d_{Γ_λ} fragmenta K.*
2. *Si $\tau \leq \kappa^\omega$ es otro cardinal infinito y $|\Gamma| < \mathbf{b}_\kappa(\tau)$ entonces existe $\theta < \tau$ y una descomposición $\Gamma = \bigcup_{\alpha<\theta} \Gamma_\alpha$ tal que cada d_{Γ_α} fragmenta K.*

Prueba: Tenemos para cada $p < \omega$ una descomposición $\Gamma = \bigcup_{\lambda<\kappa} \Gamma_{\lambda,p}$ tal que cada $d_{\Gamma_{\lambda,p}}$ $\frac{1}{p}$-fragmenta K. Para cada $\gamma \in \Gamma$ escogemos $\sigma(\gamma) \in \kappa^\omega$ tal que $\gamma \in \bigcap_{p<\omega} \Gamma_{\sigma(\gamma)_p}$. La observación clave es la siguiente: Si $B \subset \kappa^\omega$ es compacto entonces $d_{\{\gamma:\sigma(\gamma)\in B\}}$ fragmenta K: Efectivamente, al ser B es compacto, el conjunto $F = \{\sigma_p : \sigma \in B\}$ es finito para cada $p < \omega$. Ocurre entonces que $\Gamma_B = \{\gamma : \sigma(\gamma) \in B\} \subset \bigcup_{\lambda\in F} \Gamma_{\lambda,p}$ y por tanto $d_{\Gamma_B} \leq \text{máx}\{d_{\Gamma_{\lambda,p}} : \lambda \in F\}$ lo que implica que d_{Γ_B} $\frac{1}{p}$-fragmenta K. El apartado (1) se sigue inmediatamente de esta observación ya que κ^ω es unión de $\mathbf{d}(\kappa)$ compactos. Respecto al apartado (2), el conjunto $A = \{\sigma(\gamma) : \gamma \in \Gamma\} \subset \kappa^\omega$ tiene cardinalidad menor que $\mathbf{b}_\kappa(\tau)$ así que por la definición de este cardinal A puede cubrirse por $\theta < \tau$ compactos de κ^ω, $A \subset \bigcup_{\theta<\alpha} B_\alpha$. Definimos entonces $\Gamma_\alpha = \{\gamma \in \Gamma : \sigma(\gamma) \in B_\alpha\}$. $\square$

Corolario 61. *Si K es un compacto de casi Radon-Nikodým de peso menor que $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\omega(\omega_1)$ entonces K es un compacto de Radon-Nikodým.*

Prueba: Podemos ver $K \subset [-1,1]^\Gamma$ con $|\Gamma| < \mathbf{b}$ y aplicar el Teorema 60 para $\kappa = \omega$ y $\tau = \omega_1$ obteniendo una descomposición $\Gamma = \bigcup_{n<\omega} \Gamma_n$ con la propiedad de que cada d_{Γ_n} fragmenta K. En este caso $d = \sum_{n<\omega} 2^{-n} d_n$ es una métrica inferiormente semicontinua que fragmenta K, de modo que K es un compacto de Radon-Nikodým por el Teorema 56. $\square$

Nótese que el Teorema 60 muestra algo más fuerte que el Corolario 61: siempre que se tenga un compacto de casi Radon-Nikodým en un cubo de tamaño menor que $\mathbf{b}$ va a existir una descomposición numerable de las coordenadas del cubo que atestigua el hecho de que K es de Radon-Nikodým. Se sigue de un resultado de Arvanitakis [9] un hecho similar en cubos de Cantor $\{0,1\}^\Gamma$:

Teorema 62 (Arvanitakis). *Si $K \subset \{0,1\}^\Gamma$ es un compacto de casi Radon-Nikodým, entonces existe una descomposición numerable $\Gamma = \bigcup_{n<\omega} \Gamma_n$ tal que cada d_{Γ_n} fragmenta K, y por tanto K es un compacto de Radon-Nikodým.*

El ejemplo que sigue muestra que ese tipo de descomposiciones no existen en general aunque el compacto K se de Radon-Nikodým, incluso metrizable.

Proposición 63. *Existe un conjunto Γ de cardinalidad $\mathbf{b}$ y un subconjunto compacto K de $[0,1]^\Gamma$ homeomorfo al conjunto de Cantor $\{0,1\}^\mathbb{N}$ tal que para cualquier descomposición $\Gamma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que d_{Γ_n} no fragmenta K.*

Prueba: En primer lugar, tomamos Γ un subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ de cardinalidad $\mathbf{b}$ que no puede ser cubierto por una cantidad numerable de compactos. Llamamos entonces $A=\{\gamma_n : \gamma\in\Gamma, n\in\mathbb{N}\}$ al conjunto de todos los términos de los elementos de Γ. Definimos

$$K' = \{x \in \{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}} : x_{\gamma,n} = x_{\gamma',n'} \text{ siempre que } \gamma_n = \gamma'_{n'}\}.$$

Obsérvese que K' es homeomorfo a $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$: para cada $a\in A$ escogemos $\gamma^a, n^a \in \Gamma\times\mathbb{N}$ tal que $\gamma^a_{n^a} = a$; en este caso tenemos un homeomorfismo $K' \longrightarrow \{0,1\}^A$ dado por $x\mapsto (x_{\gamma^a,n^a})_{a\in A}$.

Ahora, consideramos el embebimiento $\phi : \{0,1\}^{\Gamma\times\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]^{\Gamma}$ dado por

$$\phi(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^n x_{\gamma,n}\right)_{\gamma\in\Gamma}$$

Afirmamos que el espacio $K=\phi(K')\subset[0,1]^{\Gamma}$ es el que buscábamos. Sea $\Gamma=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Gamma_n$ cualquier descomposición numerable de Γ. Como Γ no puede estar contenido en una unión numerable de compactos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, ha de existir $n\in\mathbb{N}$ tal que Γ_n no está contenido en un compacto. Para este n, eso quiere decir que para algún natural $m\in\mathbb{N}$ el conjunto $S=\{\gamma_m : \gamma\in\Gamma_n\}\subset A$ es infinito. Consideramos

$$K_0 = \{x\in K' : x_{\gamma,k} = 0 \text{ siempre que } \gamma_k\not\in S\}\subset K.$$

Por las mismas razones que K', K_0 es homeomorfo al conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ por la aplicación $K_0 \longrightarrow \{0,1\}^S$ dada por $x\mapsto (x_{\gamma^a,n^a})_{a\in S}$. Tomemos dos elementos distintos $x,y\in K_0$. Entonces, debe existir algún $\gamma\in\Gamma_n$ tal que $x_{\gamma,m}\neq y_{\gamma,m}$, y esto implica que $|\phi(x)_\gamma - \phi(y)_\gamma| \geq 3^{-m}$ y por tanto $d_{\Gamma_n}(\phi(x),\phi(y))\geq 3^{-m}$. Esto significa que cualquier subconjunto no vacío de $\phi(K_0)$ de d_{Γ_n}-diámetro menor que 3^{-m} es unipuntual. Si d_{Γ_n} fragmentara K, eso implicaría que $\phi(K_0)$ tiene un punto aislado, lo que contradice el hecho de que es homeomorfo al conjunto de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Finalmente, enunciamos el siguiente resultado, generalización de un resultado de Arvanitakis [9] que afirma que un compacto es de Eberlein si y sólo si es un compacto de Corson y de casi Radon-Nikodým.

Teorema 64. *Un compacto K es de κ-Eberlein si y sólo es a la vez un compacto de κ-Corson y un compacto de κ-casi Radon-Nikodým.*

La demostración es prácticamente idéntica a la que se da en [57, Theorem 6] del caso $\kappa=\omega$, que es una variación sobre la prueba original de Arvanitakis [9]. No obstante la presentamos a continuación con todo detalle. Sea X un espacio topológico y C un casi entorno de la diagonal de X. Un subconjunto $U\subset X$ diremos que es C-pequeño si $U\times U\subset C$.

Asociado al casi entorno C tenemos un proceso de derivación en X, para cada compacto no vacío $F \subset X$ y cada ordinal α definimos $F^{(\alpha)}$ recursivamente:

- $F^{(0)} = F$,
- $F^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} F^{(\beta)}$ si α es un ordinal límite,
- $F^{(\beta+1)} = F^{(\beta)} \setminus \{U : U$ es abierto relativo C-pequeño de $F^{(\beta)}\}$.

Si $\alpha \leq \alpha'$ entonces $F^{(\alpha')} \subset F^{(\alpha)}$. Sea α_0 el menor ordinal tal que $F^{(\alpha_0)} = \emptyset$ (existe al ser C un casi entorno de la diagonal). Nótese que cada $F^{(\alpha)}$ es compacto, lo que implica que α_0 no es un ordinal límite, $\alpha_0 = \beta_0 + 1$. Denotamos $\alpha(F) = \beta_0$, $Z(F) = F^{(\alpha(F))}$.

Lema 65. *Usando la notación anterior,*

1. *$Z(F)$ es un subconjunto compacto no vacío de F que puede ser cubierto por una cantidad finita de abiertos relativos C-pequeños de $Z(F)$.*
2. *Si $F_1 \subset F_2$, entonces $F_1^{(\alpha)} \subset F_2^{(\alpha)}$ para cada α y $\alpha(F_1) \leq \alpha(F_2)$.*
3. *Si $\bigcap_{n<\omega} F_n \neq \emptyset$ entonces existe $k < \omega$ tal que $Z(F_1 \cap \cdots \cap F_k) \cap F_m \neq \emptyset$ para todo $m < \omega$.*

Prueba (este lema es [57, Lemma 3]): Sólo el tercer apartado requiere algunos detalles. Sea $G_k = \bigcap_{n<k} F_k$. Por el apartado (2), $\alpha(G_1) \geq \alpha(G_2) \geq \cdots$. Existe por tanto $k < \omega$ tal que $\alpha(G_k) = \alpha(G_m)$ para todo $m \geq k$. Para $m \geq k$, $Z(G_k) \cap F_m = G_k^{(\alpha(G_k))} \cap F_m \supset G_m^{(\alpha(G_k))} = G_m^{(\alpha(G_m))} = Z(G_m) \neq \emptyset$. Para $m < k$, $Z(G_k) \cap F_m \supset Z(G_k) \cap G_k = Z(G_k) \neq \emptyset$. $\square$

Definición 66. *Una familia $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subconjuntos de un conjunto Y se dice que es punto-κ si $|\{\gamma \in \Gamma : y \in Y_\gamma\}| \leq \kappa$ para cada $y \in Y$, punto-finita si $|\{\gamma \in \Gamma : y \in Y_\gamma\}| < \omega$ para cada $y \in Y$ y se dice κ-punto-finita si $\Gamma = \bigcup_{\alpha<\kappa} \Gamma_\alpha$ y cada una de las familias $\{Y_\gamma : \gamma \in \Gamma_\alpha\}$ es punto-finita.*

Lema 67. *Sea κ un cardinal infinito, X un espacio topológico y C un casi entorno de la diagonal de X. Sean $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ y $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ familias de subconjuntos no vacíos de X tales que para cada $\gamma \in \Gamma$, A_γ es compacto, $A_\gamma \subset B_\gamma$ y $(A_\gamma \times (X \setminus B_\gamma)) \cap C = \emptyset$. Si $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es punto-κ, entonces $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es κ-punto-finita.*

Prueba: Análoga a la de [57, Theorem 4]. Usamos la siguiente notación: para cada subconjunto Ψ de Γ,

$$\mathscr{Z}(\Psi) = \{Z(A_{\gamma_1} \cap \cdots \cap A_{\gamma_k}) : \gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Psi, k < \omega\}.$$

Nótese que $|\mathscr{Z}(\Psi)| \leq \text{máx}(\omega, |\Psi|)$. Definimos también

$$H(\Psi) = \{\eta \in \Gamma : Z \cap A_\eta \neq \emptyset \text{ para algún } Z \in \mathscr{Z}(\Psi)\}.$$

Observar que $\Psi \subset H(\Psi)$ y afirmamos además que

$$(\star) \quad |H(\Psi)| \leq \text{máx}(\kappa, |\Psi|).$$

Para probar esto, bastará ver que para cada $Z \in \mathscr{Z}(\Psi)$ se tiene $|\{\eta \in \Gamma : Z \cap A_\eta \neq \emptyset\}| \leq \kappa$. Supongamos que no fuese así, es decir que $Z \cap A_\eta \neq \emptyset$ para más de κ elementos η.Por el Lema 65(1), $Z = \bigcup_{n<k} U_n$ donde cada U_n es C-pequeño, es decir, $U_n \times U_n \subset C$. Existe $n < k$ tal que $U_n \cap A_\eta \neq \emptyset$ para una cantidad mayor que κ de elementos η. Nuestra hipótesis nos dice que $(A_\eta \times (X \setminus B_\eta)) \cap (U_n \times U_n) = \emptyset$, de donde se sigue que $U_n \cap (X \setminus B_n) = \emptyset$ siempre que $U_n \cap A_\eta \neq \emptyset$. Por tanto $|\{\eta \in \Gamma : \emptyset \neq U_n \subset B_\eta\}| > \kappa$ lo que contradice el hecho de que $\{B_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es punto-κ.

