Criterios generales

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo NO trivial con 0,2 puntos.

Criterios específicos

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} 2x + ay + 4z &= 2 \\ ax + 2y + 6z &= 0 \\ 4x + 2ay + 10z &= a \end{aligned}\right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para a=0. (0,5 puntos)

Solución.

La matriz ampliada es:

$$(A/b) = \begin{pmatrix} 2 & a & 4 & \vdots & 2 \\ a & 2 & 6 & \vdots & 0 \\ 4 & 2a & 10 & \vdots & a \end{pmatrix}; \ |A| = -2a^2 + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases} \textbf{(0,5 puntos)}$$

- Si $a \neq 2, a \neq -2 \Rightarrow rg(A) = rg(A/b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. **(0,5 p.)**
- Si $a = -2 \Rightarrow rg(A) = 2 \neq rg(A/b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible. **(0,5 p.)**

Sustituimos:

$$(A/b) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & \vdots & 2 \\ -2 & 2 & 6 & \vdots & 0 \\ 4 & -4 & 10 & \vdots & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{matrix} |A| = 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \\ |A/b| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg(A/b) = 3 \end{matrix}$$

- Si $a = 2 \Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A/b) \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. **(0,5 p.)**

$$a = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x + 4z &= 2 \\ 2y + 6z &= 0 \\ 4x + 10z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 6 \\ z &= -2 \end{aligned}\right\} \textbf{(0,5 puntos)}$$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

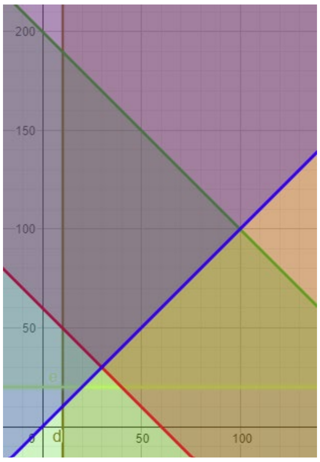
b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

Solución:

Sea x = número de contenedores de cereales e y = número de contenedores de piensos compuesto. El problema planteado es:

$$\left.\begin{array}{l} Min\ C(x,y)=2x+3y \\ s.a:\ \ x+y\leq 200 \\ \qquad\ x+y\geq 60 \\ \qquad\ y\geq x \\ \qquad\ x\geq 10,\ y\geq 20 \end{array}\right\}$$ Planteamiento **(0,6 puntos)**

La región factible es **(0,5 puntos)**:



$$\left.\begin{array}{l} A=(10,50)\Rightarrow C(10,50)=170 \\ B=(10,190)\Rightarrow C(10,190)=590 \\ C=(100,100)\Rightarrow C(100,100)=500 \\ D=(30,30)\Rightarrow C(30,30)=150 \end{array}\right\}\Rightarrow Min.:x=30,\ y=30$$

Vértices **(0,1 por vértice); ** Solución **(0,5 puntos)**

El coste mínimo es: $C(30,30)=150$ € **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^2 - 18q + 14$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p = 10 - q$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)
b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)
c) El precio de venta óptimo (0,5 puntos)
d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Solución:

a) La función de Beneficios será:

$$B(q) = I(q) - C(q) = (10 - q)q - (q^2 - 18q + 14) = -2q^2 + 28q - 14$$ **(0,5 puntos)**

b) La función a maximizar será:

$$Max\, B(q) = -2q^2 + 28q - 14$$

Derivamos la función para obtener el óptimo:

$B'(q) = -4q + 28 = 0 \Rightarrow q = 7$ **(0,5 puntos)**

$B''(q) = -4 \Rightarrow q = 7$ es el nivel de producción que maximiza el beneficio **(0,5 puntos)**

c) $p = 10 - q = 3$ euros **(0,5 puntos)**

d) Y tenemos: $B_{Max} = 84$ euros. **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 3x-3 & si \quad 0<x<3 \\ ax^2-6x+3a & si \quad x\geq 3 \end{cases}$

a) Hallar el valor de a para que la función sea continua en $x=3$ (1 punto)
b) Para ese valor de a y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

Solución:

a) Para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en el punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} 3x-3=6 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} ax^2-6x+3a=12a-18 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\Rightarrow 12a-18=6\Rightarrow a=2$$

