Escuela
de Finanzas
Aplicadas

Arbitraje y Pricing

Paul MacManus (pmacmanus@afi.es)

Universidad de Murcia, 11 de marzo de 2010

1. Bonos

Definiciones

Un bono es un préstamo a una empresa: el comprador entrega una cantidad al vendedor y, a cambio, recibe de éste pagos periódicos (los cupones) y un pago de nominal a vencimiento.

Un bono cupón cero es un bono que no paga cupones, solo existe el pago de nominal a vencimiento.

EJEMPLO

Entrego 900.000 euros a una empresa y esta entidad me devolverá 1.000.000 dentro de dos años.

Un bono cupón fijo es un instrumento que devuelve la inversión inicial a vencimiento y paga un tipo de interés fijo sobre este nominal hasta vencimiento.

EJEMPLO

Entrego 900.000 euros a una empresa y esta entidad me pagará un 5% (45.000 euros) anual durante dos años y me devolverá 900.000 dentro de dos años.

Un bono flotante, o un Floating Rate Note (FRN), es un instrumento que devuelve la inversión inicial a vencimiento y paga un tipo de interés de mercado sobre este nominal hasta vencimiento.

Ejemplo

Entrego, otra vez, 900.000 euros a una empresa y esta entidad me pagará el Euribor 6M (más un spread) cada seis meses durante tres años y me devolverá 900.000 dentro de dos años.

¿Cuánto valen estos bonos? ¿Cuál de los tres me ofrece la mayor rentabilidad?

CCC

El precio hoy de un bono cupón cero de nominal 1 y plazo T se denomina el factor de descuento a plazo T y se escribe $FD(T)$.

La curva de valores $FD(T)$ se denomina curva cupón cero (CCC). Tiene las siguientes propiedades:

- $FD(0) = 1$
- FD es decreciente

¿De dónde viene la segunda?

Un pequeño arbitraje

Supongamos que $FD(2) > FD(1)$.

- Vendo un bono cupón cero con plazo dos años.
- Compro un bono cupón cero con plazo un año.

En tiempo 0, mis ingresos netos son $I_0 = FD(2) - FD(1)$, una cantidad positiva.

En tiempo 1 recibo un pago de 1. Lo pongo en el bolsillo.........

En tiempo 2, saco el 1 del bolsillo y lo pago al comprador del bono de plazo dos años. En este momento he cumplido con todas mis obligaciones y me quedo con I_0.

Con un desembolso inicial de 0 he generado un beneficio garantizado: ésto es un arbitraje.

Los mercados (normalmente) no permiten que existan oportunidades de arbitraje, así que la hipótesis de que $FD(2) > FD(1)$ tiene que ser falso, de modo que $FD(2) \leq FD(1)$.

Se puede refinar un poco el argumento anterior para probar que la CCC es estrictamente decreciente.

Supongamos que $FD(2) \geq FD(1)$.

- Vendo un bono cupón cero con plazo dos años.

- Compro un bono cupón cero con plazo un año.

En tiempo 0, mis ingresos netos son $I_0 = FD(2) - FD(1)$, una cantidad no-negativa.

En tiempo 1 recibo un pago de 1. Lo pongo en el banco en un depósito a un año que paga un tipo de interés r (¡positivo!)

En tiempo 2, saco el $1 + r$ del banco, pago 1 al comprador del bono cupón cero con plazo dos años y me quedo con r. En este momento he cumplido con todas mis obligaciones.

De nuevo, con un desembolso inicial de 0 he generado un beneficio garantizado. Como este arbitraje no puede existir, deducimos que $FD(2) < FD(1)$.

Valorando un bono fijo

El bono fijo de antes: dos cupones de 45.000 y devolución de nominal de 900.000.

Cartera:

- Un bono cupón cero con plazo un año y nominal 45.000
- Un bono cupón cero con plazo dos años y nominal 45.000 + 900.000

Esta cartera tiene los mismos flujos de caja que el bono fijo. Se denomina cartera de replicación. Tiene que valer lo mismo que el bono fijo. De manera que el valor del bono fijo es el valor de la cartera de replicación:

$$45.000 \times FD(1) + 945.000 \times FD(2).$$

Es decir, el valor del bono es simplemente la suma de los flujos descontados.

¿Cómo sabemos que la cartera de replicación y el bono tienen que tener el mismo valor?

