Aplicaciones de Cálculo Estocástico

en la gestión de productos financieros

Manuel Menéndez Sánchez (mmenensa@banesto.es)

Jueves, 11 de Marzo de 2010

Índice

1. Introducción

A lo largo de la presentación veremos algunos problemas concretos de la industria financiera y las herramientas matemáticas del cálculo estocástico utilizadas para resolverlos.

Productos financieros

La actividad fundamental de las entidades financieras es la compra, venta y gestión de productos financieros.

Desde los productos financieros más sencillos como pueden ser:

- Acciones,
- Bonos del estado o de compañías privadas,
- Prestamos hipotecarios, ...

hasta contratos opcionales, más difíciles de valorar, como por ejemplo:

- Opciones Call y Put estándar,
- opciones Call y Put con barrera,
- opciones más *exóticas* como las opciones Asiáticas,
- opciones sobre cestas, con pagos que dependen del comportamiento de varias acciones, ...

Modelos de Evolución Estocástica

El problema fundamental a la hora de tratar con estos instrumentos financieros es poder determinar su precio (que también llamaremos prima o valor).

El primer paso para calcular el precio de una opción es elegir el proceso de evolución estocástico que le asignaremos al activo (o activos) que determinan el pago futuro del contrato.

Notación:

W_t = Movimiento browniano

S_t = Precio del activo subyacente en tiempo t

S_0 = Precio hoy del activo (*precio spot*)

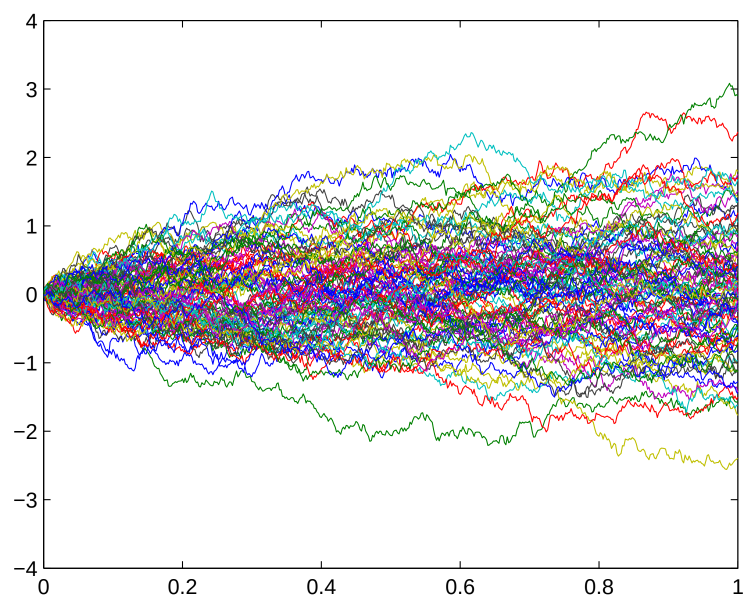
T = Vencimiento de la opción

K = Precio de ejercicio (*Strike*)

Uno de los modelos de evolución estocásticas, en tiempo continuo, más básicos que manejamos es el Movimiento Browniano, y utilizándolo como base construimos las ecuaciones diferenciales estocásticas que determinarán la evolución de los activos subyacentes.

Por ejemplo, podríamos tener que el subyacente S_t evoluciona en el tiempo como si fuera el mismo movimiento browniano,