(1 punto)

b) Para ese valor de a y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

$$f(x)=2x^2-6x+6$$

La ecuación de la recta tangente es: $y-f(3)=f'(3)(x-3)$ **(0,5 puntos)**

$$f'(x)=4x-6\Rightarrow f'(3)=6;\, f(3)=6\Rightarrow y-6=6(x-3)\Rightarrow y=6x-12$$

(1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución:

a) El dominio de la función. **(0,5 puntos)**

$Dom\, f = \mathbb{R}-\{\pm 1\}$; Punto de corte con los ejes: $(0,-1)$

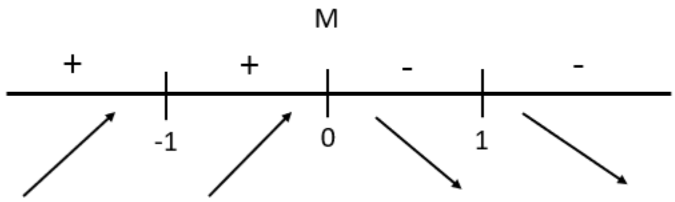
b) Asíntotas verticales y horizontales. **(0,5 puntos)**

Asíntotas verticales: $x=1$; $x=-1$

Asíntotas horizontales: $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0\Rightarrow x=0$$



Decreciente: $(0,1)\cup(1,+\infty)$

Creciente: $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

d) Máximos y mínimos locales. **(0,5 puntos)**

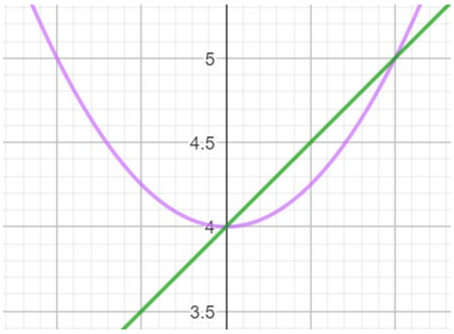
No hay mínimo

Máximo: $x=0\Rightarrow f(0)=-1\Rightarrow(0,-1)$

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=x^2+4$ y la recta $g(x)=x+4$. Calcular su área.

Solución:

La representación gráfica es **(1 puntos)**:



Expresar bien el área **(0,75 puntos)**:

$$A=\int_0^1\left[(x+4)-(x^2+4)\right]dx=\int_0^1(-x^2+x)dx=-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{6}u^2.$$

Calcular la primitiva **(0,5 puntos),** resultado final **(0,25 puntos)**

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto).

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$ y las rectas $x=0$ y $x=1$ (1,5 puntos).

Solución:

a) $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+2}\,dx=Ln(e^x+2)+k$ **(cálculo correcto de la primitiva 0,5 puntos; resultado final 0,5 puntos)**

b) $\displaystyle\int_0^1\frac{e^x}{e^x+2}\,dx=Ln(e^x+2)\Big]_0^1=Ln(e+2)-Ln(3)=Ln\left(\frac{e+2}{3}\right)$ **(expresar bien el área, 0,5 puntos; aplicar bien la regla de Barrow, 0,5 puntos; resultado final, 0,5 puntos)**

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.

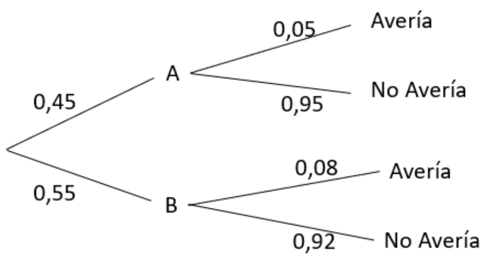
   i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)

   ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).

b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal con desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

Solución:

a) Hacemos el árbol:



$$P(Averia) = 0,45 \times 0,05 + 0,55 \times 0,08 = 0,0665$$ **(0,75 puntos)**

$$P(B / Averia) = \frac{P(Averia \cap B)}{P(Averia)} = \frac{0,55 \times 0,08}{0,0665} = 0,66165$$

(Expresión teorema de Bayes 0,5 puntos, resultado final 0,25 puntos)

b) $IC_{94\%} = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$; **(expresión correcta 0,4 puntos)**

Sustituimos los valores:

$$IC_{94\%} = \left(10 - 1,88 \frac{3}{\sqrt{100}}, 10 + 1,88 \frac{3}{\sqrt{100}} \right) = (9,436 \quad 10,564)$$

Para el 94% tenemos que: $z_{\alpha/2} = 1,88$ **(este valor 0,3)**

(resultado final 0,3 puntos)