Cálculo estocástico: una introducción

Mathieu Kessler

Departamento de Matemática y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena

Murcia, Marzo 2010

Guión

Guión

1. Movimiento Browniano
   - Reseñas históricas
   - Modelización y propiedades básicas.
2. Integrales estocásticas
   - Introducción
   - Esbozo de la construcción
3. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Reseñas históricas

Dos derivaciones paralelas:

- En la modelización física del movimiento molecular: desde Brown hasta Einstein (1905)
- Teoría matemática de la probabilidad y de los procesos estocásticos:
  trabajo pionero de Bachelier (1900) en su interés por los modelos para precios de acciones y opciones.

Movimiento Browniano y movimiento molecular

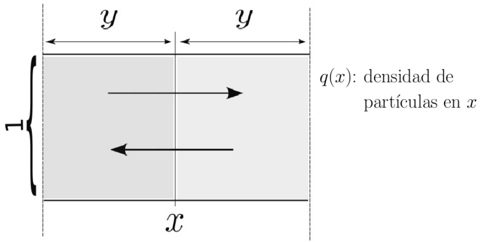
Hitos:

- 1827: El botánico R.Brown: movimiento de las partículas de polen esparcidas en el agua.
- 1877: Delsaux: el movimiento de las partículas individuales se debe a los impactos de las moléculas de liquido. $\Rightarrow$ su velocidad varia por un gran número de pequeños choques.
- 1905: Einstein: el movimiento observado no es el resultado de choques individuales sino que entre los instantes de observación, la velocidad cambia sin parar.
    - $\Rightarrow$ modelo para el desplazamiento neto entre dos tiempos de observación.
    - $\Rightarrow$ estimación del coeficiente de difusión térmica.

Movimiento Browniano y movimiento molecular

Lo que hizo Einstein

- Y: primera componente desplazamiento neto de una partícula durante τ (corto intervalo tiempo).
- Suponemos $Y = \pm y$, $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(Y = -y) = 1/2$.



Movimiento Browniano y movimiento molecular

- El número neto de partículas que se desplazan de izquierda a derecha en el intervalo τ:

$$\frac{1}{2}q(x-y/2)y-\frac{1}{2}q(x+y/2)y \simeq -\frac{1}{2}\frac{dq}{dx}(x)y^2.$$

- El flujo de partículas:

$$-\frac{1}{2}\frac{dq}{dx}(x)\frac{y^2}{\tau} \qquad = -D\frac{dq}{dx}(x),$$

D: coeficiente de difusión térmica, Ley de Fick

Movimiento Browniano y movimiento molecular

- Se identifica
$$D = \frac{1}{2}\frac{y^2}{\tau}.$$
- No podemos observar y, pero observamos
$$Y_{\Delta t} = \sum_{i=1}^{1/\tau} Y_i,$$
Y_i, independientes $\mathbb{P}(Y_i = \pm y) = 1/2$, $var(Y_i) = y^2$.
$\Rightarrow var(Y_{\Delta t}) = \frac{1}{\tau}y^2$,
$$D = \frac{1}{2} var(Y_{\Delta t}).$$
- Perrin (1926): primera estimación de N, el número de Avogadro.

Louis Bachelier

- Tesis doctoral marzo 1900, "Teoría de la especulación". Revisor: H. Poincaré.
- Formación en física matemática, ecuación del calor...
- En su tesis:
  - Los precios como proceso de Markov; deduce la e.d.p que satisface la densidad de transición $\Rightarrow$ proceso Gaussiano.
  - Deducción matemática del movimiento browniano como límite de caminatas aleatorias.
  - Obtiene la ley del máximo de un movimiento browniano; la probabilidad de que supere un determinado umbral.
  - Usa su modelo para calcular el precio de opciones.

"El padre de las matemáticas financieras"

El movimiento Browniano como proceso estocástico

Buscamos un modelo para el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$,.
X_t: posición de una partícula en el momento t.