Si, por ejemplo, Valor Cartera fuera mayor que Valor Bono existiría una oportunidad de arbitraje:

- Vendo la cartera
- Compro el bono

Mis ingresos netos son positivos. Uso los flujos del bono comprado para pagar los flujos de la cartera vendida. A vencimiento he cumplido con todas mis obligaciones y me llevo un beneficio igual a la diferencia de precios.

¿Y si Valor Cartera fuera menor que Valor Bono?

Valorando un bono flotante

Asumamos de momento que el spread es cero. El bono paga al final de cada periodo el tipo de mercado fijado a inicio del periodo (pago *in-arrears*).

El bono flotante de antes: paga el Euribor 6M cada seis meses y devuelve el nominal de 900.000 a vencimiento.

Replicar el pago de cupón a vencimiento:

- Compro un bono cupón cero, nominal 900.000, vencimiento un año y medio.
- Vendo un bono cupón cero, nominal 900.000, vencimiento dos años.

¿Porqué funciona?

Dentro de un año y medio recibo 900.000 del bono cupón cero comprado. Invierto esta cantidad en un depósito a seis meses que paga el Euribor 6M del momento. Dentro de seis meses recibo 900.000 de nominal más el cupón variable. Pago el nominal al comprador del bono cupón cero vendido y me quedo con el cupón variable.

De este modo, el valor hoy de cada cupón variable es la diferencia de los precios de dos bonos cupón cero: uno que corresponde al inicio y otro al fin del periodo correspondiente.

El valor total de los cupones es la suma de:

$$900.000 \times (FD(0) - FD(0.5))$$
$$900.000 \times (FD(0.5) - FD(1))$$
$$900.000 \times (FD(1) - FD(1.5))$$
$$900.000 \times (FD(1.5) - FD(2))$$

Esta suma telescópica se reduce a

$$900.000 \times (1 - FD(2))$$

¿Y el valor del nominal a vencimiento? Es simplemente $900.000 \times FD(2)$.

Hemos conseguido replicar los flujos del bono flotante usando sólo bonos cupón cero. El valor total de la cartera de replicación y, en consecuencia, el del bono flotante, es:

$$900.000 \times ((1 - FD(2)) + FD(2)) = 900.000$$

Incluyendo el spread

Si el cupón tiene un spread de k por encima de Euribor, el bono flotante se puede descomponer en un bono flotante con spread 0 y una sucesión de pagos fijos k.

Hemos visto que el primer elemento es igual al nominal. El segundo elemento, igual que en el bono fijo, se valora descontando la sucesión de pagos.

El tipo forward

En un bono flotante el cupón para un periodo futuro es incierto pero, como se ha visto, se puede replicar con la compraventa de bonos cupón cero hoy. Es decir, aunque desconocemos el cupón futuro sí sabemos su valor hoy.

El valor hoy del cupón que corresponde al periodo $[T, T+\Delta T]$ es:

$$\begin{aligned} FD(T) - FD(T+\Delta T) &= FD(T+\Delta T)\left(\frac{FD(T)}{FD(T+\Delta T)} - 1\right) \\ &= FD(T+\Delta T)\Delta T \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{FD(T)}{FD(T+\Delta T)} - 1\right) \end{aligned}$$

La cantidad $R_T = \dfrac{1}{\Delta T}\left(\dfrac{FD(T)}{FD(T+\Delta T)} - 1\right)$ se denomina tipo forward.

El valor hoy del cupón futuro es $FD(T+\Delta T)\ \Delta T\ R_T$.

El valor hoy del cupón flotante futuro es equivalente a el de un cupón fijo de $R_T\ \Delta T$ en tiempo $T + \Delta T$.

De esta manera, valorar el bono flotante (con o sin spread) es equivalente a valorar un bono que paga una sucesión de cupones fijos determinados por los tipos forward.

Los tipos forward no son meros artificios algebraicos: cotizan directamente en mercado a través de los "Forward Rate Agreements" (FRA) y los swaps (permutas).

Valorar un bono es descontar con la CCC sus flujos forward y/o fijados.

Resumen

- Instrumentos básicos con precio de mercado (los bonos cupón cero)
- Cartera de replicación
- No-arbitraje

$$\Downarrow$$

Precio (relativo) de otro activo

2. Derivados

Precio forward de una acción

Quiero comprar una acción dentro de tres meses pero quiero fijar hoy el precio que voy a pagar. Este tipo de contrato se llama un forward sobre la acción.

K = el precio pactado (lo que voy a pagar dentro de tres meses)

FD = el factor de descuento a tres meses

S_0 = el precio de la acción hoy

S = el precio de la acción dentro de tres meses (una incógnita)

¿Cuánto debería pagar hoy para este contrato?