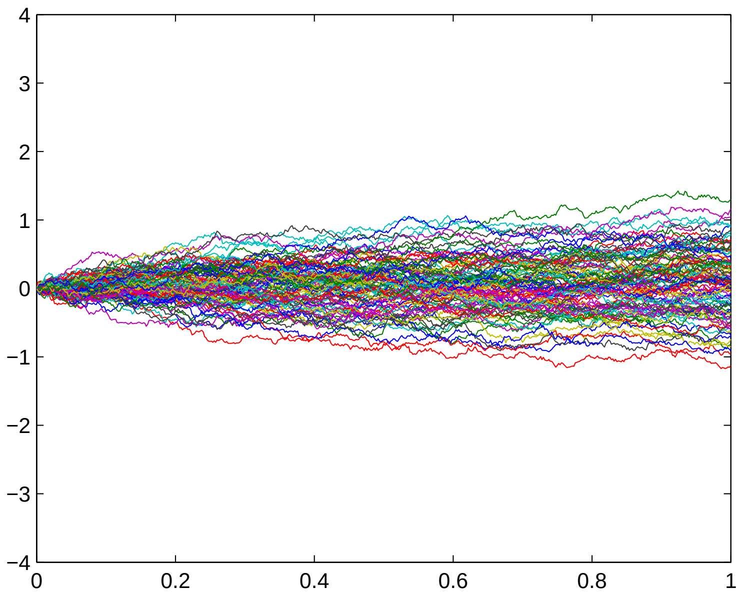
$$dS_t = dW_t \ .$$



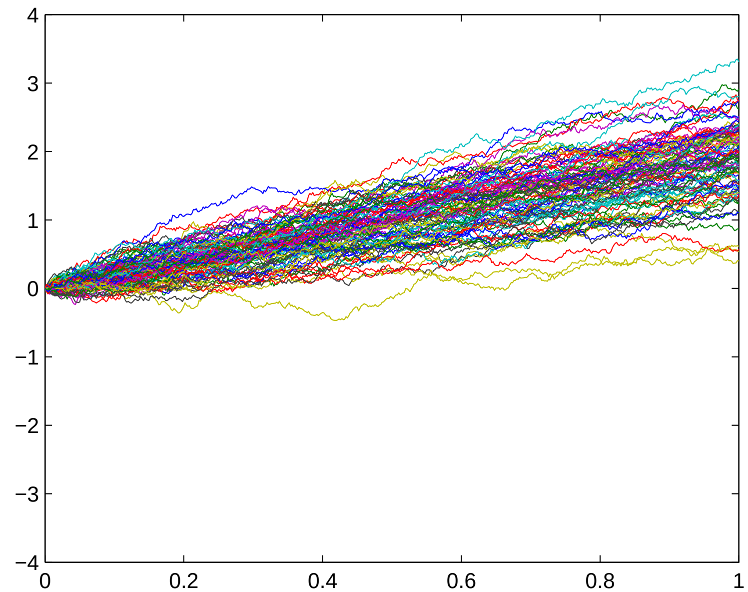
Un proceso un poco más general sería el movimiento browniano con deriva (μ) y con un parámetro (σ) que sirve para controlar su nivel de varianza o incertidumbre,