Para que sea razonable, pedimos:

1. $X_{t+\Delta} - X_t$ es independiente de todas las variables X_s, $s \leq t$.
2. Los incrementos son estacionarios: es decir la distribución de $X_{t+\Delta} - X_t$ no depende de t.
3. Continuidad: Para todo $\delta > 0$, ,
$$\lim_{\Delta \downarrow 0} P(|X_{t+\Delta} - X_t| > \delta)/\Delta = 0.$$

Si, además, $X_0 = \mu$,

$$\boxed{\Longrightarrow \qquad \text{Para todo } t, \quad X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 t)}$$

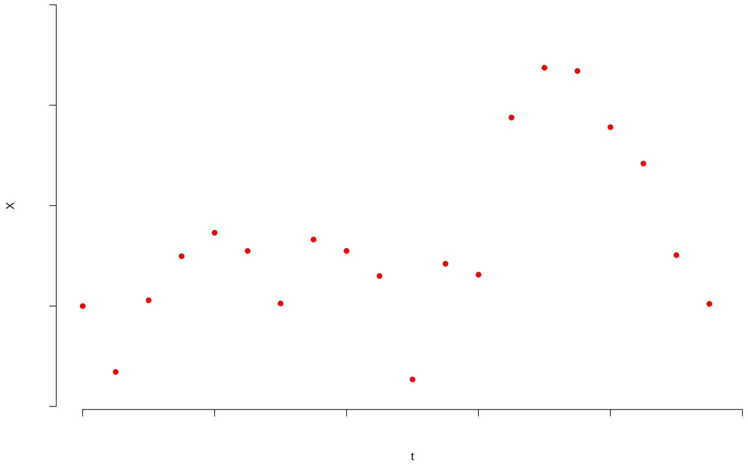
El movimiento Browniano

El movimiento Browniano estándar, $(B_t)_{t\geq 0}$, es un proceso continuo Gaussiano, con incrementos estacionarios e independientes, que cumple $B_0 = 0$.
Tenemos

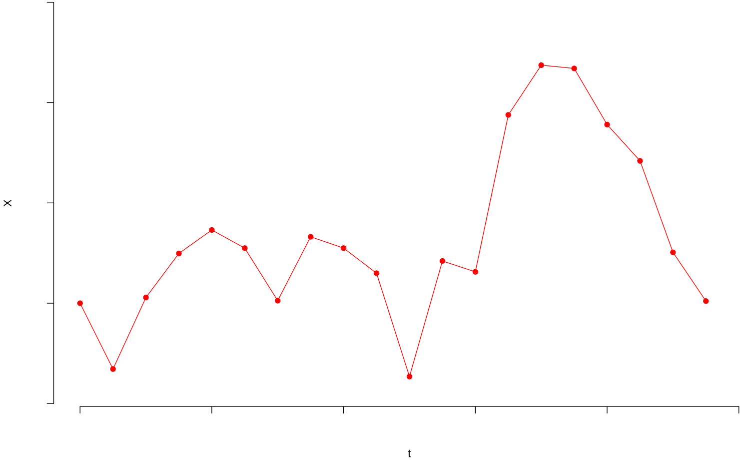
$$B_{t+\Delta} - B_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta).$$

$$B_t \sim \mathcal{N}(0, t).$$

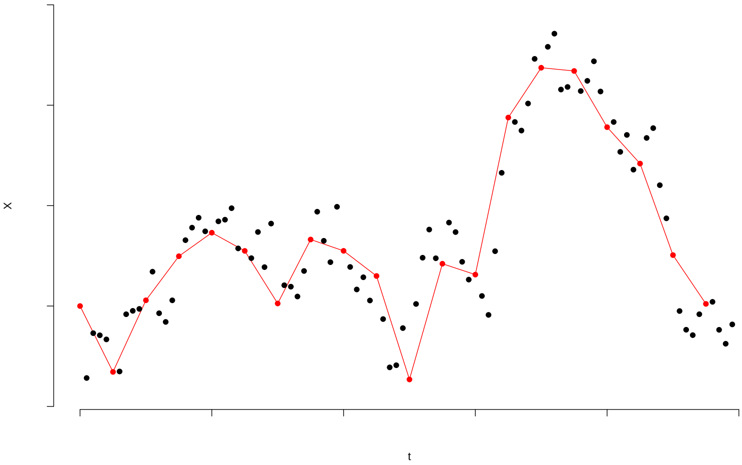
Una realización del movimiento Browniano