La prueba del Teorema 67 es por inducción en $|\Gamma|$. Si $|\Gamma| \leq \kappa$ no hay nada que probar. Sea ahora $\aleph > \kappa$ un cardinal tal que el Teorema 67 es cierto siempre que $|\Gamma| < \aleph$ y veamos que también se verifica cuando $|\Gamma| = \aleph$. Supondremos que $\Gamma = \aleph$ es un cardinal. Definimos recursivamente familias $\Psi_\alpha \subset \Gamma$ para $\alpha < \Gamma$ del siguiente modo: $\Psi_0 = 0 = \emptyset$, $\Psi_{\beta+1} = (\beta + 1) \cup H(\Psi_\beta)$ y finalmente $\Psi_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \Psi_\beta$ si α es un ordinal límite. Nótese que $\Psi_\alpha \subset \Psi_\beta$ cuando $\alpha < \beta$ y $\bigcup_{\alpha<\Gamma} \Psi_\alpha = \Gamma$. Además, por la desigualdad $(\star)$ tenemos que $|\Psi_\alpha| \leq \text{máx}(\kappa, |\alpha|)$.

Para cada $\alpha < \Gamma$ sea $\Gamma_\alpha = \Psi_{\alpha+1} \setminus \Psi_\alpha$. Entonces $\{\Gamma_\alpha : \alpha < \Gamma\}$ es una partición de Γ con $|\Gamma_\alpha| \leq \text{máx}(\kappa, |\alpha|) < \Gamma$ para cada $\alpha < \Gamma$. Por la hipótesis de inducción, $\Gamma_\alpha = \bigcup_{\nu<\kappa} \Gamma_\alpha^\nu$ siendo $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma_\alpha^\nu\}$ una familia punto-finita para cada $\nu < \kappa$. Sea $\Gamma_\nu = \bigcup_{\alpha<\Gamma} \Gamma_\alpha^\nu$. Para completar la demostración bastará comprobar que la familia $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma_\nu\}$ es punto-finita para cada $\nu < \kappa$. Para ello, es suficiente mostrar que si tenemos $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \Gamma$ y $\gamma_j \in \Gamma_{\alpha_j}$ entonces $\bigcap_{j<\omega} A_{\gamma_j} = \emptyset$. Supongamos por reducción al absurdo que $\bigcap_{j<\omega} A_{\gamma_j} \neq \emptyset$. Entonces por el Lema 65(3) existe $k < \omega$ tal que

$$Z(A_{\gamma_1} \cap \cdots \cap A_{\gamma_k}) \cap A_{\gamma_m} \neq \emptyset \text{ para todo } m < \omega.$$

Como $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Psi_{\alpha_k+1}$, $\gamma_m \in H(\Psi_{\alpha_k+1}) \subset \Psi_{\alpha_k+2}$ para todo $m < \omega$. Se sigue entonces que $\gamma_m \notin \Gamma_{\alpha_m} = \Psi_{\alpha_{m+1}} \setminus \Psi_{\alpha_m}$ cuando $\alpha_m \geq \alpha_k + 2$, que es absurdo. $\square$

Lema 68. *Sea κ un cardinal infinito, K un compacto de κ-casi Radon-Nikodým y sea $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ y $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ familias de subconjuntos no vacíos de K tales que, para cada $\gamma \in \Gamma$, A_γ es cerrado, V_γ es abierto y $A_\gamma \subset V_\gamma$. Si $\{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es punto-κ, entonces $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es κ-punto-finita.*

Prueba: Como la de [57, Corollary 5], sea $\{C_\lambda : \lambda < \kappa\}$ una familia de casi entornos cerrados de la diagonal, cerrada bajo intersecciones finitas tal que $\bigcap_{\lambda<\kappa} C_\lambda = \Delta_K$. Para cada γ, $(A_\gamma \times (K \setminus V_\gamma)) \cap \Delta_K = \emptyset$, así que por compacidad, ha de existir $\lambda_\gamma < \kappa$ tal que $(A_\gamma \times (K \setminus V_\gamma)) \cap C_{\lambda_\gamma} = \emptyset$. De esta forma, podemos escribir $\Gamma = \bigcup_{\lambda<\kappa} \Gamma_\lambda$ de forma que

$(A_\gamma \times (K \setminus V_\gamma)) \cap C_\lambda = \emptyset$ para cada $\gamma \in \Gamma_\lambda$. Por el Lema 67, $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma_\lambda\}$ es κ-punto-finita para cada λ, y por tanto también lo es $\{A_\gamma : \gamma \in \gamma\}$. $\square$

Prueba del Teorema 64: Puesto que K es un compacto de κ-Corson, existe una familia $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de funciones continuas sobre K, $f_\gamma : K \longrightarrow [0,1]$, que separa los puntos de K (para cada $x \neq y$ existe γ con $f_\gamma(x) \neq f_\gamma(y)$) y tal que para y tal que para cada $x \in K$, $|\{\gamma \in \Gamma : f_\gamma(x) > 0\}| \leq \kappa$. Denotemos por H el conjunto de los racionales del intervalo $]0,1[$ y, para cada $\alpha = (q,\gamma) \in H \times \Gamma$ sea

$$U_\alpha = f_\gamma^{-1}(]q,1]),\ A_\alpha = f_\gamma^{-1}([q,1]) \text{ y } V_\alpha = f_\gamma^{-1}(]0,1]).$$

Las familias $\{A_\alpha : \alpha \in H \times \Gamma\}$ y $\{V_\alpha : \alpha \in H \times \Gamma\}$ verifican las hipótesis del Lema 68, así que $\{A_\alpha : \alpha \in H \times \Gamma\}$ es κ-punto-finita y por tanto $\{U_\alpha : \alpha \in H \times \Gamma\}$ también es κ-punto-finita. De hecho, $\{U_\alpha : \alpha \in H \times \Gamma\}$ es una familia de abiertos F_σ de K que T_0-separa los puntos de K, así que K es κ-Eberlein. $\square$

Una generalización de un resultado de Roman Pol [63] dada por Bell y Marciszewski [19] afirma que, dado un cardinal infinito κ, un compacto K es κ-Corson si y sólo si $C_p(K)$ es imagen continua de un subconjunto cerrado de $\mathscr{L}_\kappa(\Gamma)^{\mathbb{N}}$ para algún conjunto Γ ($\mathscr{L}_\kappa(\Gamma)$ es el espacio $\Gamma \cup \{\infty\}$ en el que los puntos de Γ son aislados y los entornos de ∞ son los complementos de los subconjuntos de Γ de cardinalidad menor o igual que κ). Una consecuencia inmediata de este resultado es que la imagen continua de un compacto de κ-Corson es un compacto de κ-Corson. Esto combinado con el Teorema 64 que acabamos de probar y el Teorema 59 (la imagen continua de un compacto de κ-casi Radon-Nikodým es de κ-casi Radon-Nikodým) prueba el Teorema 29 (la imagen continua de un compacto de κ-Eberlein es un compacto de κ-Eberlein).

3.2. El número de conjuntos de Asplund que generan un espacio de Banach

Una clase de espacios de Banach íntimamente ligada a los compactos de Radon-Nikodým es la de los espacios Asplund generados. Recordamos que un subconjunto A de un espacio de Banach X se dice que es un conjunto de Asplund si la pseudométrica d_A fragmenta la bola cerrada de X^* en la topología débil*. Resulta que un espacio de Banach X es de Asplund si y sólo si B_X es un conjunto de Asplund. El espacio de Banach X se dice Asplund generado si existe un conjunto de Asplund A tal que $X = \overline{span}(A)$, cf. [31, 1.4]. Ocurre que un compacto K es de Radon-Nikodým si y sólo si $C(K)$ es Asplund generado, y si X es Asplund generado entonces (B_{X^*}, w^*) es un compacto de Radon-Nikodým, aunque el recíproco no es cierto en general [31, 1.5]. Los espacios de Banach cuya bola dual es un compacto de casi Radon-Nikodým se estudian en [33]. De manera similar a como hacíamos en el Capítulo 2, introducimos los siguientes índices:

Definición 69. *Sea X un espacio de Banach.*

1. *El índice $AG(X)$ es el menor cardinal infinito κ para el que existe una familia $\{A_\lambda : \lambda < \kappa\}$ de conjuntos de Asplund en X tales que $X = \overline{span}\{A_\lambda : \lambda < \kappa\}$.*
2. *El índice $LF(X)$ es el menor cardinal infinito κ tal que (B_{X^*}, w^*) es un compacto de κ-casi Radon-Nikodým.*

El índice $LF(X)$ desempeña respecto de $AG(X)$ un papel análogo al del índice $\ell K(X)$ respecto de $CG(X)$.

Teorema 70. *Sea X un espacio de Banach. Se verifican las siguientes relaciones:*

1. $LF(X) \leq AG(X)$
2. $AG(X) \leq \mathbf{d}(LF(X))$.
3. $dens(X) \geq \mathbf{b}_{LF(X)}(AG(X))$.

Prueba: Sea Γ un subconjunto denso en norma de B_X de cardinalidad $dens(X)$. Los apartados (2) y (3) se siguen del Teorema 60 aplicado al compacto $K = B_{(X^*,w^*)} \subset [-1,1]^\Gamma$. Para el apartado (1) tomamos Γ una unión de $AG(X)$ subconjuntos de Asplund de B_X con $X = \overline{span}\Gamma$ y usamos el apartado (3) del Teorema 58. $\square$

Obsérvese que debido al Teorema 59 el índice $LF(X)$ se reduce en subespacios, es decir, $LF(Y) \leq LF(X)$ si Y es un subespacio de X. Esto no es así para el índice $AG(X)$ puesto que existen subespacios de espacios Asplund generados que no son Asplund generados, cf. [31]. Sin embargo, tenemos el siguiente corolario al Teorema 70:

Corolario 71. *Si Y es un subespacio de un espacio de Banach X que verifica la desigualdad $dens(Y) < \mathbf{b}_{AG(X)}(AG(X)^+)$ entonces $AG(Y) \leq AG(X)$.*

Corolario 72. *Si X es Asplund generado e Y es un subespacio de X de carácter de densidad menor que $\mathbf{b}$ entonces Y es Asplund generado.*

Hacemos notar que la cota que da el Corolario 72 no puede mejorarse, porque por el Teorema 39 existe X_0 débilmente compactamente generado e Y_0 un subespacio no débilmente compactamente generado de X_0 con $dens(Y_0) = \mathbf{b}$. Por un resultado de Orihuela, Schachermayer y Valdivia [58], un espacio de Banach es débilmente compactamente generado si y sólo si es a la vez Asplund generado y débilmente Lindelöf determinado. Esta segunda propiedad se hereda a subespacios [38], luego los citados X_0 e Y_0 constituyen un ejemplo de un subespacio de un espacio Asplund generado de carácter de densidad $\mathbf{b}$ que no es Asplund generado.

3.3. Compactos de Radon-Nikodým totalmente ordenados

En esta sección probaremos un resultado acerca del problema de la imagen continua de los compactos de Radon-Nikodým de naturaleza diferente a lo presentado en las secciones anteriores. En primer lugar damos la defininción de compacto casi totalmente disconexo. Denotamos por $\Sigma_{\{0,1\}}([0,1]^\Gamma)$ el subespacio de $[0,1]^\Gamma$ formado por los elementos tales que todas sus coordenadas salvo una cantidad a lo más numerable pertenece a $\{0,1\}$.

Definición 73. *Un compacto se dice casi totalmente disconexo si es homeomorfo a un subespacio de $\Sigma_{\{0,1\}}([0,1]^\Gamma)$ para algún conjunto Γ.*

Esta clase contiene tanto a los compactos totalmente disconexos como a los compactos de Corson. Fue introducida por Arvanitakis [9] que probó el siguiente resultado:

Teorema 74 (Arvanitakis). *Todo compacto de casi Radon-Nikodým casi totalmente disconexo es un compacto de Radon-Nikodým.*

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 75. *Sea K compacto totalmente ordenado fragmentado por una casi métrica d. Entonces K es casi totalmente disconexo.*

Recordamos que un compacto se dice totalmente ordenado si existe una relación de orden total $\leq$ en K de modo que los intervalos abiertos $]a,b[$ forman una base de la topología de K.