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t \ .$$

$\mu = 0$; $\sigma = 0.5$



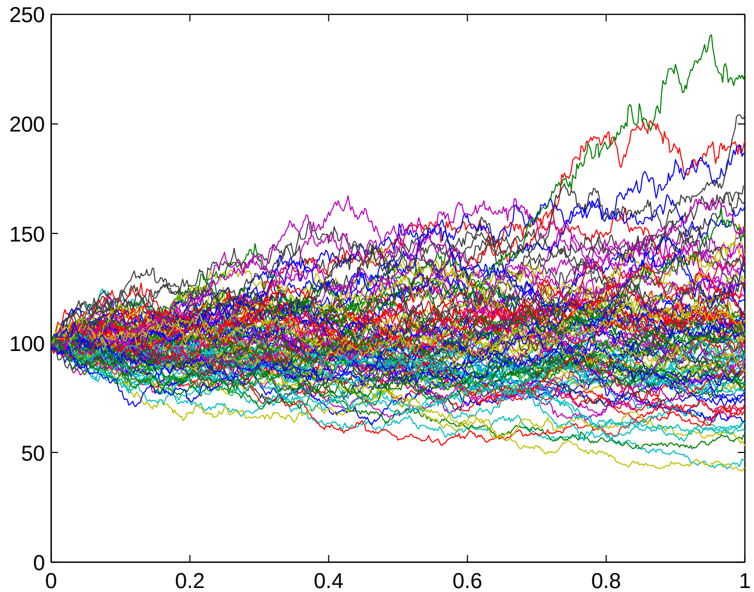
$\mu = 2$; $\sigma = 0.5$



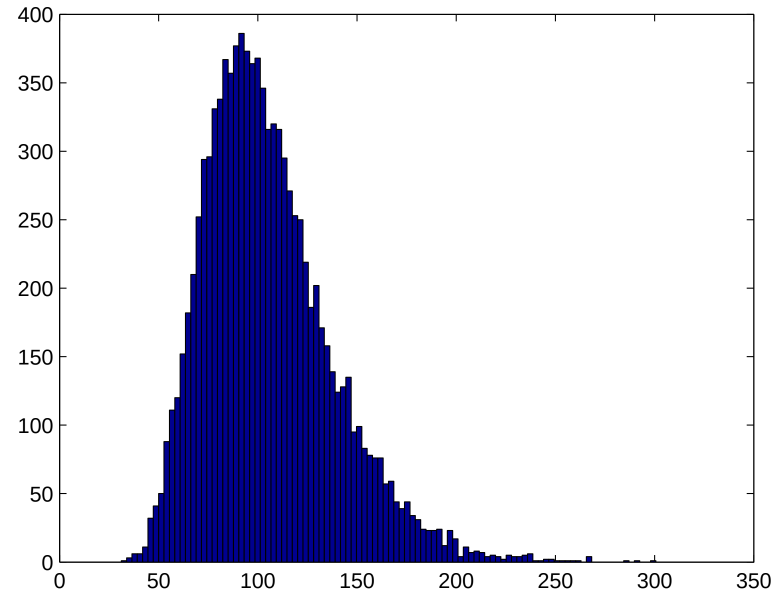
Uno de los modelos de evolución más utilizados es el modelo log-normal de Black-Scholes, desarrollado en 1973 (por este trabajo recibieron el Premio Nobel de economía en 1997 Myron Scholes, Robert C. Merton y [*Fischer Black*]). Su ecuación diferencial estocástica es la siguiente,

$$\boxed{\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t}$$

$\mu = 0.05$; $\sigma = 0.3$



histograma S_1



Teoría de Valoración

En un alarde de extrema síntesis, la teoría de valoración por ausencia de oportunidad de arbitraje nos permite concluir que el precio de un derivado sobre un activo que se negocia en un mercado organizado se puede calcular como la siguiente esperanza:

$$\boxed{\text{Valor hoy} = V_0 = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{Q}}\left\{H(S_T)\right\}},$$

donde, $H(x)$ es la función de pago en el momento del vencimiento del contrato y que depende del subyacente S_T.

2. Técnicas de Cálculo Estocástico y Aplicaciones Financieras

Lema de Itô y Formulas Analíticas

Dificultad

Si queremos calcular el precio de una opción Put de vencimiento $T = 1$ año, activo subyacente S_t y precio de ejercicio K necesitaremos:

1. Asignar un modelo de evolución a S_T, por ejemplo log-normal,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{1}$$

2. Calcular la siguiente esperanza,

$$\text{Precio de una put} = \boldsymbol{E_Q}\left\{H(S_T)\right\} = \boldsymbol{E_Q}\left\{(K - S_T)^+\right\} \tag{2}$$

Para calcular le esperanza de la expresión (2) lo primero que necesitamos es una expresión explícita para S_T. La ecuación diferencial estocásticas (1) nos indica la regla de evolución para S_t a lo largo del tiempo, pero no la distribución de S_t para cada tiempo t.

Herramienta

El Lema de Itô:

Supongamos que S_t es un proceso de Itô,

$$dS_t = a(t, S_t)dt + b(t, S_t)dW_t$$

y que definimos otro proceso Y_t

$$Y_t = f(t, S_t)$$

Entonces Y_t es también un proceso de Itô dado por

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t, S_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, S_t)(dS_t)^2$$

Esto es

$$\boxed{\boldsymbol{dY_t = \left(\partial_t f + a\ \partial_x f + \frac{b^2}{2}\ \partial^2_{xx} f\right)dt + b\ \partial_x f\ dW_t}}$$

La ecuación diferencial estocástica (1), un par de elecciones de $f(t, S_t)$ adecuadas y el lema de Itô nos permiten calcular la expresión explícita de S_t para todo tiempo t,

$$\boxed{S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt(t)\xi\right\}}$$

donde, ξ es una variable aleatoria $N(0,1)$ (normal de media cero y desviación típica 1).