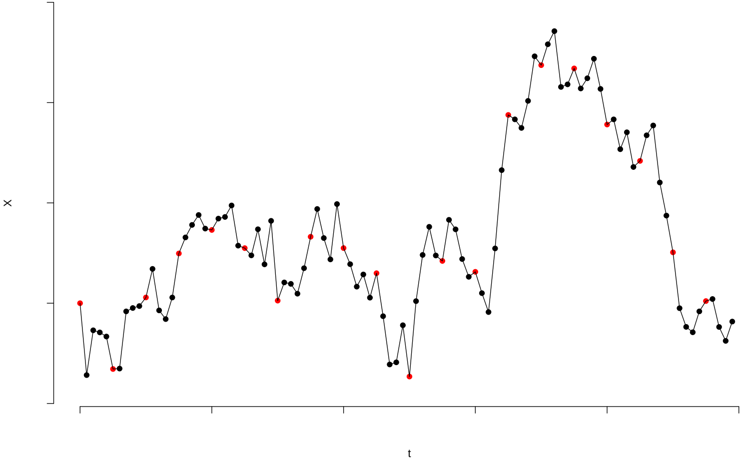
Una realización del movimiento Browniano



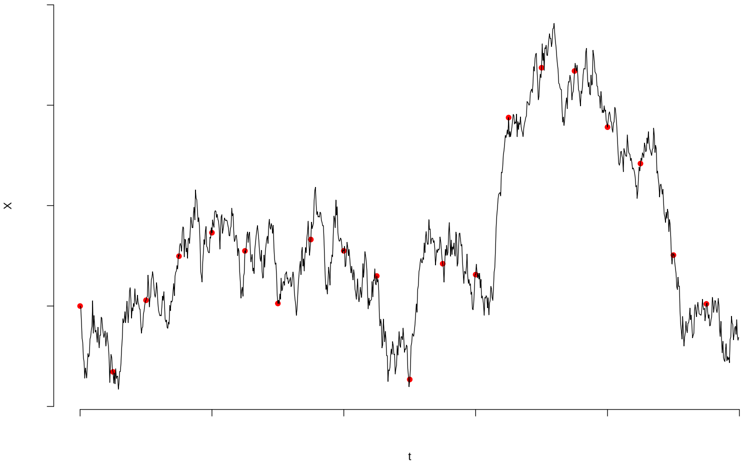
Una realización del movimiento Browniano



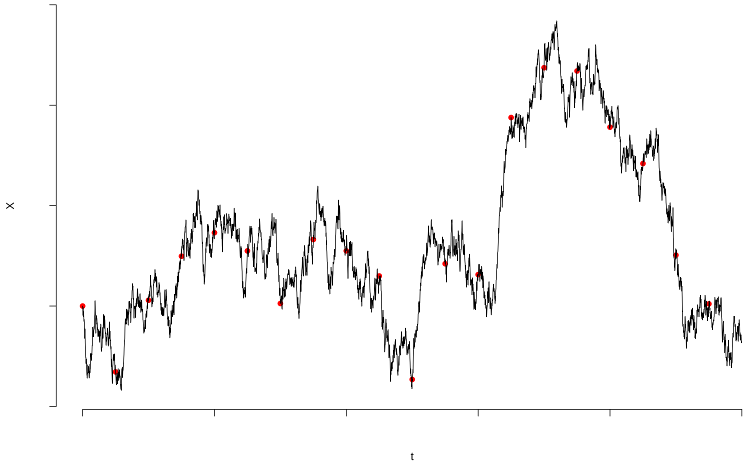
Una realización del movimiento Browniano



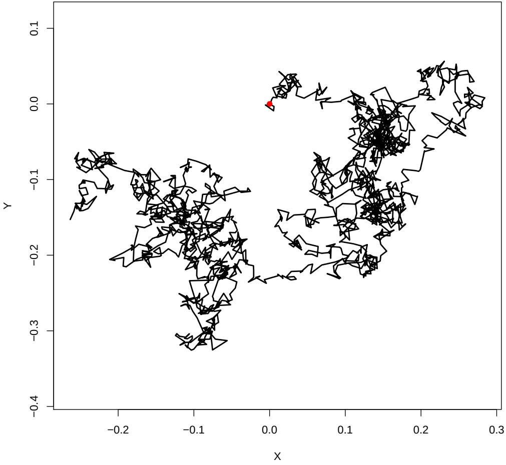
Una realización del movimiento Browniano



Una realización del movimiento Browniano



Una realización del movimiento Browniano bidimensional



Propiedades básicas del movimiento Browniano

Notas

- Una realización del proceso es una trayectoria entera, es decir una función $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.
- Para hablar de distribución de probabilidad de un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$, debemos introducir el concepto de probabilidad sobre espacios de funciones. N. Wiener fue el primero que lo hizo. Notación $(W_t)_{t\geq 0}$: el proceso de Wiener ($=$ Movimiento Browniano)

Propiedades básicas del movimiento Browniano

Si consideramos una realización del proceso,

1. Es una función continua.
2. Es una función con variación infinita : dado $[0, T]$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \left| X_{t_i} - X_{t_{i-1}} \right|, \text{ para } 0 = t_0 < \ldots < t_n = T \right\}$$

   no está acotado.
3. No es derivable en (casí) ningún punto.