Corolario 76. *Sea K un compacto totalmente ordenado de casi Radon-Nikodým. Entonces K es un compacto de Radon-Nikodým.*

Tras la prueba del Teorema 75, daremos ejemplos de compactos totalmente ordenados de Radon Nikodým. Mencionamos que sin embargo no es posible encontrar compactos totalmente ordenados que sean compactos de Corson no metrizables, cf. [37]. No sabemos si un compacto fragmentable totalmente ordenado ha de ser un compacto de Radon-Nikodým.

Pasamos a la prueba del Teorema 75. Comenzamos con un par de lemas reformulando el concepto de espacio casi totalmente disconexo, el segundo de los cuales en el contexto de los compactos totalmente ordenados.

Lema 77. *Para un compacto K son equivalentes:*

1. *K es casi totalmente disconexo.*
2. *Existe una colección $\{(F_i,H_i)\}_{i\in I}$ de pares de subconjuntos cerrados de K tal que*
   a) *$F_i\cap H_i=\emptyset$ para cada $i\in I$.*

b) *Para cada x en K, el conjunto $\{i \in I : x \notin F_i \cup H_i\}$ es numerable.*
c) *Para cada par de puntos distintos x, y en K existe $i \in I$ tal que $x \in F_i$ e $y \in H_i$ o viceversa.*

Prueba: Para $(1) \Rightarrow (2)$, supongamos que $K \subset \Sigma_{\{0,1\}}([0,1]^\Gamma)$. Para cada $\gamma \in \Gamma$ y cada par r, s de números racionales $0 \leq r < s \leq 1$, llamamos $i = (\gamma, r, s)$,

$$F_i = \{x \in K : x_\gamma \leq r\}$$

$$H_i = \{x \in K : x_\gamma \geq s\}$$

Estos (F_i, H_i) satisfacen todas las condiciones deseadas. Recíprocamente, supongamos que tenemos una familia como en (2). Para cada i, por el Teorema de Urysohn, existe una función continua $f_i : K \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_i(F_i) = \{0\}$ y $f_i(H_i) = \{1\}$. En este caso tenemos un embebimiento $f : K \longrightarrow \Sigma_{\{0,1\}}([0,1]^I)$ dado por $f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$. $\square$

Lema 78. *Sea $(K, \leq)$ un compacto totalmente ordenado. Son equivalentes:*

1. *K es casi totalemente disconexo.*
2. *Existe una familia $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I} \subset K \times K$ tal que*
   a) $a_i < b_i$
   b) *Para cada x en K, el conjunto $\{i \in I : a_i < x < b_i\}$ es numerable.*
   c) *Para todo $x < y$ en K, existe $i \in I$ tal que $x \leq a_i < b_i \leq y$.*

Prueba: Claramente (2) implica (1) porque $F_i =]-\infty, a_i]$ y $H_i = [b_i, +\infty[$ verifican las condiciones del Lema 77. Recíprocamente, supongamos que tenemos una familia $(F_j, H_j)_{j \in J}$ como en el Lema 77. Tomemos como $\{(a_i, b_i)\}_{i \in I}$ el conjunto de todos los pares en $K \times K$ tales que

1. $a_i < b_i$
2. Existe $j(i)$ tal que
   a) $a_i \in F_{j(i)}$ y $b_i \in H_{j(i)}$ o viceversa.
   b) No existe ningún $x \in F_{j(i)} \cup H_{j(i)}$ tal que $a_i < x < b_i$.

El hecho de que $\{i \in I : a_i < x < b_i\}$ es siempre numerable se sigue del hecho de que siempre que $j(i) = j(i')$ e $i \neq i'$, los intervalos $]a_i, b_i[$ y $]a_{i'}, b_{i'}[$ son disjuntos.

Si $x < y$, suponemos que existe algún $j \in J$ tal que $x \in F_j$ e $y \in H_j$. Sean en ese caso $z = \text{máx}\{t \in F_j : t \leq y\}$ y $z' = \text{mín}\{t \in H_j : z \leq t\}$. Entonces, (z, z') es igual a (a_i, b_i) para algún $i \in I$ y $x \leq a_i < b_i \leq y$. $\square$

Prueba del Teorema 75: Sea d una métrica que fragmenta K. Construimos nuestra familia $\{(a_i,b_i)\} \subset K \times K$ del Lema 78 como sigue. En primer lugar, sea $\{(a_i,b_i)\}_{i\in I_0}$ el conjunto de todos los pares de sucesores inmediatos (es decir, todos los $a_i < b_i$ tales que el interval abierto $]a_i,b_i[$ es vacío). Para $n \geq 1$, en virtud del lema de Zorn, podemos elegir una familia $(a_i,b_i)_{i\in I_n}$ maximal para las siguientes propiedades:

1. $a_i < b_i$.
2. El d-diámetro de $]a_i,b_i[$ es menor que $1/n$.
3. $[a_i,b_i] \cap [a_j,b_j] = \emptyset$ para todo par de índices diferentes i, j en I_n.

Tomamos $I = \bigcup_{n=0}^{\infty} I_i$ y $(a_i,b_i)_{i\in I}$ como la familia requerida en el Lema 78. La condición (a) de dicho lema se verifica claramente mientras que la condición (b) se sigue de la propiedad (3) de la definición de I_n. Sólo la condición (c) necesita ser comprobada. Tómese $x < y$ y supongamos que

(A) no existe ningún índice i tal que $x \leq a_i < b_i \leq y$.

Esto implica, por la definición de I_0, que no puede encontrarse ningún par de sucesores inmediatos entre x e y, lo que significa que el intervalo $[x,y]$ es conexo (y por tanto también todos sus subintervalos).

No es posible que para todo n exista $j \in I_n$ tal que $]x,y[\subset]a_j,b_j[$. Esto es porque por la propiedad (2) de I_n, el d-diámetro de $]x,y[$ sería 0, lo que es absurdo. Por tanto,

(B) para cierto $n \in \omega$ fijo, no existe ningún $j \in I_n$ tal que $]x,y[\subset]a_j,b_j[$.

Afirmación 1: Existe $i \in I_n$ tal que o bien $a_i \in]x,y[$ o $b_i \in]x,y[$.

Prueba de la afirmación: Si tal i no existiera, la afirmación (B) nos dice entonces que $]x,y[\cap]a_i,b_i[= \emptyset$ para todo $i \in I_n$. Como d fragmenta K existe un intervalo abierto no vacío $]u,v[\subset]x,y[$ de d-diámetro menor que $\frac{1}{n}$. Podemos suponer (puesto que todos los intervalos son conexos) que incluso $[u,v] \subset]x,y[$ y en ese caso, el par (u,v) podría ser añadido a la familia $\{(a_i,b_i)\}_{i\in I_n}$ lo que contradice su maximalidad.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que existe $i \in I_n$ tal que $a_i \in]x,y[$.

Afirmación 2: Existe $j \in I_n$ tal que $b_j \in]x,a_i[$.

De nuevo, si tal j no existe, entonces $]x,a_i[\cap]a_j,b_j[$ es es vacío para todo $j \in I_n$ y sería posible añadir un par de elementos $u,v \in]x,a_i[$ a la familia $\{(a_j,b_j)\}_{j\in I_n}$ contradiciendo la maximalidad de ésta.

Finalmente, repitiendo el mismo argumento de las dos afirmaciones, encontramos algún $k \in I_n$ tal que $[a_k, b_k] \subset]b_j, a_i[$ y esto es una contradicción con la afirmación (A). $\square$

A continuación damos algunos ejemplos de compactos de Radon-Nikodým totalmente ordenados. Namioka [56] probó que la "línea larga extendida" (*extended long line* en inglés) es un tal ejemplo. Esta línea se construye a partir del intervalo de ordinales $[0, \omega_1]$ añadiendo una copia del intervalo abierto real $(0,1)$ entre cada par de ordinales numerables $\alpha < \alpha + 1$. Este ejemplo puede verse como un caso particular de la siguiente construcción:

Sea $\{S_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos bien ordenados tales que $S_n \subset S_{n+1}$. Supondremos que todos los S_n tienen el mismo mínimo y el mismo máximo. Sea S el conjunto totalmente ordenado $S = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ y sea $\overline{S}$ la compleción de Dedekind de S. Entonces, $\overline{S}$ es un compacto totalmente ordenado y además:

Proposición 79. *El espacio $\overline{S}$ es un compacto de Radon-Nikodým.*

La "línea larga extendida" se obtiene tomando como S_1 el intervalo ordinal $[0, \omega_1]$ y construyendo S_{n+1} añadiendo un punto entre cada dos elementos consecutivos de S_n. Un ejemplo más complicado aparece con el mismo S_1, pero construyendo S_{n+1} añadiendo una copia de $[0, \omega_1]$ entre cada dos elementos consecutivos de S_n. En este caso $\overline{S}$ no contiene ningún abierto metrizable no vacío.

Prueba de la Proposición 79: Para $x, y \in \overline{S}$, $x < y$ definimos:

$$d(x,y) = \frac{1}{\text{mín}\{n :]x,y] \cap S_n \neq \emptyset\}}$$

mientras que $d(x,y) = 0$ si $x = y$, y $d(x,y) = d(y,x)$ si $x > y$. Obsérvese que:

1. Como $\overline{S}$ es la compleción de Dedekind de S, si $x < y$ entonces $S \cap]x,y]$ es no vacío. Esto implica que $d(x,y)$ existe y es un real positivo siempre que $x \neq y$.

2. Una sencilla verificación caso por caso muestra que d satisface la desigualdad triangular $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

3. La métrica d es una métrica de Reznichenko, es decir, cada par de puntos diferentes $x \neq y$ tienen entornos respectivos U y V a d-distancia positiva (lo que significa que $\inf\{d(u,v) : u \in U, v \in V\} > 0$). Efectivamente, si $x < y$ y existe algún $z \in]x,y[$,

entonces $]x,z]\cap S$ es no vacío y existe $u\in S_n\cap]x,z]$ para algún n. Entonces $]-\infty,u[$ y $]u,+\infty[$ son entornos a d-distancia al menos $\frac{1}{n}$. La otra posibilidad es que $]x,y[$ sea vacío. Entonces forzosamente $y\in S$ y por tanto, $y\in S_n$ para algún n. En este caso $(-\infty,y[$ y $]x,+\infty[$ son entornos de x e y a d-distancia al menos $\frac{1}{n}$.

4. La métrica d fragmenta $\overline{S}$. Dado L un subconjunto cerrado de $\overline{S}$ con más de un punto y $n\in\omega$, sea $x=\text{mín}(L)$ e $y=\text{mín}\{z\in S_n : z>x\}$. Entonces, $L\cap(-\infty,y[$ es un abierto relativo no vacío de L de d-diámetro menor que $\frac{1}{n}$.

Por un resultado de Namioka [57], un compacto es de casi Radon-Nikodým si y sólo si está fragmentado por una métrica de Reznichenko. Al ser $\overline{S}$ totalmente ordenado, por el Corolario 76, es un compacto de Radon-Nikodým. □

3.4. Compactos de Radon-Nikodým y la propiedad de Lindelöf

En esta sección, caracterizamos los compactos de Radon-Nikodým y casi Radon-Nikodým en términos de la estructura uniforme del compacto y la propiedad de Lindelöf. Nuestro primer resultado, el Teorema 82, pone en relación el Teorema 80 de Namioka [56] de caracterización de los compactos de Radon-Nikodým en términos de uniformidades, el Teorema 81 de Cascales, Namioka y Orihuela [24] y la estructura uniforme.