Un argumento de ausencia de oportunidad de arbitraje determinará que la única elección adecuada para μ serán al valor de los tipos de interés sin riesgo, que denotaremos con r. De esta forma tendremos que el precio de una Put viene dado por la siguiente integral,

$$\boxed{P(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(K - S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}u}\right)^+ \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du}$$

Si hacemos la integral obtenemos la formula de Black-Scholes para una opción Put,

$$\boxed{P(S_t, t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_-) - S_tN(-d_+)}$$

Fórmula de Black&Scholes para una put

donde,

$$d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log \frac{S}{Ke^{-r(T-t)}} \pm \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}$$

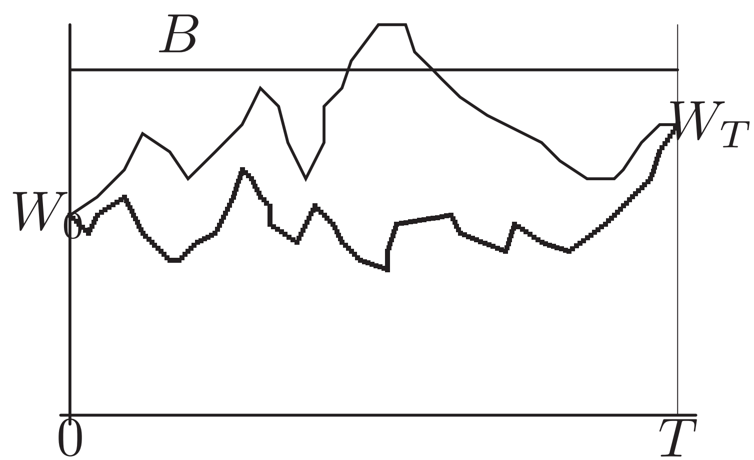
y,

$$N(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} e^{\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dz \, .$$

Principio de Reflexión y Toque de Barreras
Movimiento Browniano

Dificultad

A la hora de ponerle precio a una opción Put con barrera desactivante (opción Put *down and out*) nos interesa conocer la probabilidad de que un browniano toque una barrera B antes de un determinado tiempo T,



$$P\left(\max_{0\leq t\leq T}\{W_t\} > B\right) = \text{¿?}$$

Herramienta

Principio de Reflexión del movimiento browniano:

$$\boxed{P\left(\max_{0\le t\le T}\{W_t\}\ge B\right) = 2\cdot P\left(W_T\ge B\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi T}}\int_B^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2T}}\,du}$$

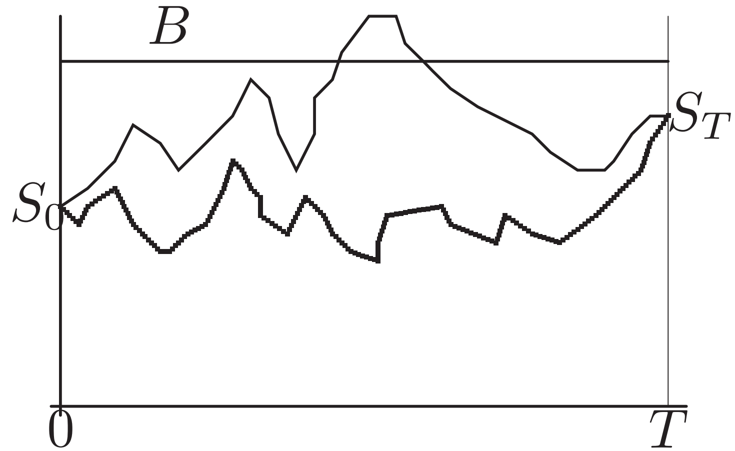
Nota

$$\begin{aligned}
&P\left(\max_{0\le t\le T}\{W_t\} > B\right)\\
&= P\left(\max_{0\le t\le T}\{W_t\} > B \bigcap W_T > B\right) + P\left(\max_{0\le t\le T}\{W_t\} > B \bigcap W_T \le B\right)\\
&= P\left(W_T > B\right) + P\left(\max_{0\le t\le T}\{W_t\} > B \bigcap W_T \le B\right)\\
&= P\left(W_T > B\right) + P\left(W_T > B\right)\\
&= 2\cdot P\left(W_T > B\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi T}}\int_B^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2T}}\,du
\end{aligned}$$