Los únicos flujos del forward se intercambian a vencimiento. El flujo neto en ese momento es $S - K$ (pago K, recibo una acción de valor S).

Cartera de replicación:

- Una acción comprada
- Un bono cupón cero de nominal K y plazo tres meses vendido

El coste inicial es $S_0 - K \times FD$.

A vencimiento se vende la acción a un precio S y se paga el nominal K del bono: el flujo neto es $S - K$, el mismo que el del forward. Como no hay flujos intermedios, la cartera y el forward tienen los mismos flujos y, por ausencia de arbitraje, sus valores iniciales tienen que coincidir:

$$\text{Valor hoy del forward} = S_0 - K \times FD.$$

NOTA. Hemos usado dos instrumentos básicos para replicar el forward: la acción y el bono cupón cero

El valor de K que da un valor hoy de 0 al forward se conoce como el precio forward de la acción:

$$S_{fwd} = S_0/FD.$$

Tipo de cambio forward

Dentro de tres meses voy a recibir 1.000.000 de dólares y voy a querer convertirlos a euros. Quiero protegerme contra movimientos adversos del tipo de cambio fijando hoy un tipo de cambio que se aplicará dentro de tres meses. Este tipo de contrato es un forward sobre tipo de cambio.

K = el tipo de cambio dólar/euro pactado para dentro de tres meses

FX_0 = tipo de cambio dólar/euro hoy (valor de un dólar en euros)

$FD_\$$ = el factor de descuento a tres meses en el mundo dólar

$FD_€$ = el factor de descuento a tres meses en el mundo euro

A vencimiento del forward, pago $1.000.000$ dólares y recibo $1.000.000 \times K$ euros.

Cartera de replicación:

- Un bono cupón cero vendido de nominal $1.000.000$ dólares y plazo tres meses
- Un bono cupón cero comprado de nominal $1.000.000 \times K$ euros y plazo tres meses

El coste inicial de esta cartera, en euros, es $1.000.000 \times K \times FD_{€} - 1.000.000 \times FD_{\$} \times FX_0$.

Igual que antes, el valor del forward coincide con el valor inicial de la cartera:

$$\text{Valor hoy del forward} = 1.000.000 \times K \times FD_{€} - 1.000.000 \times FD_{\$} \times FX_0$$

El valor de K que hace que el precio hoy sea 0 se denomina tipo de cambio forward:

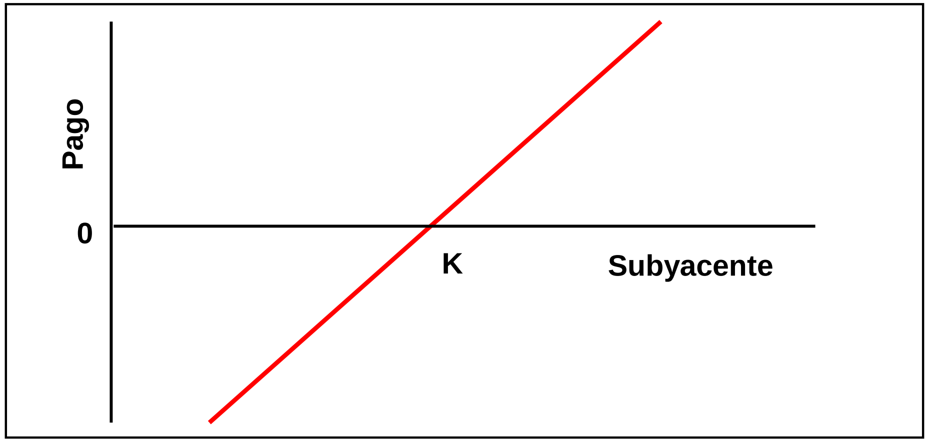
$$FX_{fwd} = \frac{FD_{\$} \times FX_0}{FD_{€}}.$$