Importancia del movimiento Browniano

El movimiento Browniano ha adquirido una importancia crucial

- Aparece cuando se usa argumentos asintóticos.
- Teorema de representación de Lévy:

  (Casi) Cualquier martingala contínua es un movimiento Browniano con un cambio de tiempo.

  - $(X_t)_{t\geq 0}$ es una martingala si $\mathbb{E}[X_t|X_u, u \leq s] = X_s$. (e.g. precios descontados)
  - Dado X, existe B y g, tal que $X_t = B_{g(t)}$.
- Se dispone del cálculo de Itô para estudiar transformadas del movimiento Browniano $Y_t = f(B_t)$.

Guión

Integrales estocásticas

- Langevin y otros:

$$\frac{dX}{dt} = a(t, X_t) \qquad\qquad + b(t, X_t)\xi_t,$$

donde $\xi_t, t \geq 0$, son variables normales independientes.
En su forma integral:

$$X_t = \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)\xi_s ds.$$

El movimiento Browniano de Einstein: $a = 0$, $b = 1$,

$$B_t = \int_0^t \xi_s ds,$$

$(\xi_t)_{t\geq 0}$ sería la derivada de $(B_t)_{t\geq 0}$.

Integrales estocásticas

- ¿Cómo dar sentido a "$\int_0^t b(s, X_s) dB_s$"?
  (B de variación infinita $\Rightarrow$ no es una integral de Riemann-Stieljes.)
- Itô en los años 40, construyó la teoría de las integrales estocásticas.
- En esta teoría, no se presta interés a $(\xi_t)_{t \geq 0}$, el "ruido blanco", sino que se da sentido a $\int_0^t f(s) dB_s$.

Esbozo de la construcción

Consideramos

$$I(f) = \int_0^t f(s)dB_s.$$

Consideramos una partición de $[0,t]$, $0 = t_0 < \ldots < t_n = t$,
Si f es una función aleatoria constante por trozos ("step function") con $f(s) = f_j$ si $s \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} f_j \left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right)$$

- $I(f)$ es una variable aleatoria centrada.
- Su varianza es
  $\|I(f)\|^2_{L^2(P)} = E[I(f)^2] = \sum_{j=1}^{n} E[f_j^2]\,(t_{j+1} - t_j)$

Esbozo de la construcción

Para una función aleatoria en general f en $L^2(P)$, podemos encontrar una secuencia $f^{(n)}$ de "step functions" tal que

$$f^{(n)} \xrightarrow{L^2(P)} f$$

Tenemos que

- $I(f^{(n)})$ converge en $L^2(P)$.
- $E[I(f^{(n)})^2] \longrightarrow \int_0^t E[f^2(s)]ds$

El límite **no** depende de la secuencia escogida $f^{(n)}$.

Itô definió la integral estocástica de f como

$$\boxed{I(f) = \int_0^t f(s)dB_s := \lim_{n\to\infty} I(f^{(n)}) \text{ en } L^2(P)}$$

Integrales estocásticas

- Itô estudió de manera extensiva las propiedades de esta integral $\Rightarrow$ cálculo estocástico o cálculo de Itô.
- Proceso de Itô:

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t U_s ds + \int_0^t V_s dB_s.$$

- La muy celebrada: "Fórmula de Itô". Una regla de la cadena para $u(t, Z_t)$.
  $\Rightarrow$ Fórmula de Black & Scholes.

Guión

Ecuaciones diferenciales estocásticas

Tiene ahora sentido buscar un proceso X que satisfaga

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s$$

que también se escribe

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t; \qquad X_0$$

Ecuación Diferencial Estocástica (EDE)
Proceso solución : " proceso de difusión."