Teorema 80 (Namioka). *Un compacto K es de Radon-Nikodým si y sólo si existe una sucesión $\{C_n\}$ de casi entornos de la diagonal cerrados tales que $\bigcap_{n<\omega} C_n=\Delta_K$ y además $C_n\circ C_n\subset C_{n-1}$ para cada n.*

Teorema 81 (Cascales, Namioka, Orihuela). *Sea $K\subset[-1,1]^D$ un compacto. Entonces la métrica uniforme d_D fragmenta K si y sólo si el espacio topológico $(K,\gamma(D))$ es un espacio de Lindelöf, donde la gamma-topología $\gamma(D)$ se define tomando como base de entornos de $x\in K$ los conjuntos de la forma $\{y\in K : |f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon \forall n<\omega\}$ siendo $\varepsilon>0$ y $\{f_n : n<\omega\}$ una familia numerable de elementos de D.*

En la prueba del Teorema 82 puede verse que las familias $\mathscr{U}_n$ vienen dadas como $\mathscr{U}_n=\{U : U\supset C_n\}$ para los C_n del Teorema 80 mientras que la topología descrita en el apartado (5) resulta ser la γ-topología del Teorema 81

Teorema 82. *Sea K un compacto y $\mathscr{U}$ la familia de todos los entornos de la diagonal de K. Entonces, K es un compacto de Radon-Nikodým si y sólo si existe una descomposición $\mathscr{U}=\bigcup_1^\infty \mathscr{U}_n$ tal que:*

1. $\mathscr{U}_n\subset\mathscr{U}_{n+1}$.

2. *Para cada* $U \in \mathscr{U}_n$ *existe* $V \in \mathscr{U}_{n+1}$ *tal que* $V \circ V \subset U$.
3. $U \in \mathscr{U}_n$ *si y sólo si* $U^{-1} \in \mathscr{U}_n$.
4. *Si llamamos* $\mathscr{U}_n^*$ *a la familia de todas las intersecciones numerables de elementos de* $\mathscr{U}_n$*, la estructura uniforme generada por* $\bigcup_{n<\omega} \mathscr{U}_n^*$ *induce una topología Lindelöf en* K.

Prueba: Sea K un compacto de Radon-Nikodým. Entonces, por el Teorema 56, podemos considerar $K \subset [0,1]^D$ y K está fragmentado por la métrica uniforme d_D. Sea $\mathscr{U}_n$ la familia de todos los entornos de la diagonal de K que contienen al conjunto

$$C_n = \{(x,y) : |f(x) - f(y)| \leq 2^{-n} \forall f \in D\}$$

Obsérvese que $U \in \mathscr{U}_n$ si y sólo si existe $\varepsilon > 2^{-n}$ y $f_1, \ldots, f_n \in D$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{(x,y) : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon\} \subset U.$$

Las condiciones (1) y (3) se verifican inmediatamente. Para (2), si $U \in \mathscr{U}_n$ y U contiene $\bigcap_{i=1}^n \{(x,y) : |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon\}$, entonces tomamos

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \{(x,y) : |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\} \subset U.$$

Las familias $\mathscr{U}_n$ tienen las siguientes propiedades adicionales:

5. Si $U \in \mathscr{U}_n$ y $V \supset U$ entonces $V \in \mathscr{U}_n$.
6. Si $U, V \in \mathscr{U}_n$ entonces $U \cap V \in \mathscr{U}_n$.

Estas propiedades, junto con las (1), (2) y (3) del Teorema implican que la familia $\bigcup_{n<\omega} \mathscr{U}_n^*$ que se describe en (5) es de hecho una uniformidad en K. Sea τ la topología asociada a esta uniformidad. En virtud del Teorema 81, K es Lindelöf en la topología $\gamma(D)$. Por tanto, bastará comprobar que cada τ-entorno $\hat{V}$ de un punto $a \in K$ contiene un $\gamma(D)$-entorno de a. Sea $\hat{V}$ de la forma $\hat{V} = V[a] = \{y : (a,y) \in V\}$ siendo $V \in \mathscr{U}_k^*$. Como V es una intersección numerable de elementos de $\mathscr{U}_n$, existe una sucesión f_n en D tal que V contiene al conjunto

$$W = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{(x,y) : |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-k}\}.$$

Entonces,

$$V[a] \supset W[a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y : |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2^{-k}\}$$

que es un $\gamma(D)$-entorno de a.

Supongamos ahora que tenemos $\mathscr{U} = \bigcup_1^\infty \mathscr{U}_n$ y que se verifican las condiciones de (1) a (4) del Teorema. Sea D la familia de todas las aplicaciones continuas $f : K \longrightarrow [0,1]$ tales que para cada natural n existe $V \in \mathscr{U}_{2n}$ tal que $V \subset \{(x,y) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^n}\}$,

$$D = \left\{ f : K \longrightarrow [0,1] \ : \forall n \ \exists V \in \mathscr{U}_{2n} : V \subset \{(x,y) : |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^n}\} \right\}.$$

Probaremos ahora que esta familia separa los puntos de K usando un argumento análogo al de [56, Theorem 6.6]. Sean a,b dos elementos distintos de K. Existe un entorno de la diagonal U de K tal que $(a,b) \notin U$. Supongamos que $U \in \mathscr{U}_{2k}$. Por la condición (2), podemos tomar una sucesión $V_n \in \mathscr{U}_{2(n+k-1)}$ tal que $V_1 = U$ y

$$V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n.$$

Por el Lema de Metrización [44, 6.12], existe una pseudométrica $d : K \times K \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$V_n \subset \{(x,y) : d(x,y) < 2^{-n}\} \subset V_{n+1}$$

Puesto que todos los V_n son entornos de la diagonal de K, esta pseudométrica es continua. Por tanto $f(x) = \frac{d(a,x)}{2^{k-1}}$ es una función continua. Como $(a,b) \notin U = V_1$, $d(a,b) \geq 2^{-1}$ y por tanto $f(b) \neq 0 = f(a)$. Finalmente $f \in D$ porque

$$\begin{aligned} \{(x,y) : |f(x) - f(y)| < 2^{-n}\} &= \{(x,y) : |d(a,x) - d(a,y)| < 2^{k-1-n}\} \supset \\ &\supset \{(x,y) : d(x,y) < 2^{k-1-n}\} \supset V_{n-k+1} \in \mathscr{U}_{2n}. \end{aligned}$$

Como la familia D separa los puntos de K, tenemos una inmersión $K \longrightarrow [0,1]^D$. Por el Teorema 81, para ver que K es un compacto de Radon-Nikodým bastará comprobar que la topología $\gamma(D)$ es Lindelöf. Puesto que nuestro hipótesis nos dice que la topología τ descrita en la condición (4) es Lindelöf, comprobaremos que cada $\gamma(D)$-entorno de un punto $a \in K$ contiene un τ-entorno de a. Si W es un $\gamma(D)$-entorno de $a \in K$, existe una sucesión $f_n \in D$ y algún k tales que

$$W \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y \in K : |f_n(a) - f_n(y)| < \frac{1}{2^k}\}$$

Como cada f_n pertenece a D existe $V_n \in \mathscr{U}_{2n}$ tal que

$$V_n \subset \{(x,y) \in K : |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{1}{2^k}\}$$

Por tanto,

$$W \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} \{y : (a,y) \in V_n\}$$

y el último conjunto es un τ-entorno de a. $\square$

Para establecer un análogo del Teorema 82 para compactos de casi Radon-Nikodým usaremos el siguiente Lema 83, que expresa de nuevo la relación entre fragmentabilidad y la propiedad de Lindelöf esta vez en términos de casi entornos de la diagonal.

Lema 83. *Sea K un compacto y C un subconjunto cerrado de $K \times K$ que contiene a la diagonal. Son equivalentes:*

1. *C es un casi entorno de la diagonal.*
2. *Para cada subconjunto cerrado N de K, si $\{U_t[t]\}_{t\in N}$ es un cubrimiento de N tal que cada U_t es una intersección numerable de entornos de la diagonal que contienen a C, entonces dicho cubrimiento de N tiene un subcubrimiento numerable.*

Es más, $1 \Rightarrow 2$ *es cierta incluso si C no es cerrado.*

Prueba: Para $1 \Rightarrow 2$, sea $\{U_t[t]\}_{t\in N}$ un tal cubrimiento de $N \subset K$. Consideremos W el conjunto de todos los $z \in N$ para los que existe un entorno U de z en N tal que U puede ser cubierto por una subfamilia numerable del cubrimiento dado. Como N es compacto, es suficiente probar que $N = W$. Supongamos, por contra, que $L = N \setminus W \neq \emptyset$. Entonces, al ser C un casi entorno de la diagonal, existe un abierto relativo no vacío V de L tal que $V \times V \subset C$. Escogemos $x \in V$. Tenemos que

$$x \in V \subset C[x] \subset U_x[x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_x^n[x]$$

siendo cada U_x^n un entorno de la diagonal de K que contiene a C y $U_x^{n+1} \subset U_x^n$. Sea $\hat{V}$ un abierto de N tal que $\hat{V} \cap L = V$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\hat{V}$ es un conjunto F_σ, es decir, una unión numerable de cerrados (si no lo fuera, tomamos un abierto F_σ, $\hat{V}'$, tal que $x \in \hat{V}' \subset \hat{V}$ y cambiamos $\hat{V}$ por $\hat{V}'$ y V por $\hat{V}' \cap L$). Sea pues $\hat{V} = \bigcup_1^\infty T_n$ con cada T_n compacto y $T_n \subset T_{n+1}$. Por la definición de W, para cada $z \in W$ existe un entorno abierto V_z de z en N que puede ser cubierto por una cantidad numerable de los $U_t[t]$. Para cada n, tenemos

$$T_n \subset (T_n \cap W) \cup V \subset \left(\bigcup_{z\in T_n \cap W} V_z \right) \cup U_x^n[x].$$

Como T_n es compacto, existe una subfamilia finita $F_n \subset T_n \cap W$ tal que

$$T_n \subset \left(\bigcup_{z\in F_n} V_z \right) \cup U_x^n[x].$$

Obsérvese ahora que si $s \in \hat{V} \setminus U_x[x]$ entonces $s \in T_n$ y $s \notin U_x^n[x]$ para n suficientemente grande, y para algún n, $s \in V_z$ con $z \in F_n$. Por lo tanto,

$$\hat{V} \subset U_x[x] \cup \bigcup_{z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n} V_z$$

Esto implica que $\hat{V}$ puede ser cubierto por una cantidad numerable de los $U_t[t]$ y por consiguiente $x \in W$, lo que constituye una contradicción.

Para $2 \Rightarrow 1$, supongamos que C no fuese un casi entorno de la diagonal. Entonces, existe un subconjunto cerrado L de K tal que para cualquier abierto relativo no vacío U de L existen $x, y \in U$ tales que $(x, y) \notin C$. Construimos recursivamente una familia $\{U_s\}_{s \in 2^{(\mathbb{N})}}$ de abiertos relativos no vacíos de L y una familia $\{W_s\}_{s \in 2^{(\mathbb{N})}}$ de entornos de la diagonal que contienen a C verificando lo siguiente:

1. $\overline{U}_{s0} \cup \overline{U}_{s1} \subset U_s$.
2. $\overline{U}_{s0} \cap \overline{U}_{s1} = \emptyset$. Es más, $(\overline{U}_{s0} \times \overline{U}_{s1}) \cap W_s = \emptyset$.