Calls y Puts

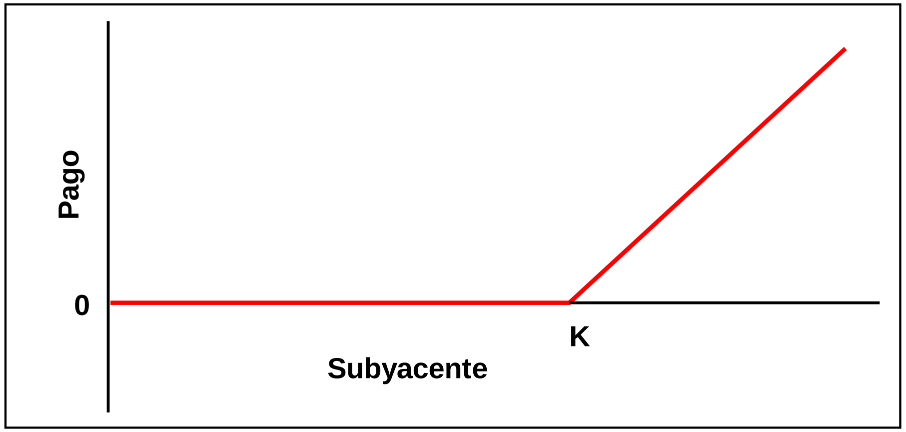
Los forwards son ejemplos (sencillos) de derivados: contratos que pagan en función del comportamiento de algún subyacente.

Un derivado europeo es un contrato que paga a vencimiento T una cantidad $G(S_T)$, donde S_T es el valor de una subyacente S en tiempo T.

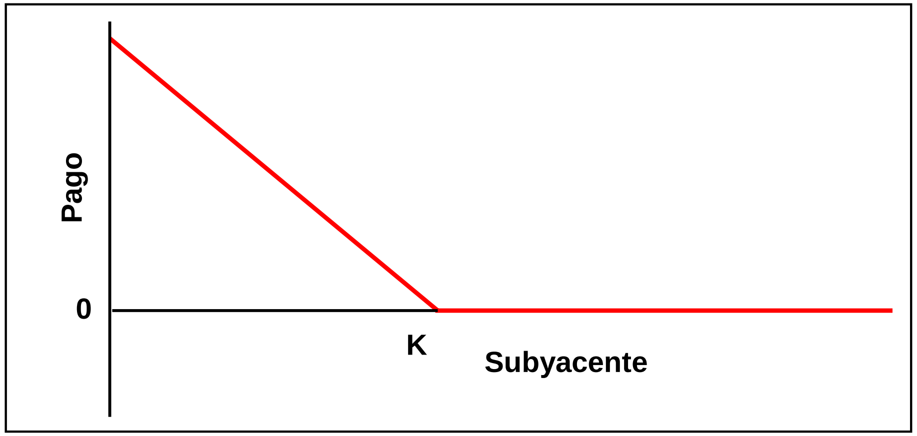
En el caso del forward, $G(S_T) = S_T - K$:



Una call europea es un instrumento que paga $G(S_T) = \max(0, S_T - K)$:

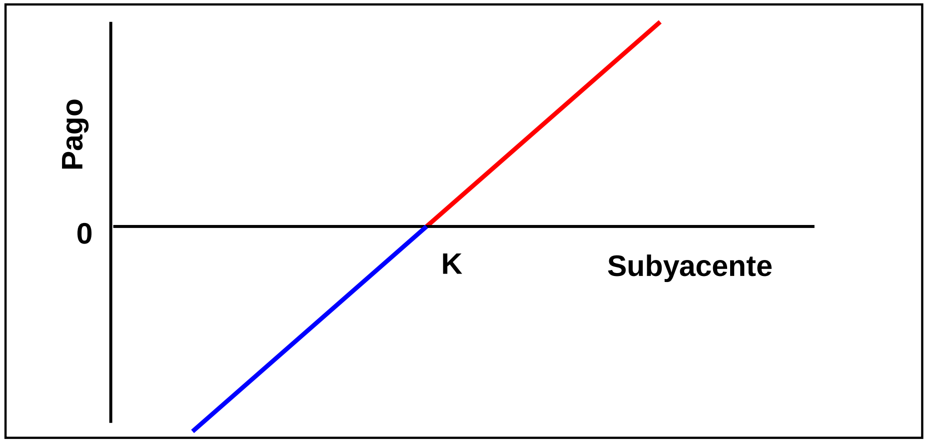


Una put europea es un instrumento que paga $G(S_T) = \max(0, K - S_T)$:



Paridad Call/Put

Una cartera de una call comprada y una put vendida del mismo vencimiento y strike replica exactamente un contrato forward sobre el subyacente:



$$\boxed{\text{precio}_{\text{call}} - \text{precio}_{\text{put}} = \text{precio}_{\text{forward}}}$$

Con una call y una put se replica el forward.

Igualmente, con una call y un forward se puede replicar la put.

El forward se replica con el subyacente y un bono cupón cero.