Ecuaciones diferenciales estocásticas

Tenemos teoremas de existencia, de unicidad y también esquemas numéricos para obtener soluciones aproximadas.
Aparecen por una parte en modelos que sean análogos estocásticos de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo de modelos basados en e.d.e

El modelo más simple de crecimiento de una población:

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t,$$

a_t: tasa de crecimiento instantáneo en t.
Tasa de crecimiento constante: $a_t = r$.
Si introducimos una perturbación aleatoria de r: $a_t = r + \alpha\xi_t$,

$$\text{es decir:} \qquad dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t.$$

Cálculo de Itô:

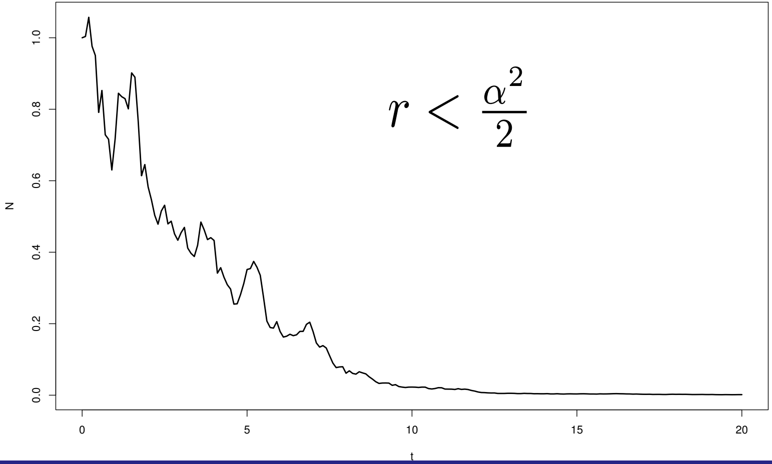
$$\ln\left(\frac{N_t}{N_0}\right) = \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right) t + \alpha B_t, \Rightarrow \boxed{N_t = N_0 \exp\left[\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right) t + \alpha B_t\right]}$$

Movimiento Browniano Geométrico

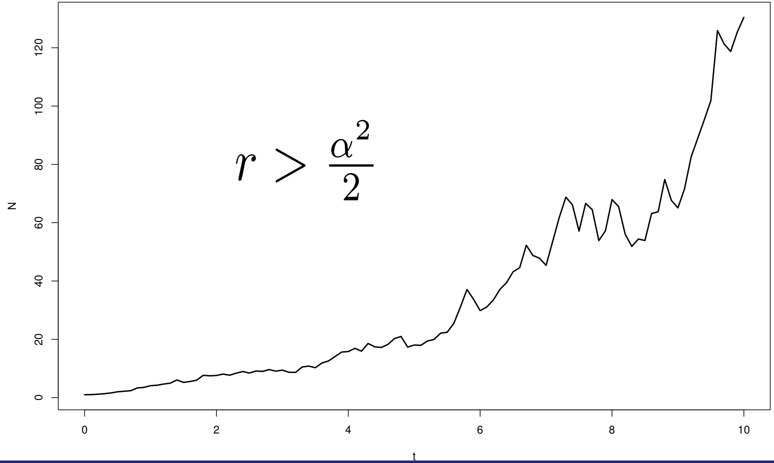
$$\boxed{N_t = N_0 \exp\left[\left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right) t + \alpha B_t\right]}$$

- Samuelson (1960): modelo para precios.
- Black-Scholes-Merton (1973): el MBG como base.
- Su comportamiento asintótico depende de $r - \frac{\alpha^2}{2}$.

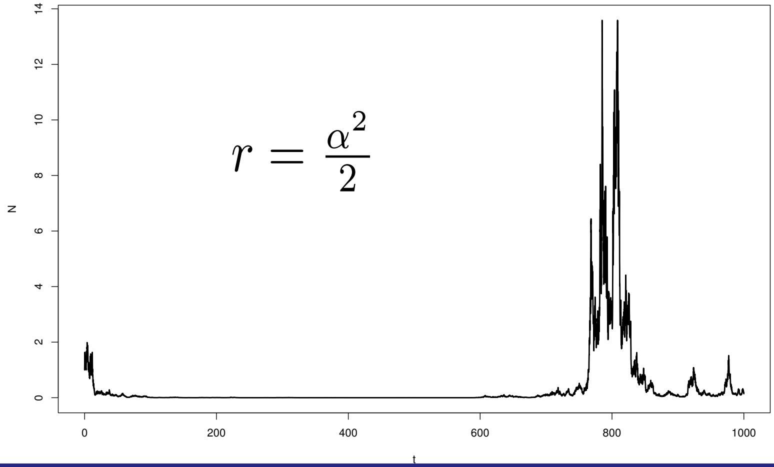
$N_t = N_0 \exp[(r - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_t]$