Lema de Girsanov y Toque de Barreras
Movimiento Browniano con deriva

Dificultad

En realidad, si suponemos que la evolución del activo subyacente es log-normal, el tipo de cálculo que necesitamos para ponerle precio a opciones con barrera es,



$$P\left(\max_{0\le t\le T}\{S_t\} > B\right) = \text{¿?}$$

$$
\begin{aligned}
&P\left(\max_{0\leq t\leq T}\left\{S_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}\right\} > B\right) \\
=&P\left(\max_{0\leq t\leq T}\left\{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t\right\} > \log\left(\frac{B}{S_0}\right)\right)
\end{aligned}
$$

si denotamos,

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu} &= (\mu-\frac{\sigma^2}{2}) \\
b &= \log\left(\frac{B}{S_0}\right)
\end{aligned}
$$

la probabilidad que buscamos queda entonces,

$$
P\left(\max_{0\leq t\leq T}\{\hat{\mu}t+\sigma W_t\} > b\right),
$$

que es la probabilidad de que un browniano con deriva llegue a un nivel b antes de tiempo T. Esto ya no es tan sencillo como el principio de reflexión.

Herramienta

Lema de Girsanov:

Si tenemos un proceso browniano con deriva $\widetilde{W}_t$ en su probabilidad natural $\boldsymbol{P}$,

$$d\widetilde{W}_t = \lambda dt + dW_t \,.$$

Entonces, existe una probabilidad $\boldsymbol{Q}$ dada por,

$$d\boldsymbol{Q} = d\boldsymbol{P} \cdot \exp\left(-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right),$$

tal que el proceso $\widetilde{W}_t$ es un movimiento browniano sin deriva con respecto a esta nueva probabilidad $\boldsymbol{Q}$.

Con una adecuada elección de λ,

$$\lambda = \frac{\hat{\mu}}{\sigma},$$

obtenemos que podemos hacer el cálculo en el mundo del browniano sin deriva,

$$\boxed{P\left(\max_{0\leq t\leq T}\{\hat{\mu}t+\sigma W_t\}>b\right)=P_{\boldsymbol{Q}}\left(\max_{0\leq t\leq T}\left\{\sigma\widetilde{W}_t\right\}>b\right)\frac{d\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{Q}}}$$

Para terminar la cuenta tendríamos que condicionar esta probabilidad sobre los posibles valores de W_T en tiempo T, y obtendríamos resultados como,

$$P\left(\max_{0\leq t\leq T}\{S_t\}>B\middle|S_T=x\right)=\exp\left\{\frac{2}{\sigma^2 T}\left(\log\left(\frac{B}{S_0}\right)\log\left(\frac{S_T}{B}\right)\right)\right\}$$

Cálculo de Variaciones (Malliavin) y Computo de Derivadas

Dificultad

Para la gestión del riesgo que suponen los productos financieros no solo necesitamos conocer su valor, también es imprescindible conocer cual será su comportamiento cuando se muevan las variables que determinan su precio. En definitiva, cuales son las derivadas parciales de las funciones que determinan el precio.

Dada la complejidad de algunos de los productos financieros, no siempre disponemos de fórmulas analíticas para el cálculo de las esperanzas que determinan su precio,

Hay que calcular numericamente: $\boxed{V_0 = \boldsymbol{E_Q}\{H(S_T)\}}$

En estos casos utilizamos métodos numéricos como la simulación montecarlo, que son computacionalmente muy poco eficientes. Además nos encontramos con muchas dificultades a la hora de calcular derivadas de forma numérica.

Para algunos productos hay que calcular más de 150 derivadas parciales.