Empezamos definiendo $U_\emptyset = L$. Dado U_s, encontramos $x, y \in U_s$ tales que $(x, y) \notin C$. Al ser C cerrado, podemos encontrar entornos abiertos en L, U_{s0} y U_{s1} de x e y respectivamente satisfaciendo (1) y $(\overline{U}_{s0} \times \overline{U}_{s1}) \cap W_s = \emptyset$. De nuevo por ser C cerrado, existe un entorno de la diagonal W_s que contiene a C y verifica (2). Esto finaliza la construcción. Consideramos ahora el conjunto $W = \bigcap_{s \in 2^{(\mathbb{N})}} W_s$ y

$$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{|s|=n} \overline{U}_s$$

Entonces, $\{W[t]\}_{t \in N}$ es un cubrimiento de N que no admite ningún subcubrimiento numerable. Efectivamente, si $u_1, u_2 \in 2^{\mathbb{N}}$ son diferentes y $x_i \in \bigcap_n \overline{U}_{u_i|_n}$, entonces $x_i \notin W[x_{1-i}]$. Por tanto, si $A \subset L$ es tal que $\{W[x]\}_{x \in A}$ cubre N entonces, para cada $u \in 2^{\mathbb{N}}$ debe existir $x \in \bigcap_n \overline{U}_{u|_n} \cap A$ y en consecuencia, A no es numerable. $\square$

Teorema 84. *Sea K un compacto y sea $\mathscr{U}$ la familia de todos los entornos de la diagonal de K. Entonces, K es un compacto de casi Radon-Nikodým si y sólo si $\mathscr{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{U}_n$ verificándose las siguientes condiciones:*

1. *$\mathscr{U}_n \subset \mathscr{U}_{n+1}$.*
2. *$U \in \mathscr{U}_n$ si y sólo si $U^{-1} \in \mathscr{U}_n$.*
3. *Sea $\mathscr{U}_n^*$ la familia de todas las intersecciones numerables de elementos de $\mathscr{U}_n$. Entonces, para cualquier subconjunto cerrado N de K, todo cubrimiento de N de la forma $\{U_t[t]\}_{t \in N}$ con $U_t \in \bigcup_n \mathscr{U}_n^*$ tiene un subcubrimiento numerable.*

Prueba: Sea d una casi métrica inferiormente semicontinua que fragmente K y sea

$$C_n = \{(x,y) : d(x,y) \leq 2^{-n}\},$$

$$\mathscr{U}_n = \{U \in \mathscr{U} : C_n \subset U\}.$$

En primer lugar, comprobamos que $\mathscr{U} = \bigcup_n \mathscr{U}_n$. Si $U \in \mathscr{U} \setminus \bigcup_n \mathscr{U}_n$, entonces $\{C_n \setminus U\}_n$ es una sucesión decreciente de subconjuntos compactos no vacíos de $K \times K$, que tiene por tanto intersección no vacía, lo que contradice el hecho de que U contiene a la diagonal y y la diagonal es la intersección de todos los C_n. Comprobamos ahora la condición (3). Sea $\{U_t[t]\}_{t\in N}$ un cubrimiento de $N \subset K$ como en (3). Sea W el conjunto de todos los $z \in N$ tales que existe un entorno V_z de z en N contenido en una subfamilia numerable de los $U_t[t]$. Al ser N compacto, basta ver que $W = K$. Supongamos por contra que $L = N \setminus W \neq \emptyset$. Como K está fragmentado por d y L es compacto, existe un punto $y \in L$ que posee entornos relativos en L de d-diámetro arbitrariamente pequeño (el conjunto L_n de los puntos que tienen entornos de diámetro menor que $\frac{1}{n}$ es un abierto denso de L así que por el Teorema de la Categoría de Baire, existe $y \in \bigcap_n L_n$). Para cierto m, $U_y = \bigcap_k U_y^k$ con $U_y^k \in \mathscr{U}_m^*$, lo que significa que $C_m \subset U_y^k$. Existe un entorno relativo de y en L de d-diámetro menor que 2^{-m}. En otras palabras, existe un abierto relativo V de N tal que $V \cap L \subset C_m[y]$. Como en la prueba del Lema 83, podemos suponer que V es un conjunto F_σ de modo que

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k.$$

Para cada $z \in W$ existe un entorno V_z de z en N que está contenido en una subfamilia numerable de los $U_t[t]$. Para cada k,

$$T_k \subset (V \cap L) \cup \bigcup_{z \in V\setminus L} V_z \subset C_m[y] \cup \bigcup_{z \in V\setminus L} V_z \subset U_y^k[y] \cup \bigcup_{z \in V\setminus L} V_z.$$

Como T_k es compacto existe una subfamilia finita $F_k \subset V \setminus L$ tal que

$$T_k \subset U_y^k[y] \cup \bigcup_{z\in F_k} V_z.$$

Ahora,

$$V \subset \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_y^k[y] \right) \cup \bigcup_{z \in \bigcup F_k} V_z$$

y esto implica que $y \in V$ pertenece a W, lo que es absurdo.

Pasamos a probar el recíproco. No es restrictivo suponer que se cumplen las dos siguientes condiciones adicionales:

4. Si $U,V \in \mathscr{U}_n$, entonces $U \cap V \in \mathscr{U}_n$.
5. Si $U \in \mathscr{U}_n$ y $U \subset V$, entonces $V \in \mathscr{U}_n$.

Sea $C_n = \bigcap_{U\in\mathscr{U}_n} \overline{U}$. En primer lugar, comprobamos que $\mathscr{U}_n = \{U \in \mathscr{U} : C_n \subset U\}$. Efectivamente, si $C_n \subset V$, entonces $\bigcap_{U\in\mathscr{U}_n}(\overline{U} \setminus V) = \emptyset$. Por compacidad, existen entonces $U_1,\dots,U_k \in \mathscr{U}_n$ tales que $\bigcap_{i=1}^k(\overline{U_i} \setminus V) = \emptyset$ y así $\bigcap_{i=1}^k U_i \subset \bigcap_{i=1}^k \overline{U}_i \subset V$ y por las propiedades (4) y (5), tenemos que $V \in \mathscr{U}_n$. Por el Lema 83, cada C_n es un casi entorno cerrado de la diagonal y por la propiedad (1), $\bigcap C_n = \Delta_K$. En consecuencia, K es un compacto de casi Radon-Nikodým. $\square$

Capítulo 4

Renormamiento en duales de espacios que no contienen a ℓ_1

4.1. Propiedades generales de los espacios de James sobre árboles

En esta sección definiremos los espacios JT y enunciaremos las propiedades de los mismos que necesitaremos. Recordamos que un árbol es un conjunto parcialmente ordenado $(T,\prec)$ tal que para cada $t \in T$ el conjunto $\{s \in T : s \prec t\}$ está bien ordenado por $\prec$. Una cadena es un subconjunto de T que está totalmente ordenado por $\prec$ y un segmento es una cadena σ con la propiedad de que siempre que $s \prec t \prec u$ y $s,u \in \sigma$ entonces $t \in \sigma$. Para un árbol T el espacio de James JT es la compleción de $c_{00}(T) = \{f \in \mathbb{R}^T : |supp(f)| < \omega\}$ con la norma

$$\|f\| = \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t\in\sigma_i} f(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las familias finitas de segmentos disjuntos $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ del árbol T. El espacio JT es ℓ_2-saturado, es decir, cada subespacio contiene una copia de ℓ_2 y en particular, JT no contiene a ℓ_1, cf. [39], [3], [41].

Un elemento $h^* \in \mathbb{R}^T$ induce una aplicación lineal $c_{00}(T) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h^*(x) = \sum_{t\in T} h^*(t)x(t)$. Cuando tal aplicación es acotada para la norma de JT, entonces h^* define un elemento del dual JT^*. Este es el caso cuando h^* es la función característica de un segmento σ del árbol, χ^*_σ, en cuyo caso se tiene de hecho $\|\chi^*_\sigma\| = 1$. Efectivamente, si tomamos un elemento $x \in c_{00}(T)$ de norma menor o igual que uno tendremos, tomando solamente el segmento σ en la defínción de la norma de JT, que $|\sum_{i\in\sigma} x(i)| \leq 1$, y ésta es la acción de χ^*_σ sobre x.

Proposición 85. *Si $t_1,\dots,t_n$ son nodos incomparables del árbol T y tenemos $f_1,\dots,f_n \in c_{00}(T)$ tales que todos los elementos en el soporte de f_i son mayores o iguales que t_i, abreviadamente $|f_i| \leq \chi_{[t_i,\infty)}$, entonces*

$$\|f_1+\cdots+f_n\| = \left(\|f_1\|^2+\cdots+\|f_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Prueba: Cada segmento del árbol T sólo puede intersecar a lo sumo a uno de los segmentos $[t_i,\infty)$, asíque el conjunto cuyo supremo da la norma de $f_1+\cdots+f_n$ consiste exactamente en los números de la forma $\left(\sum_1^n \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ donde cada λ_i es uno de los números cuyo supremo da la norma de f_i. $\square$

Recordar que una anticadena es un subconjunto S de T tal que cada dos elementos diferentes de S son incomparables.

Definición 86. *Sea S una anticadena del árbol T. Definimos X_S como el subespacio de JT generado por los $x \in c_{00}(T)$ cuyo soporte está contenido en $[s,\infty)$ para algún $s \in S$. Para un elemento $t \in T$, denotamos $X_t = X_{\{t\}}$.*

Las propiedades de los subespacios X_S son las siguientes:

1. $X_S = (\bigoplus_{s\in S} X_s)_{\ell_2}$. Esto es consecuencia inmediata de la Proposición 85.

2. X_S es un subespacio complementado de JT, de hecho existe una retracción de norma uno para la inclusión $\pi_S : JT \longrightarrow X_S$ que se define para un elemento $x \in c_{00}(T)$ como $\pi_S(x)_t = x_t$ si $t \succeq s$ para algún $s \in S$ y $\pi_S(x)_t = 0$ en otro caso. En primer lugar, π_S reduce la norma porque si tenemos una familia de segmentos dándonos una suma para calcular la norma de $\pi_S(x)$, entonces podemos suponer que cada segmento está contenido en algún $[s,\infty)$ para $s \in S$, y entonces, los mismos segmentos dan una de las sumas cuyo supremo da la norma de x. En segundo lugar, es claro que $\pi_S(x) = x$ si $x \in X_S$.

3. Dualizando el embebimiento isométrico $i_S : X_S \longrightarrow JT$ y su retracción de norma uno $\pi_S : JT \longrightarrow X_S$ tenemos un embebimiento isométrico $\pi_S^* : X_S^* \longrightarrow JT^*$ con retracción de norma uno $i_S^* : JT^* \longrightarrow X_S^*$. De esta forma vemos X_S^* como un subespacio complementado de JT^* consistente en todos los elementos de X_S^* que toman el mismo valor en x y en $\pi_S(x)$ para cada $x \in JT$ (en particular, $\chi_{[t,u)}^* \in X_s^*$ siempre que $s \preceq t$). Dualizando (1), obtenemos

$$X_S^* = \left(\bigoplus_{s\in S} X_s^*\right)_{\ell_2}$$

4. Dualizando de nuevo, tenemos un embebimiento isométrico $i_S^{**} : X_S^{**} \longrightarrow JT^{**}$ y su retracción $\pi_S^{**} : JT^{**} \longrightarrow X_S^{**}$. Además

$$X_S^{**} = \left(\bigoplus_{s \in S} X_s^{**} \right)_{\ell_2}$$

4.2. Cuando JT es débilmente compactamente generado

En esta sección analizamos el caso en que JT es débilmente compactamente generado. Esta propiedad se caracteriza en términos del árbol T tal y como muestra el siguiente resultado que puede encontrarse en [4]:

Teorema 87. *Para un árbol T son equivalentes*

1. *JT es débilmente compactamente generado.*
2. *JT es débilmente numerablemente determinado.*
3. *T es unión de una cantidad numerable de anticadenas.*
4. *$T = \bigcup_{n<\omega} S_n$ donde para cada $n < \omega$, S_n no contiene ninguna cadena infinta.*

Prueba: Que (1) implica (2) es cierto para cualquier espacio de Banach (recordar que $\ell\Sigma(X) \leq CG(X)$). Para (2) implica (3) sea

$$K_T = \{\chi_\sigma^* : \sigma \text{ segmento de } T\} \subset JT^*,$$

K_T es un subconjunto débil* cerrado de B_{JT^*}, por tanto débil* compacto. Al ser JT débilmente numerablemente determinado, (K_T, w^*) es un compacto de Gul'ko que podemos ver como el compacto $K_T \subset \{0,1\}^T$ asociado a la familia adecuada de los segmentos de T. Un resultado de Leiderman y Sokolov [48, Theorem 4.2] afirma que si el compacto de los segmentos de un árbol T es un compacto de Gul'ko entonces T es unión numerable de anticadenas. Que (3) implica (4) es evidente, así que supongamos finalmente que se verifica (4). Entonces para cada $n, m < \omega$ el conjunto $\{s \in S_n : |\{t \prec s : t \in S_n\}$ es una anticadena de T, así pues cada uno de los conjuntos $\{\chi_{\{s\}} : s \in S_{n,m}\}$ es isométrico a la base de $\ell_2(S_{n,m})$ y en consecuencia $K_{n,m} = \{\chi_{\{s\}} : s \in S_{n,m}\}$ es un débil compacto de JT. Como $T = \bigcup_{n,m<\omega} S_{n,m}$, tenemos que $JT = \overline{span}(\bigcup_{n,m<\omega} K_{n,m})$ y JT es débilmente compactamente generado. $\square$

Mencionamos que un árbol es unión de una cantidad numerable de anticadenas si y sólo si es $\mathbb{Q}$-sumergible, es decir, existe una aplicación $\psi : T \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que $\psi(s) < \psi(t)$ siempre que $s \prec t$, cf. [70, Theorem 9.1]. Denotaremos por $\overline{T}$ el árbol completado de T, árbol cuyos nodos son los segmentos iniciales de T (es decir, los segmentos σ de T con la propiedad de que siempre que $s \prec t$ y $t \in \sigma$ entonces $s \in \sigma$) ordenados por inclusión. Ocurre que para un árbol T que satisface las condiciones del Teorema 87, las propiedades de renormamiento JT^* dependen de si el árbol completado $\overline{T}$ sigue siendo unión numerable de anticadenas.