$N_t = N_0 \exp[(r - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_t]$



$N_t = N_0 \exp[(r - \frac{\alpha^2}{2})t + \alpha B_t]$



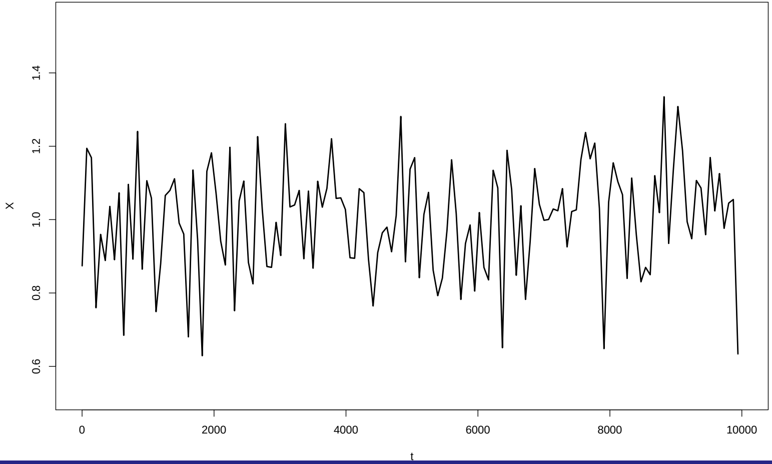
El proceso de Ornstein-Uhlenbeck

1.
$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = U,$$
$\theta, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
Propuesto por Vasicek (1977) para tipo de interés instantáneo.

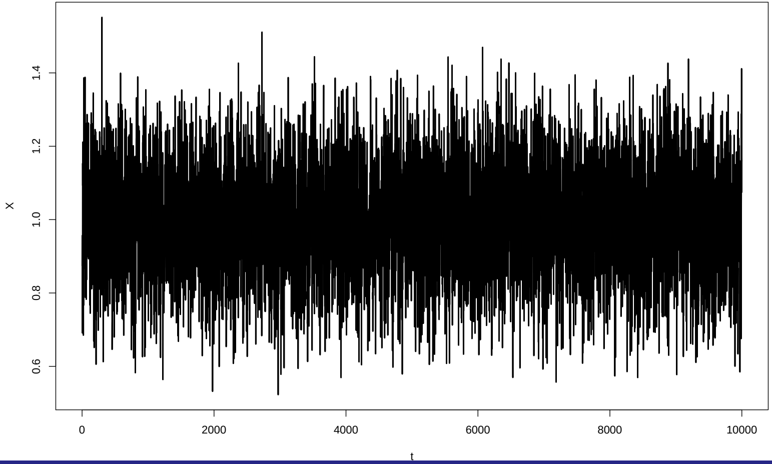
2. Tenemos
$$X_t = Ue^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}) + \int_0^t e^{-\theta(t-s)} dW_s.$$
Por lo tanto
$$\mathcal{L}(X_t | X_s) = \mathcal{N}(e^{-\theta(t-s)} X_s + \mu(1 - e^{\theta(t-s)}), \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\theta t}}{2\theta}).$$

3. Si $\theta > 0$, X es ergódico con probabilidad invariante:
$$\mu(dx) = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/(2\theta))$$

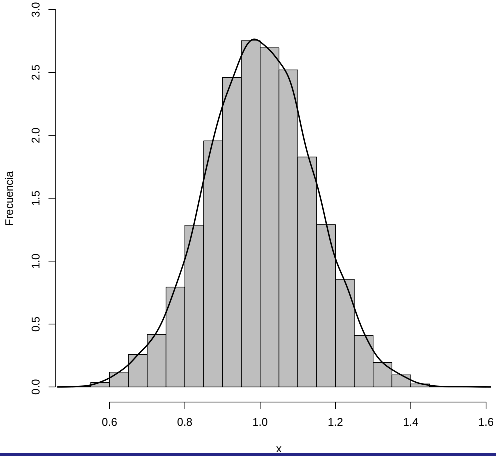
$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = U,$



$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = U,$$



$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = U,$



El proceso de Cox-Ingersoll-Ross

- El proceso de Cox-Ingersoll-Ross

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 = U,$$

  $\theta, \mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.
  Cox, Ingersoll & Ross (1985), para modelizar el tipo de interés instantáneo.
- Existe una solución única hasta la primera vez que el proceso alcance cero.
- Si $2\theta\mu > \sigma^2$, y $\theta > 0$, el proceso nunca alcanza cero, además es ergódico.
- Distribución invariante:

$$\mu_\theta = Gamma(\frac{-2\theta}{\sigma^2}, \frac{2\theta\mu}{\sigma^2}).$$

$$dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t, \quad X_0 = U,$$