El subyacente (a vencemiento) es equivalente a una call con strike 0.

De modo que se puede replicar la put con dos calls y un bono cupón cero.

Replicando pagos generales

Cualquier derivado europeo cuyo pago es lineal en trozos se puede replicar con una cartera de calls y un bono cupón cero.

Como cualquier función se puede aproximar por una función lineal a trozos, cualquier derivado europeo se puede replicar con la precisión deseada por una cartera de calls y un bono cupón cero.

3. Replicación dinámica

Introducción

Con una cartera de calls y un bono cupón cero podemos replicar cualquier derivado europeo. De esta manera, podemos valorar un derivado europeo en función de precios de calls y bonos. Sin embargo, no sabemos valorar una call.

En los ejemplos que hemos visto hasta ahora, la cartera de replicación, una vez montada, no se toca hasta vencimiento. Ésta es replicación estática.

Malas noticias: $\boxed{\text{Es imposible replicar una call estáticamente.}}$

Dos ingredientes nuevos para poder replicar y valorar una call:

- Un modelo de evolución del subyacente
- Un algoritmo de gestión dinámica de una cartera de replicación

Modelo Black-Scholes

El cambio del valor del subyacente en el intervalo de tiempo ΔT es ΔS.

El modelo Black-Scholes es

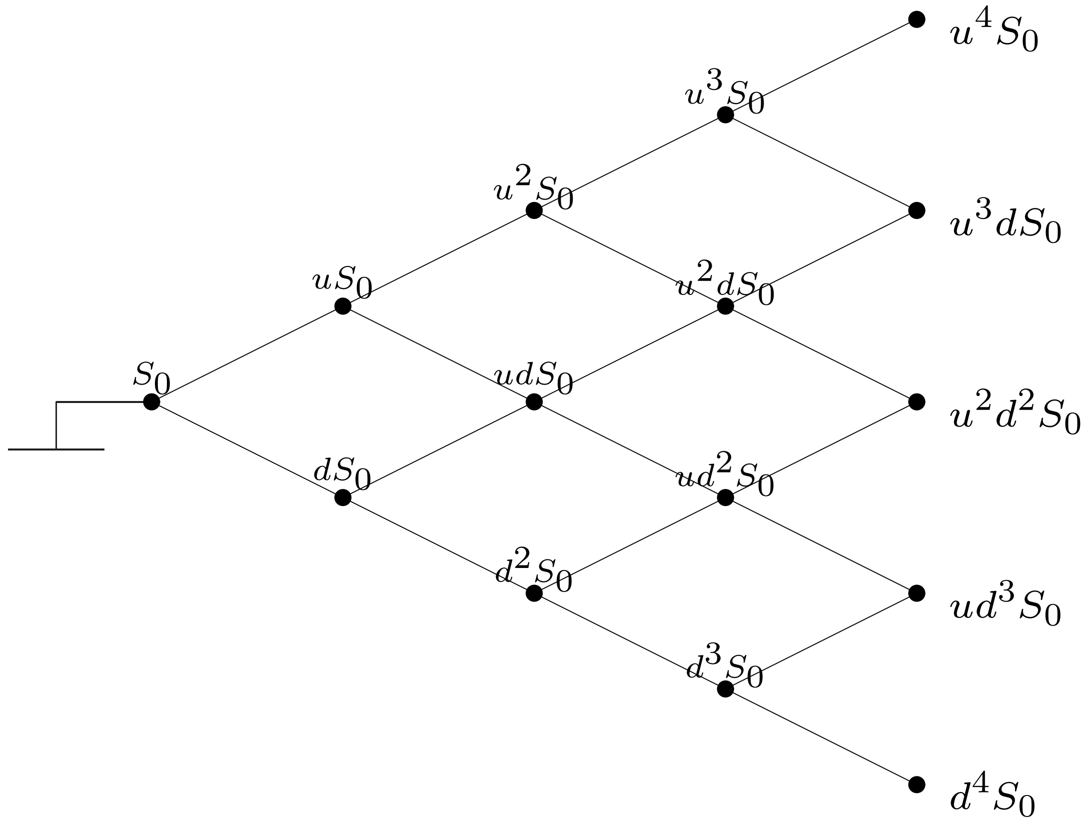
$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta T + \sigma \sqrt{\Delta T} Z,$$

donde Z es una normal de media 0 y varianza 1.

El rendimiento en cada salto es una variable normal de media $\mu \Delta T$ y varianza $\sigma^2 \Delta T$.