Teorema 88. *Sea T un árbol que es unión numerable de anticadenas. Son equivalentes:*

1. *$\overline{T}$ es también unión numerable de anticadenas.*
2. *JT^* admite una norma equivalente Kadec.*
3. *JT^* admite una norma equivalente LUR.*

El dual de cada espacio débilmente compactamente generado admite siempre una norma equivalente estrictamente convexa puesto que, por el Teorema de Amir-Lindenstrauss existe un operador uno a uno a $c_0(\Gamma)$. Por lo tanto, el que (2) y (3) son equivalentes es consecuencia del resultado de Troyanski mencionado en la introducción a esta sección. Por otra parte es un resultado de [21] el que para un árbol T, JT^{**} es isométrico a $J\overline{T}$. Por tanto, si se verifica (1), entonces JT^{**} es débilmente compactamente generado y se sigue entonces de la siguiente Proposición 89 que JT^* admite una norma equivalente LUR:

Proposición 89. *Si X es un espacio de Banach tal que X^* es débilmente numerablemente determinado, entonces X admite una norma equivalente LUR.*

Prueba: Ver [28, Theorem VII.2.7]. $\square$

Nuestro objetivo en lo que sigue es probar que (2) implica (1) pero antes damos un ejemplo de un árbol T_0 que es unión numerable de anticadenas pero cuyo completado $\overline{T_0}$ no lo es, de tal modo que por el Teorema 88 JT_0 es un espacio débilmente compactamente generado que no contiene a ℓ_1 y tal que JT_0^* no admite renormamiento Kadec. El ejemplo es el siguiente:

$$T_0 = \sigma'\mathbb{Q} = \{t \subset \mathbb{Q} : (t, <) \text{ es bien ordenado y } \max(t) \text{ existe}\},$$

donde $t \prec s$ si t es un segmento incial propio de s. Para cada número racional $q \in \mathbb{Q}$, el conjunto $S_q = \{t \in T_0 : \max(t) = q\}$ es una anticadena de T_0 y $T_0 = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} S_q$. El árbol completado $\overline{T_0}$ puede identificarse con el siguiente árbol:

$$T_1 = \sigma\mathbb{Q} = \{t \subset \mathbb{Q} : (t, <) \text{ está bien ordenado}\},$$

la identificación hace corresponder $t \in T_1$ con el segmento inicial $\{t' \in T_0 : t' \prec t\}$ de T_0. El hecho de que T_1 no es unión numerable de anticadenas es un resultado bien conocido debido a Kurepa [47], cf. también [70]. La razón es la siguiente: supongamos que existe $f : T_1 \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f^{-1}(n)$ es una anticadena. Entonces puede construirse recursivamente una sucesión $t_1 \prec t_2 \prec \cdots$ dentro de T_1 y una sucesión de números racionales $q_1 > q_2 > \cdots$ tales que $q_i > \sup(t_i)$ y $f(t_{n+1}) = \min\{f(t) : t_n \prec t, \sup(t) < q_n\}$. La consideración del elemento $t_\omega = \bigcup_{n<\omega} t_n$ lleva a una contradicción.

Lema 90. *Sea T un árbol cualquiera y supongamos que existe una norma equivalente Kadec en JT^*, entonces existen*

(a) una partición numerable de $\overline{T}$, $\overline{T} = \bigcup_{n<\omega} T_n$ y

(b) una función $F : \overline{T} \longrightarrow 2^T$ que asocia a cada segmento inicial $\sigma \in \overline{T}$ un conjunto finito $F(\sigma)$ de sucesores inmediatos de σ,

tal que para cada $n < \omega$ y cada cadena infinita $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \cdots$ contenida en T_n existe $k_0 < \omega$ tal que $F(\sigma_k) \cap \sigma_{k+1} \neq \emptyset$ para cada $k > k_0$.

Prueba: Sea $|||\cdot|||$ una norma equivalente Kadec en JT^*.

Afirmación: Para cada $\sigma \in \overline{T}$ existe un número natural $n_\sigma < \omega$ y un conjunto finito $F(\sigma) \subset T$ de sucesores inmediatos de σ tal que $\big|\, |||\chi^*_\sigma||| - |||\chi^*_{\sigma'}|||\, \big| \geq \frac{1}{n_\sigma}$ para cada $\sigma' \in \overline{T}$ tal que $\sigma \prec \sigma'$ y $F(\sigma) \cap \sigma' = \emptyset$.

Prueba de la afirmación: Supongamos que existe $\sigma \in \overline{T}$ que no verifica la afirmación. Entonces podemos encontrar recursivamente una sucesión $\{q_n\}$ de sucesores inmediatos diferentes de σ junto con una sucesión $\{\sigma_n\}$ de elementos de $\overline{T}$ tales que $\sigma \cup \{q_n\} \preceq \sigma_n$ y

$$\big|\, |||\chi^*_\sigma||| - |||\chi^*_{\sigma_n}|||\, \big| < \frac{1}{n}.$$

Ahora, $\{\sigma'_n = \sigma_n \setminus \sigma\}$ es una sucesión de segmentos incomparables de T, asíque la sucesión $\{\chi^*_{\sigma'_n}\}$ es isométrica a la base de ℓ_2 y en particular converge débilmente hacia 0. Por tanto la sucesión $\chi^*_{\sigma_n} = \chi^*_\sigma + \chi^*_{\sigma'_n}$ converge débilmente hacia χ^*_σ, sin embargo no converge en norma ya que $\|\chi^*_{\sigma'_n}\| = 1$ para cada n. Finalmente, como $|||\chi^*_{\sigma_n}|||$ converge hacia $|||\chi^*_\sigma|||$ obtenemos, normalizando, una contradicción con el hecho de que $|||\cdot|||$ es una norma de Kadec.

La afirmación anterior nos proporciona la función F y la descomposición numerable $T_n = \{\sigma \in \overline{T} : n_\sigma = n\}$, $n < \omega$. Supongamos que tenemos una sucesión creciente $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \cdots$ dentro de T_n. Observamos que siempre que $F(\sigma_k) \cap \sigma_{k+1} = \emptyset$ tenemos que $\Big|\, |||\chi^*_{\sigma_k}||| - |||\chi^*_{\sigma_{k'}}|||\, \Big| \geq \frac{1}{n}$ para todo $k' > k$. Esto sólo puede ocurrir para una cantidad finita de k's puesto que $|||\cdot|||$ es una norma equivalente por lo que está acotada sobre la esfera de JT^*. $\square$

Suponemos ahora que T es unión numerable de anticadenas, $T = \bigcup_{m<\omega} R_m$, y que verifica la conclusión del Lema 90 para una descomposición $\overline{T} = \bigcup_{n<\omega} T_n$ y una función F, y mostraremos que en tal caso $\overline{T}$ es unión numerable de anticadenas. Para cada $n < \omega$

y cada conjunto finito A de números naturales consideramos el conjunto

$$S_{n,A} = \left\{ \sigma \in \overline{T} : \sigma \in T_n \text{ y } F(\sigma) \subset \bigcup_{m \in A} R_m \right\}$$

Esto proporciona una expresión de $\overline{T}$ como unión numerable $\overline{T} = \bigcup_{n,A} S_{n,A}$. Comprobamos que esta expresión verifica la condición (4) del Teorema 87. Supongamos que por contra tenemos una cadena infinita $\sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \cdots$ dentro de un $S_{n,A}$ fijado. Como $S_{n,A} \subset T_n$ existe k_0 tal que $F(\sigma_k) \cap \sigma_{k+1} \neq \emptyset$ para cada $k > k_0$, pongamos $t_k \in F(\sigma_k) \cap \sigma_{k+1} \subset \bigcup_{m \in A} R_m$. Entonces $t_1 \prec t_2 \prec \cdots$ es una cadena infinita de T contenida en $\bigcup_{m \in A} R_m$ que es unión finita de anticadenas. Esta contradicción finaliza la prueba del Teorema 88.

4.3. Espacios JT^* sin norma estrictamente convexa ni Kadec

En esta sección damos un criterio sobre un árbol T para que JT^* no admita ni renormamiento Kadec ni renormamiento estrictamente convexo. Definimos la clausura inferior de un subconjunto S de un árbol T como

$$\hat{S} = \{t \in T : \exists s \in S : t \preceq s\}.$$

Teorema 91. *Sea T un árbol verificando las siguietes condiciones:*

(T1) Todo nodo de T tiene una cantidad infinita de sucesores inmediatos.

(T2) Para cada familia numerable de anticadenas $\{S_n : n < \omega\}$ existe $t \in T$ tal que $t \notin \bigcup_{n<\omega} \hat{S}_n$.

Entonces no existe ni una norma equivalente estrictamente convexa ni una norma equivalente Kadec en JT^*.

Un ejemplo de un árbol que satisface las propiedades (T1) y (T2) es el árbol cuyos nodos son los subconjuntos numerables de ω_1 con $s \prec t$ si s es un segmento inicial de t (la propiedad (T2) se demuestra construyendo una sucesión $t_1 \prec t_2 \prec \cdots$ con $t_i \notin \hat{S}_i$ y tomando $t \succ \bigcup t_i$). Un refinamiento de esta construcción debido a Todorčević [70] produce un árbol con la propiedad adicional de que todas las ramas son numerables, y esto implica que el correspondiente JT es débilmente Lindelöf determinado (ver[2]). Discutimos este ejemplo en detalle en la Sección 4.4.

Suponemos ahora que T satisface (T1) y (T2), fijamos una norma equivalente $|||\cdot|||$ en JT^* y veremos que esta norma no es ni estrictamente convexa ni de Kadec.

Lema 92. *Para cada nodo $t \in T$ y cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar otro nodo $s \succ t$ y un elemento $x_s^{**} \in JT^{**}$ con $|||x_s^{**}|||^* = 1$ tal que*

1. $\left|\sup\{|||\chi^*_{[0,u]}||| : u \succeq s\} - |||\chi^*_{[0,s]}|||\right| < \varepsilon$.
2. $x^{**}_s(\chi^*_{[0,u]}) \geq |||\chi^*_{[0,s]}||| - \varepsilon$ *siempre que* $s \prec u$.

Prueba: En primer lugar tomamos un nodo $t' \succ t$ tal que

$$\left|\sup\{|||\chi^*_{[0,u]}||| : u \succeq t\} - |||\chi^*_{[0,t']}|||\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y encontramos $x^{**} \in JT^{**}$ con $|||x^{**}_s|||^* = 1$ tal que $x^{**}(\chi_{[0,t']}) = |||\chi^*_{[0,t']}|||$. Consideramos el conjunto S de todos los sucesores inmediatos de t' en el árbol T, que constituye una anticadena infinita. Podemos considerar entonces la proyección

$$\pi^{**}_S : JT^{**} \longrightarrow X^{**}_S = \left(\bigoplus_{s\in S} X^{**}_s\right)_{\ell_2}$$

Como S es infinito, debe existir $s \in S$ tal que $\|\pi^{**}_s(x^{**})\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Los elementos $s \in T$ y $x^{**}_s = x^{**}$ son los deseados. Efectivamente, para cada $u \succeq s$,

$$x^{**}(\chi^*_{[0,u]}) = x^{**}(\chi^*_{[0,t']}) + x^{**}(\chi^*_{[s,u]}),$$

y $\chi^*_{[s,u]} \in X^*_s$, asíque $\pi^*_s(\chi^*_{[s,u]}) = \chi^*_{[s,u]}$ y

$$\begin{aligned}
x^{**}(\chi^*_{[0,u]}) &= x^{**}(\chi^*_{[0,t']}) + x^{**}(\chi^*_{[s,u]}) \\
&= x^{**}(\chi^*_{[0,t']}) + x^{**}(\pi^*_s(\chi^*_{[s,u]})) \\
&= x^{**}(\chi^*_{[0,t']}) + \pi^{**}_s(x^{**})(\chi^*_{[s,u]}) \\
&\geq x^{**}(\chi^*_{[0,t']}) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&= |||\chi^*_{[0,t']}||| - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq |||\chi^*_{[0,s]}||| - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto garantiza en particular que $|||\chi^*_{[0,s]}||| \geq x^{**}(\chi^*_{[0,s]}) \geq |||\chi^*_{[0,t']}||| - \frac{\varepsilon}{2}$. Eso junto con la propiedad que se sigue de la elección inicial de t' da también la propiedad (1) en el lema y finaliza la prueba. $\square$

Construimos recursivamente, usando el Lemma 92, una sucesión de anticadenas maximales de T, $\{S_n : n < \omega\}$ crecientes (es decir, tales que para cada $t \in S_{n+1}$, existe $s \in S_n$ con $s \prec t$) y tal que para cada $n < \omega$ y para cada $s \in S_n$ existe un elemento $x^{**}_s \in JT^{**}$ con $|||x^{**}_s|||^* = 1$ tal que

1. $\left|\sup\{|||\chi^*_{[0,u]}|||: u \succ s\} - |||\chi^*_{[0,s]}|||\right| < \frac{1}{n}$.
2. $x_s^{**}(\chi^*_{[0,u]}) = x_s^{**}(\chi^*_{[0,s]}) \geq |||\chi^*_{[0,s]}||| - \frac{1}{n}$ siempre que $s \prec u$.