Herramienta

El cálculo de Variaciones (cálculo de Malliavin) nos permite calcular:

- Muchas derivadas al mismo tiempo que el precio del producto,
- Con un coste computacional extra prácticamente marginal,
- Obteniendo estimadores no sesgados del valor de las derivadas parciales.

Como ya hemos dicho, el precio de los productos vendrá dado por una expresión de este tipo, donde θ es la variable que nos interesa derivar,

$$\text{Valor hoy} = V(\theta) = \boldsymbol{E}\left\{f(S_T(\theta))\right\} = \int f(S_T(\theta, x))p(x)dx\,,$$

donde $p(x)$ es la densidad de la variable aleatoria que gobierna la distribución de S_T. Por ejemplo, $p(x)$ la densidad de una normal de media cero y desviación típica uno.

Nos van a interesar el siguiente tipo de derivadas parciales,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}V(\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta}E[f(S_T(\theta))] = E[\frac{\partial}{\partial\theta}f(S_T(\theta))] = \int \frac{\partial}{\partial\theta}f(S_T(\theta,x))p(x)dx$$

donde θ es la variable con respecto a la cual queremos derivar.

Como veremos, será tremendamente útil transformar la integral sobre la derivada de la función f en una integral en la cual aparezca la función f sin derivar,

$$\boxed{\int \frac{\partial}{\partial\theta}f(S_T(\theta,x))p(x)dx = \int f(S_T(\theta,x))h(x,\theta)p(x)dx}$$

Esto nos permite computar las derivadas parciales a la vez que se calcula el precio de la opción.

El procedimiento tiene dos partes:

1. Relacionar $\dfrac{\partial f(\theta, x)}{\partial \theta}$ con $\dfrac{\partial f(\theta, x)}{\partial x}$.

   Es decir, pasar de tener $\dfrac{\partial f(\theta, x)}{\partial \theta}$ a tener $\dfrac{\partial f(\theta, x)}{\partial x} g(x, \theta)$, para poder escribir

$$\int \frac{\partial}{\partial \theta} f(S_T(\theta, x)) p(x) dx = \int \frac{\partial f(S_T(\theta, x))}{\partial x} g(\theta, x) p(x) dx \,.$$

2. Y después utilizar una integración por partes inteligente para obtener,

$$\int \frac{\partial f(S_T(\theta, x))}{\partial x} g(\theta, x) p(x) dx = -\int f(S_T(\theta, x)) \left[\frac{\partial g(\theta, x)}{\partial x} + g(\theta, x) \frac{p'(x)}{p(x)} \right] p(x) dx \,.$$

Este tipo de argumento los podemos utilizar para productos que dependan de varios subyacentes y además calcular todas las derivadas parciales a la vez que se calcula el precio de producto.

Nota

Fórmula de integración por partes.

$$E(f'(X)g(X)) = \int f'(x)g(x)p(x)dx$$

donde $p(x)$ es la densidad de la variable aleatoria X. Por la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g(x)p(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)g(x)p(x))'dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g(x)p(x))'dx \\
&= \underbrace{[f(x)g(x)p(x)]\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(g(x)p(x))'dx \\
&= -\int f(x)\left(g'(x) + g(x)\frac{p'(x)}{p(x)}\right) p(x)dx
\end{aligned}$$

Lo que conseguimos de esta manera es pasar de tener una integral en $f'(x)$ a tener una sobre su primitiva $f(x)$.

Bibliografía

- Elementary Stochastic Calculus With Finance in View
  (by: Thomas Mikosch)
- Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model
  (by:Steven E. Shreve)
- Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models
  (by: Steven E. Shreve)
- Monte Carlo Methods in Financial Engineering
  (by: Paul Glasserman)
- Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications
  (by:Bernt K. Oksendal)
- Brownian Motion and Stochastic Calculus
  (by: Ioannis Karatzas, Steven E. Shreve)
- Stochastic Calculus of Variations in Mathematical Finance
  (by: Paul Malliavin, Anton Thalmaier)
- Malliavin Calculus for Lévy Processes with Applications to Finance
  (by: Giulia Nunno , Bernt Øksendal, Frank Proske)