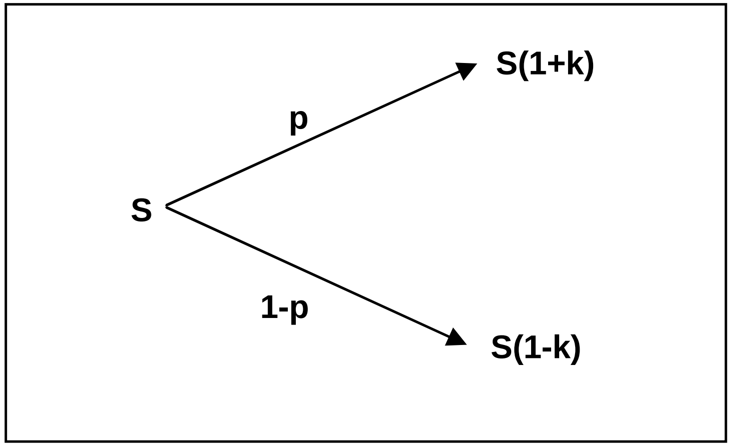
Este proceso se llama Movimiento Browniano Geométrico. Su logaritmo es un Movimiento Browniano.

Aproximación por árbol



En cada nodo, el subyacente sólo puede tomar dos valores en el próximo salto temporal.

La evolución del subyacente en el árbol es una buena aproximación discreta de la evolución Black-Scholes.



Elegimos la probabilidad p y el valor k de modo que la media y la varianza del rendimiento en cada salto sean iguales a los del modelo Black-Scholes:

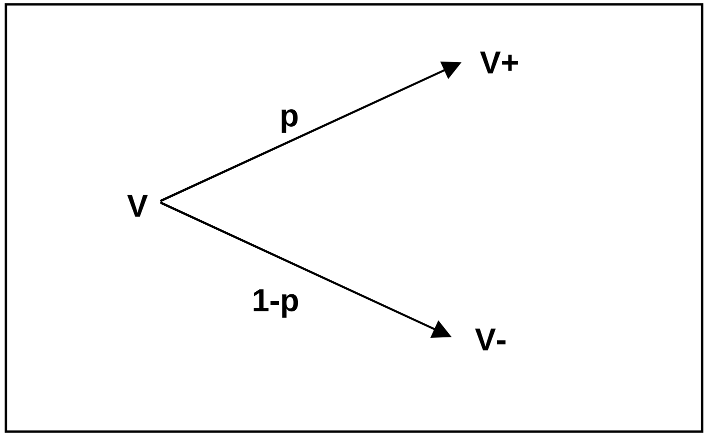
$$k(2p-1) = \mu\,\Delta T$$
$$k^2 4p(1-p) = \sigma^2\,\Delta T$$

Las soluciones son

$$k \approx \sigma\sqrt{\Delta T} \qquad p \approx \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{\Delta T}$$

Valoración en el árbol

Supongamos que tenemos un instrumento cuyo valor sólo depende del tiempo y del valor del subyacente. ¿Cuál es la relación entre su valor en un nodo y sus valores en los dos nodos hijos?



Vamos a crear una cartera que replique los valores del instrumento en los dos nodos hijos. Por ausencia de arbitraje, el valor del instrumento y el de la cartera tendrán que coincidir en el nodo original.

$$\boxed{\text{Ponemos los tipos de interés a cero, para simplificar la exposición}}$$

Cartera de replicación:

- Un bono cupón cero de plazo ΔT y nominal β
- α unidades del subyacente

Su valor ahora es $\beta\, FD + \alpha S = \beta + \alpha S$.

Dentro de ΔT, el valor de la cartera es $\beta + \alpha S(1+k)$ en el nodo superior y $\beta + \alpha S(1-k)$ en el nodo inferior.

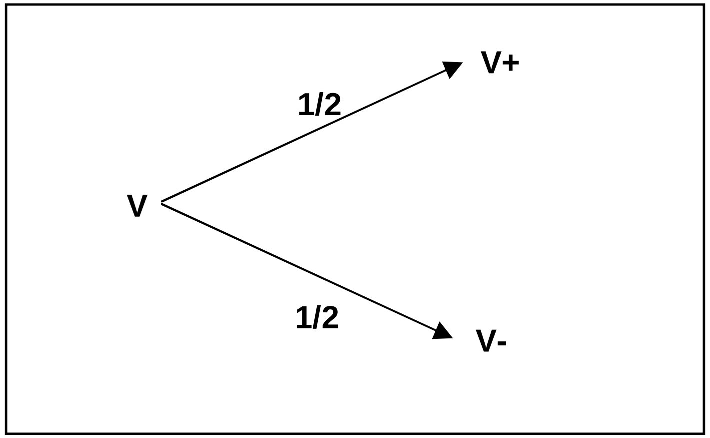
Resolvemos el sistema lineal

$$\beta + \alpha S(1+k) = V^+$$
$$\beta + \alpha S(1-k) = V^-$$

y sustituimos los valores de α y β en el valor inicial de la cartera para obtener el valor del instrumento en el nodo inicial:

$$\boxed{V = \frac{V^+ + V^-}{2}}$$

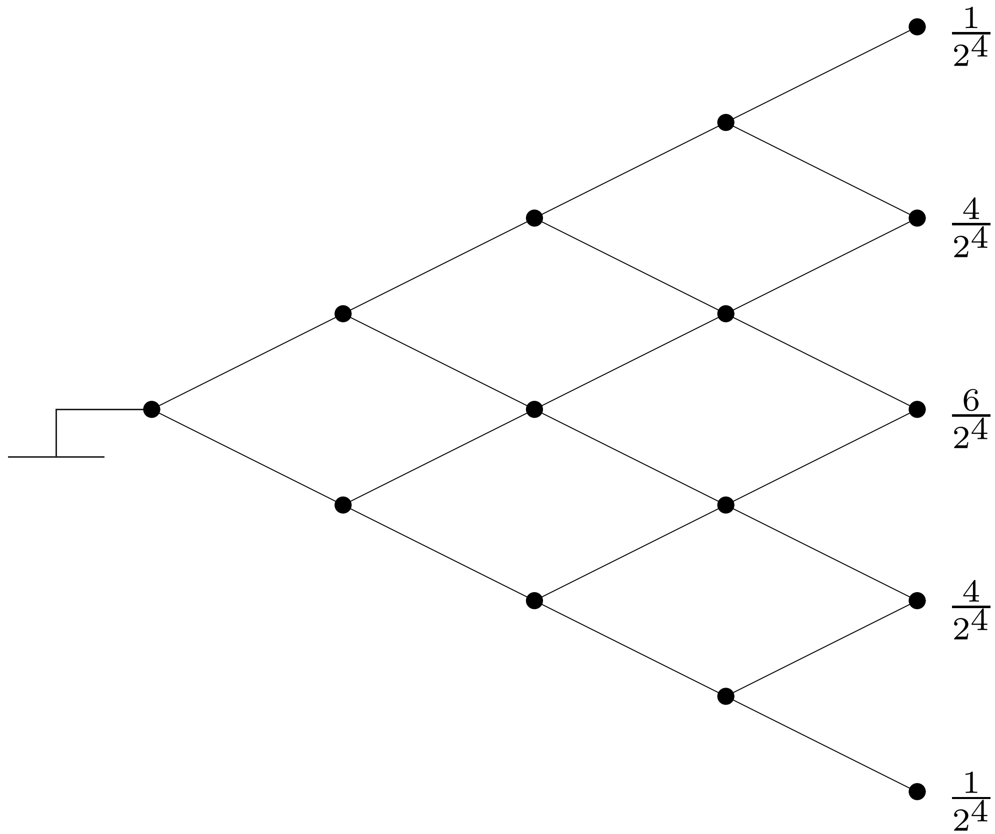
Los valores del instrumento están relacionados entre si por probabilidades distintas a las del proceso subyacente:



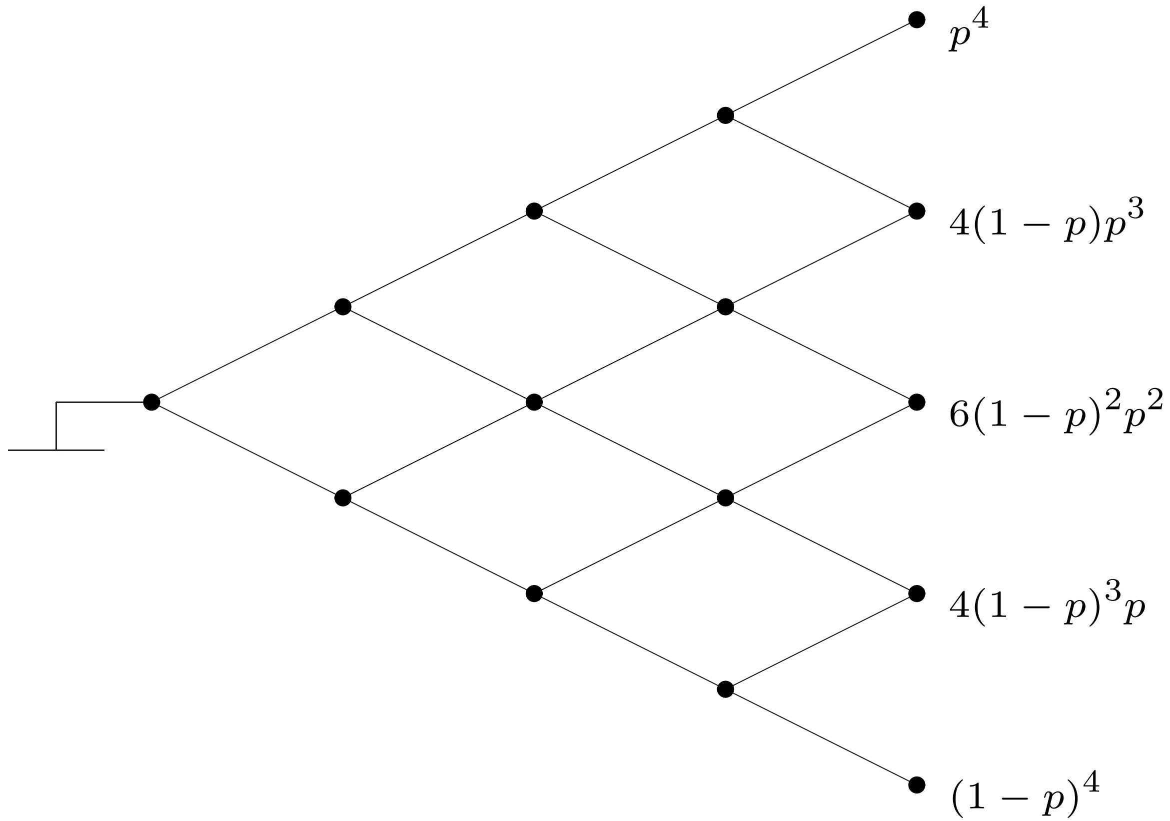
Estas probabilidades, que vienen del argumento de ausencia de arbitraje, se denominan probabilidades riesgo neutro.

Ahora valoramos la call en el árbol empezando por el vencimiento (donde conocemos el valor (pago) de la call) y yendo hacia atrás hasta el nodo raíz del árbol, momento en que conseguimos el valor hoy de la call.

El valor hoy es el promedio riesgo neutro de los valores a vencimiento



Las probabilidades "reales" de S:



Martingalas

Bajo la probabilidad riesgo neutro el valor del instrumento es una martingala: su valor en un nodo es el promedio de sus valores futuros.

El subyacente también es martingala bajo la probabilidad riesgo neutro:

$$\frac{1}{2}S(1+k)+\frac{1}{2}S(1-k)=S$$

Teorema: Un (modelo de un) mercado financiero está libre de arbitraje si, y solo si, existe una probabilidad tal que todos los instrumentos son martingalas bajo esta probabilidad.

En el mundo riesgo neutro, el promedio del rendimiento $\frac{\Delta S}{S}$ en cada salto es 0 y su varianza es $\sigma^2 \Delta T$: ¡ ha desaparecido la deriva!

La valoración del instrumento es independiente de la deriva del subyacente

La cantidad μ/σ (el ratio de Sharpe) es una medida del riesgo de un activo. En el mundo riesgo neutro este ratio es 0: de allí el nombre "riesgo neutro".

No se nos olviden los tipos

Hasta ahora hemos asumido que los tipos de interés están en cero (los FD son todos 1).

Si la curva de factores de descuento es $FD(T)$ y si, además, asumimos que los tipos futuros son los tipos forward de esta curva (se cumplen los forwards, no hay incertidumbre en tipos) quien es martingala no es el valor del instrumento sino el valor descontado del instrumento: $FD(T)V(T)$.

El valor hoy es el promedio riesgo neutro de los valores descontados a vencimiento

Cobertura

¿Y la replicación de la call (o el instrumento que sea)?

Se replica con el subyacente y un bono cupón cero (un depósito). El argumento de ausencia de arbitraje nos dice cuanto de cada debemos tener (el α y el β). En cada salto temporal recomponemos la cartera para ajustarla a los nuevos valores de α y β. Este proceso es autofinanciado: el valor total de la cartera no cambia al recomponerla.