Ahora, por la propiedad (T2), podemos escoger $t \in T \setminus \bigcup_{n<\omega} S_n$. Podemos encontrar para t una sucesión $s_1 \prec s_2 \prec \cdots \prec t$ con $s_n \in S_n$.

Para cada $t' \succeq t$ y cada $n < \omega$,

$$|||\chi^*_{[0,s_n]}||| - \frac{1}{n} \leq x_{s_n}^{**}(\chi^*_{[0,t']}) \leq |||\chi^*_{[0,t']}||| \leq \sup_{u \succeq s_n} |||\chi^*_{[0,u]}||| \leq |||\chi^*_{[0,s_n]}||| + \frac{1}{n}.$$

Esto implica que todos los succesores de t tienen la misma norma $|||\cdot|||$ igual al límite de las normas $|||\chi^*_{[0,s_n]}|||$. Si tomamos t_1 y t_2 dos sucesores inmediatos diferentes de t, tendremós además para cada $n < \omega$

$$|||\frac{\chi^*_{[0,t_1]} + \chi^*_{[0,t_2]}}{2}||| \geq x_{s_n}^{**}\left(\frac{\chi^*_{[0,t_1]} + \chi^*_{[0,t_2]}}{2}\right) \geq |||\chi^*_{[0,s_n]}||| - \frac{1}{n}$$

y pasando al límite

$$|||\frac{\chi^*_{[0,t_1]} + \chi^*_{[0,t_2]}}{2}||| \geq |||\chi^*_{[0,t_1]}||| = |||\chi^*_{[0,t_2]}|||$$

lo que muestra que $|||\cdot|||$ no es estrictamente convexa.

Si ahora tomamos una sucesión de sucesores inmediatos diferentes de t, $\{t_n : n < \omega\}$, entonces cada $\chi^*_{\{t_n\}}$ es un elemento de norma uno de $X^*_{t_n}$ y como

$$X^*_{\{t_n : n<\omega\}} = \left(\bigoplus_{n<\omega} X^*_{t_n}\right)_{\ell_2}$$

la sucesión $(\chi^*_{\{t_n\}} : n < \omega)$ es isométric a la base de ℓ_2 y en particular converge débilmente hacia 0. En consecuencia, $\chi^*_{[0,t_n]}$ es una sucesión en una esfera que converge débilmente hacia $\chi^*_{[0,t]}$ que está en la misma esfera. Sin embargo $\|\chi^*_{[0,t_n]} - \chi^*_{[0,t]}\| = \|\chi^*_{[t_n,t_n]}\| = 1$ luega esta sucesión no converge en norma. Esto muestra que $|||\cdot|||$ no es una norma Kadec.

4.4. Sobre un árbol de Todorčević

Comenzamos justificando por qué un árbol con ramas numerables da lugar a un espacio de James débilmente Lindelöf determinado.

Proposición 93. *Sea T un árbol tal que toda cadena es numerable. Entonces JT es un espacio débilmente numerablemente determinado.*

Prueba: consideramos la aplicación $F : JT^* \longrightarrow \mathbb{R}^T$ dada por $F(x^*) = (x^*(\chi_{\{t\}}))_{t\in T}$ que es débil*-a-puntualmente continua. Para ver que (B_{JT^*}, w^*) es un compacto de Corson bastará comprobar que $F(x^*)$ tiene sólo una cantidad numerable de coordenadas no nulas para cada $x^* \in JT^*$. Supongamos que no fuese así y que existieran $\varepsilon > 0$ y $x^* \in JT^*$ tales que el conjunto $A = \{t \in T : x^*(t) > \varepsilon\}$ fuese no numerable. Por un principio combinatorio conocido com Teorema de Dushnik y Miller [30, Theorem 44], un subconjunto no numerable de un árbol ha de contener o bien una cadena no numerable, o bien una anticadena infinita. La primera posibilidad no puede darse por nuestra hipótesis sobre el árbol T y la segunda tampoco porque si $\{x_n : n < \omega\}$ es una anticadena infinita de T, entonces la sucesión $(\chi_{x_n})_{n<\omega}$ converge débilmente hacia 0 en JT y sin embargo $x^*(\chi_{x_n}) > \varepsilon$ para todo $n < \omega$ cuando $x_n \in A$. $\square$

En lo que sigue presentamos un ejemplo de un árbol, debido a Todorčević [70], que verifica las hipótesis del Teorema 91 y además todas sus cadenas son numerables, de modo que el corresopondiente espacio JT es un espacio débilmente Lindelöf determinado tal que JT^* no admite normas equivalentes ni Kadec ni estrictamente convexas. La demostración del Teorema 95 que aparece en [70] está basada en herramientas de lógica, mientras que la que presentamos aquí es elemental.

Un subconjunto A de ω_1 se dice estacionario si la intersección de A con cada subconjunto cerrado y no acotado de ω_1 es no vacía. Fijamos un conjunto A tal que tanto A como $\omega_1 \setminus A$ son estacionarios. La existencia de tales conjuntos se sigue de un resultado de Ulam [45, Theorem 3.2].

Definición 94 (Todorčević). *Llamaremos T al árbol cuyos nodos son los subconjuntos cerrados de ω_1 que están contenidos en A ordenados de tal forma que $s \prec t$ si s es un segmento inicial de t.*

El árbol T tiene la propiedad (T1) del Teorema 91 porque si $t \in T$ y $\eta \in A$ verifica que $\eta > \text{máx}(t)$, entonces $t \cup \{\gamma\}$ es un sucesor inmediato de t en T. Por otra parte, T no contiene ninguna cadena no numerable. Si $\{t_i\}_{i<\omega_1}$ fuese una cadena no numerable, entonces $\bigcup_{i<\omega_1} t_i$ es un subconjunto cerrado y no acotado de ω_1, por lo que debería inersecar a $\omega_1 \setminus A$, lo que es imposible. La dificultad estriba en probar que T verifica la propiedad (T2) del Teorema 91.

Teorema 95 (Todorčević). *Para cualquier familia numerable de anticadenas del árbol T, $\{S_n : n < \omega\}$, existe $t \in T$ tal que $t \notin \bigcup_{n<\omega} \hat{S}_n$.*

Prueba: Supongamos por reducción al absurdo que $\{S_n : n < \omega\}$ es una familia de anticadenas de T que no satisface el teorema. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada una de estas anticadenas es maximal y que forman una sucesión creciente, es decir, que para cada $t \in S_{n+1}$ existe $s \in S_n$ tal que $s \prec t$. Nuestra hipótesis afirma que para cada $t \in T$ existe $t' \in \bigcup_{m<\omega} S_m$ tal que $t \prec t'$. Es más, puesto que las anticadenas las tomamos maximales y en sucesión creciente,

$(*)$ Para cada número natural n y cada $t \in T$ existe $t' \in \bigcup_{m>n} S_m$ tal que $t \prec t'$.

Construimos una familia $\{R_\xi : \xi < \omega_1\}$ de subconjuntos de T con las siguientes propiedades:

1. R_ξ es un subconjunto numerable de $\bigcup_{n<\omega} S_n$.
2. $R_\xi \subset R_\zeta$ siempre que $\xi < \zeta$.
3. Si ξ es un ordinal límite, entonces $R_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} R_\zeta$.
4. Si definimos $\gamma_\xi = \sup\{\text{máx}(t) : t \in R_\xi\}$ se satisfacen:
   a) $\gamma_\xi < \gamma_\zeta$ siempre que $\xi < \zeta$.
   b) Para cada $\xi < \omega_1$, cada $t \in R_\xi$, cada $n < \omega$ y cada $\eta \in A$ verificando que $\text{máx}(t) < \eta < \gamma_\xi$, existe $t' \in R_\xi \cap \cup_{m>n} S_m$ tal que $t \cup \{\eta\} \prec t'$.
   c) $\gamma_\xi \neq \text{máx}(t)$ para todo $t \in R_\xi$.

Construimos estos conjuntos por inducción en ξ. Definimos $R_0 = \emptyset$ y suponemos que hemos construido R_ζ para cada $\zeta < \xi$. Si ξ es un ordinal líimite, definimos $R_\xi = \bigcup_{\zeta<\xi} R_\zeta$. Nótese que entonces $\gamma_\xi = \sup\{\gamma_\zeta : \zeta < \xi\}$ y todas las propiedades se verifican inmediatamente para R_ξ siempre que se verifiquen para R_ζ con $\zeta < \xi$.

Suponemos ahora que $\xi = \zeta + 1$. Para que se verifique 4(b) llevaremos a cabo un argumento de saturación. Definiremos R_ξ como la unión de ciertos conjuntos $R_\xi = \bigcup_{n<\omega} R_\xi^n$.

En primer lugar definimos $R_\xi^0 = R_\zeta$ y $\gamma_\xi^0 = \gamma_\zeta$. Como R_ζ verifica la propiedad 4(b), tenemos garantizado que R_ξ verificará la propiedad 4(b) para $\eta < \gamma_\zeta$.

En el siguiente paso, nos aseguraremos que la propiedad 4(b) se cumple para cada $t \in R_\xi^0$ y $\eta = \gamma_\zeta$. Para cada $t \in R_\xi^0$ y cada $n < \omega$ encontramos, usando la propiedad $(*)$, $t'_n \in \bigcup_{m>n} S_m$ tal que $t \cup \{\gamma_\xi^0\} \prec t'_n$ y definimos $R_\xi^1 = R_\xi^0 \cup \{t'_n : t \in R_\xi^0,\ n < \omega\}$ y $\gamma_\xi^1 = \sup\{\text{máx}(s) : s \in R_\xi^1\}$.

Si ya hemos definido R_ξ^n y $\gamma_\xi^n = \sup\{\text{máx}(s) : s \in R_\xi^n\}$ nos aseguramos entonces de que la propiedad 4(b) se verifique en R_ξ para cada $\eta \leq \gamma_\xi^n$. Para cada $n < \omega$, cada $t \in R_\xi^n$ y cada $\eta \in (max(t), \gamma_\xi^n]$, encontramos, por la propiedad $(*)$, un elemento $t'_{n\eta} \in \bigcup_{m>n} S_m$ tal que $t \cup \{\gamma_\xi^0\} \prec t'_{n\eta}$ y definimos entonces

$$R_\xi^{n+1} = R_\xi^n \cup \{t'_{n\eta} : t \in R_\xi^0,\ n < \omega,\ \eta \in (\text{máx}(t), \gamma_\xi^n]\}$$

y $\gamma_\xi^{n+1} = \sup\{\text{máx}(s) : s \in R_\xi^{n+1}\}$.

Finalmente, $R_\xi = \bigcup_{n<\omega} R_\xi^n$ y tendremos que $\gamma_\xi = \sup_{n<\omega} \gamma_\xi^n$ y esto finaliza la construcción.

Ahora obtendremos una contradicción de la existencia de los conjuntos R_ξ. El conjunto $\{\gamma_\xi : \xi < \omega_1\}$ es un subconjunto cerrado y acotado de ω_1, luego como A es estacionario, existe $\xi < \omega_1$ tal que $\gamma_\xi \in A$. Construiremos una sucesión $t_1 \prec t_2 \prec \cdots$ de elementos de R_ξ tal que $t_n \in \bigcup_{m>n} S_m$ y $\gamma_\xi = \sup\{\text{máx}(t_n) : n < \omega\}$. Tal sucesión nos lleva a una contradicción, porque en ese caso, $t = \bigcup_{n=1}^\infty t_n \cup \{\gamma_\xi\}$ es un nodo del árbol con la propiedad de que para cada n, $t \succ t_n \in S_{m_n}$, $m_n > n$, y esto implica que $t \notin \bigcup_{n<\omega} \hat{S}_n$. La construcción de la sucesión t_n se lleva a cabo recursivamente como sigue. Escogemos una sucesión de ordinales $\{\eta_i : i < \omega\}$ que converge a γ_ξ. Dado t_{n-1}, encontramos i con $max(t_n) < \eta_i$ y usamos la propiedad 4(b) para encontrar $t_n \in R_\xi \cap \bigcup_{m>n} S_m$ con $t_{n-1} \cup \{\eta_i\} \prec t_n$.

Lista de problemas

1. ¿Existe una aplicación continua y suprayectiva $f : \sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}} \longrightarrow B(\Gamma)$ que admita un operador regular de promedio? Una respuesta afirmativa implicaría, usando el método de descomposición de Pełczyński, que $C(B(\Gamma)^{\mathbb{N}})$ es isomorfo a $C(\sigma_1(\Gamma)^{\mathbb{N}})$, lo que respondería a un problema planteado en [7] de si es posible que los espacios de funciones continuas sobre un compacto de Eberlein uniforme convexo y uno totalmente disconexo sean isomorfos. El Teorema de Miljutin establece la existencia de una aplicación continua y suprayectiva $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$ que admite un operador regular de promedio, y éste es el ingrediente principal de la prueba de que los espacios de funciones continuas $C(\{0,1\}^{\mathbb{N}})$ y $C([0,1])$ son isomorfos.

2. Sea X un espacio de Banach reflexivo cuya bola es un compacto de Eberlein uniforme en la topología débil ¿Existe una norma equivalente en X cuya bola sea imagen continua de $\sigma_1(dens(X))^{\mathbb{N}}$?

3. Siguiendo la notación de la Sección 1.2, sea Γ un conjunto no numerable y $\tau, \tau' \in T$ tales que $j(\tau') = j(\tau) = \omega$, $i(\tau) < \omega$ y tales que existe $n \geq i(\tau)$ con $\tau_n \neq \tau'_n$. ¿Es $\sigma_\tau(\Gamma)$ homeomorfo a $\sigma_{\tau'}(\Gamma)$? Por ejemplo, un caso particular de este problema es si $\prod_{i=1}^{\infty} \sigma_i(\Gamma)$ es homeomorfo a $\prod_{i=2}^{\infty} \sigma_i(\Gamma)$.

4. ¿Existen ejemplos de espacios de Banach X tales que $\omega < \ell\Sigma(X) < \ell K(X)$? Más en general, establecer la relación precisa entre los índices $\ell\Sigma(X)$ y $\ell K(X)$.

5. ¿Existen espacios de Banach X tales que $Nag(X) < \ell\Sigma(X)$? Más en general, establecer la relación precisa entre estos dos índices.

6. (Namioka [56])¿Es una imagen continua de un compacto de Radon-Nikodým un compacto de Radon-Nikodým? (Arvanitakis [9])¿Es todo compacto de casi Radon-Nikodým una imagen continua de un compacto de Radon-Nikodým?

7. Caracterizar los árboles T para los que JT^* admite un renormamiento Kadec y aquéllos para los que admite un renormamiento estrictamente convexo.

Bibliografía

[1] D. Amir and J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 35–46.

[2] S. Argyros and S. Mercourakis, *On weakly Lindelöf Banach spaces*, Rocky Mountains J. Math. **23** (1993), no. 2, 395–446.

[3] ______, *Examples concerning heredity problems of WCG Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 3, 773–785.

[4] ______, *A note on the structure of WUR Banach spaces*, Preprint (2005).

[5] S. Argyros, S. Mercourakis, and Negrepontis S., *Functional-analytic properties of Corson-compact spaces*, Studia Math. **89** (1988), 197–229.

[6] S. A. Argyros and A. D. Arvanitakis, *A characterization of regular averaging operators and its consequences*, Studia Math. **151** (2002), no. 3, 207–226.

[7] ______, *Regular averaging and regular extension operators in weakly compact subsets of Hilbert spaces*, Serdica Math. (2004).

[8] A. V. Arkhangel'skiĭ, *General topology. II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 50, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[9] A. D. Arvanitakis, *Some remarks on Radon-Nikodým compact spaces*, Fund. Math. **172** (2002), no. 1, 41–60.

[10] A. Avilés, *Countable products of spaces of finte sets*, Fundamenta Math. **186** (2005), 147–159.

[11] ______, *The number of weakly compact sets which generate a Banach space*, Prepublicación (2005).

[12] ______, *Radon-Nikodým compact spaces of low weight and Banach spaces*, Studia Math. **166** (2005), no. 1, 71–82.

[13] ______, *Renormings of the dual of James tree spaces*, Prepublicación (2005).

[14] ______, *The unit ball of the Hilbert space in its weak topology*, Prepublicación (2005).

[15] T. Banakh, *The topological classification of weak unit balls of Banach spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **387** (2000), 7–35.

[16] M. Bell, *A Ramsey theorem for polyadic spaces*, Fund. Math. **150** (1996), no. 2, 189–195.

[17] ______, *On character and chain conditions in images of products*, Fund. Math. **158** (1998), no. 1, 41–49.

[18] ______, *Polyadic spaces of countable tightness*, Topology Appl. **123** (2002), no. 3, 401–407.

[19] M. Bell and W. Marciszewski, *Function spaces on τ-Corson compacta and tightness of polyadic spaces*, Czechoslovak Math. J. **54(129)** (2004), no. 4, 899–914.

[20] Y. Benyamini, M. E. Rudin, and M. Wage, *Continuous images of weakly compact subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **70** (1977), no. 2, 309–324.

[21] R. E. Brackebusch, *James space on general trees*, J. Funct. Anal. **79** (1988), no. 2, 446–475.

[22] M. R. Burke and M. Magidor, *Shelah's pcf theory and its applications*, Ann. Pure and Applied Logic **50** (1990), 207–254.

[23] B. Cascales, M. Muñoz, and J. Orihuela, *Index of $\mathscr{K}$-determination of topological spaces*, Preprint (2005).

[24] B. Cascales, I.Ñamioka, and J. Orihuela, *The Lindelöf property in Banach spaces*, Studia Math. **154** (2003), no. 2, 165–192.

[25] P. Čížek and M. Fabian, *Adequate compacta which are Gul′ko or Talagrand*, Serdica Math. J. **29** (2003), no. 1, 55–64.

[26] W. W. Comfort and S. A. Negrepontis, *Chain conditions in topology*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 79, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[27] H. H. Corson, *The weak topology of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), 1–15.

[28] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[29] Ryszard Engelking, *General topology*, second ed., Sigma Series in Pure Mathematics, vol. 6, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, Translated from the Polish by the author.

[30] P. Erdős and R. Rado, *A partition calculus in set theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **62** (1956), 427–489.

[31] M. Fabian, *Gâteaux differentiability of convex functions and topology*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1997, Weak Asplund spaces, A Wiley-Interscience Publication.

[32] M. Fabián and G. Godefroy, *The dual of every Asplund space admits a projectional resolution of the identity*, Studia Math. **91** (1988), no. 2, 141–151.

[33] M. Fabian, M. Heisler, and E. Matoušková, *Remarks on continuous images of Radon-Nikodým compacta*, Comment. Math. Univ. Carolin. **39** (1998), no. 1, 59–69.

[34] Marián Fabian, Petr Habala, Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, Jan Pelant, and Václav Zizler, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8, Springer-Verlag, New York, 2001.

[35] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980.

[36] J. Gerlits, *On a generalization of dyadicity*, Studia Sci. Math. Hungar. **13** (1978), no. 1-2, 1–17 (1981).

[37] G. Gruenhage, *Covering properties on $X^2 \setminus \Delta$, W-sets, and compact subsets of Σ-products*, Topology and its Applications **17** (1984), 287–304.

[38] S.P. Gul'ko, *On properties of subsets of Σ-products*, Sov. Math. Dokl. **18** (1977), no. 1, 1438–1442.

[39] J. Hagler and E. Odell, *A Banach space not containing l_1 whose dual ball is not weak* sequentially compact*, Illinois J. Math. **22** (1978), no. 2, 290–294.

[40] R. Haydon, A. Moltó, and J. Orihuela, *Spaces of functions with countably many discontinuities*, Preprint (2005).

[41] Robert C. James, *A separable somewhat reflexive Banach space with nonseparable dual*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 738–743.

[42] Thomas Jech, *Set theory*, second ed., Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[43] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995.

[44] J.L. Kelley, *General topology*, Springer, New York, 1975.

[45] K. Kunen, *Combinatorics*, Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, Amsterdam, 1977, pp. 371–401.

[46] ———, *Set theory, an introduction to independence proofs*, Studies in logic and the foundation of mathematics, North Holland, Amsterdam, 1980.

[47] D. Kurepa, *Ensembles ordonnés et leurs sous-ensembles bien ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris **242** (1956), 2202–2203.

[48] A. G. Leiderman and G.A. Sokolov, *Adequate families of sets and Corson compacts*, Comm. Math. Univ. Car. **25** (1984), no. 2, 233–245.

[49] W. Marciszewski, *On Banach spaces $C(K)$ isomorphic to $c_0(\Gamma)$*, Studia Math. **156** (2003), no. 3, 295–302.

[50] E. Matoušková and C. Stegall, *Compact spaces with a finer metric topology and Banach spaces*, General topology in Banach spaces, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2001, pp. 81–101.

[51] S. Mazurkiewicz and W. Sierpiński, *Contribution à la topologie des ensembles dénombrables*, Fund. Math. **1** (1920), 17–27.

[52] A. A. Miljutin, *Isomorphism of the spaces of continuous functions over compact sets of the cardinality of the continuum* (Russian), Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp. **2** (1966), 150–156.

[53] S. Mrówka, *Mazur theorem and m-adic spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **18** (1970), 299–305.

[54] James R. Munkres, *Topology: a first course*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[55] M. Muñoz, *Índice de $\mathscr{K}$-determinación de espacios topológicos y σ-fragmentabilidad de aplicaciones*, Doctoral dissertation.

[56] I.Ñamioka, *Radon-Nikodým compact spaces and fragmentability*, Mathematika **34** (1987), no. 2, 258–281.

[57] ———, *On generalizations of Radon-Nikodým compact spaces*, Topology Proceedings (2001-2002), no. 26, 741–750.

[58] J. Orihuela, W. Schachermayer, and M. Valdivia, *Every Radon-Nikodým Corson compact space is Eberlein compact*, Studia Math. **98** (1991), no. 2, 157–174.

[59] J. Orihuela and M. Valdivia, *Projective generators and resolutions of identity in banach spaces*, Rev. Mat. Univ. Complutense Madr. **2** (1990), no. suppl., 179–199.

[60] José Orihuela, *On weakly Lindelöf Banach spaces*, Progress in functional analysis (Peñíscola, 1990), North-Holland Math. Stud., vol. 170, North-Holland, Amsterdam, 1992, pp. 279–291.

[61] A. Pełczyński, *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. Rozprawy Mat. **58** (1968), 92.

[62] R. Pol, *A function space $C(X)$ which is weakly Lindelöf but not weakly compactly generated*, Studia Math. **64** (1979), no. 3, 279–285.

[63] ______, *On weak and pointwise topology of function spaces*, University of Warsaw preprint No. 4184, Warsaw (1984).

[64] O. I. Reynov, *On a class of Hausdorff compacts and GSG Banach spaces*, Studia Math. **71** (1981/82), 294–300.

[65] N. Ribarska, *Internal characterization of fragmentable spaces*, Mathematika **34** (1987), 243–257.

[66] H. P. Rosenthal, *The heredity problem for weakly compactly generated Banach spaces*, Compositio Math. **28** (1974), 83–111.

[67] E. V. Shchepin, *Topology of limit spaces of uncountable inverse spectra*, Uspehi Mat. Nauk **31** (1976), no. 5, 191–226.

[68] M. Talagrand, *Espaces de Banach faiblement $\mathscr{K}$-analytiques*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), no. 3, 407–438.

[69] ______, *A new countably determined Banach space*, Israel J. Math. **47** (1984), no. 1, 75–80.

[70] S. Todorčević, *Trees and linearly ordered sets*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 235–293.

[71] ______, *Representing trees as relatively compact subsets of the first Baire class*, Preprint (2005).

[72] S. L. Troyanski, *On a property of the norm which is close to local uniform rotundity*, Math. Ann. **271** (1985), no. 2, 305–313.

[73] E. K. van Douwen, *The integers and topology*, Handbook of set-theoretic topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 111–167.

[74] L. Vašák, *On a generalization of weakly compactly generated Banach spaces*, Studia Math. **70** (1981), 11–19.

Índice terminológico