Criterios generales

Cada error de cálculo trivial se penalizará con 0,1 puntos y cada error de cálculo NO trivial con 0,2 puntos.

Criterios específicos

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a=3. (0,5 puntos)

Solución.

La matriz ampliada es:

$$(A/b)=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 2 & a & \vdots & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix};\ |A|=a^2-a=a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases} \textbf{(0,5 puntos)}$$

- Si $a \neq 0, a \neq 1 \Rightarrow rg(A)=rg(A/b)=3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. **(0,5 p.)**
- Si $a=0 \Rightarrow rg(A)=2\ ; rg(A/b)=3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible. **(0,5 p.)**
- Si $a=1 \Rightarrow rg(A)=2=rg(A/b) \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. **(0,5 p.)**

$$a=3 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y+z=1 \\ 2y+3z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1/3 \\ y=0 \\ z=2/3 \end{array}\right\} \textbf{(0,5 puntos)}$$

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

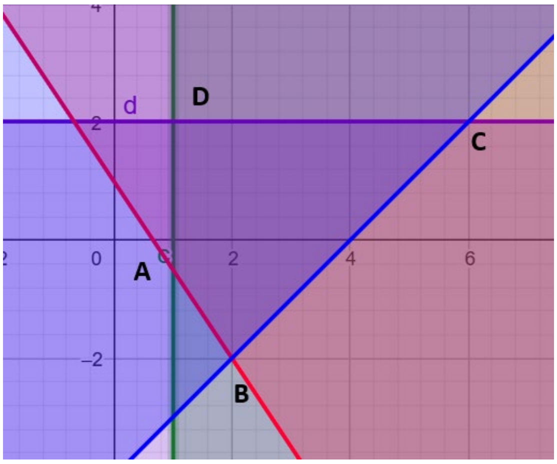
$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y \geq 2 \\ x-y \leq 4 \\ x \geq 1 \\ y \leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

Solución:

La región factible es **(0,4 puntos)**:



$$\left.\begin{array}{l} A=\left(1,-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow f\left(1,-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{2} \\ B=(2,-2)\Rightarrow f(2,-2)=18 \\ C=(6,2)\Rightarrow f(6,2)=14 \\ D=(1,2)\Rightarrow f(1,2)=-6 \end{array}\right\}$$

Mínimo (1,2); Máximo (2, -2)

Vértices **(0,3 por vértice y valores: 0,1 por valor)**:

Solución **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q)=q^2-16q+48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p=12-q$, donde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción.
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa.
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio.
d) El valor del beneficio máximo.

Solución:

a) La función de beneficios será:

$$B(q)=I(q)-C(q)=(12-q)q-(q^2-16q+48)=-2q^2+28q-48$$ **(0,5 p)**

b) Derivamos la función:

$$B'(q) = -4q + 28 = 0 \Rightarrow q = 7$$
$$B''(q) = -4 < 0 \Rightarrow Maximo$$
(0,5+0,5 puntos)

c) $p = 12 - 7 = 5$ euros. **(0,5 puntos)**

d) $B_{Max} = B(7) = 50$ **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax + 5 & si \quad x \le -1 \\ bx^2 - 2x + 1 & si \quad -1 < x \le 2 \\ \dfrac{3x - 1}{(x-1)^2} & si \quad x > 2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio.

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$.

Solución:

a) Para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en el punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} ax + 5 = 5 - a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} bx^2 - 2x + 1 = b + 3 \\ f(-1) = 5 - a \end{array}\right\} \Rightarrow 5 - a = b + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} bx^2 - 2x + 1 = 4b - 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x - 1}{(x-1)^2} = 5 \\ f(2) = 4b - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 4b - 3 = 5 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = 0$$

(cálculo de cada continuidad completa 0,5 puntos, cálculo correcto de cada parámetro 0,25 puntos)

b) La derivada de la función $f'(x)$ para $x > 2$

$$f'(x) = \frac{-3x - 1}{(x-1)^3}$$

(cálculo de la derivada 0,75 puntos, simplificar el resultado 0,25 puntos)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos locales.

Solución:

a) El dominio de la función. $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte: $(2,0)$

(0,5 puntos)

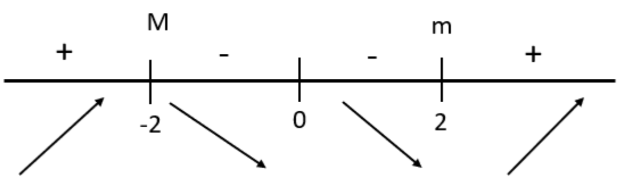
b) Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x} = \infty \Rightarrow$ no hay

(0,5 puntos)

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 \Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ x = -2 \end{matrix}$$



Creciente: $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente: $(-2, 0) \cup (0, 2)$

d) Máximos y mínimos locales. **(0,5 puntos)**

Máximo: $(-2, -8)$; mínimo $(2, 0)$

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 3e^{x+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = 3e^{x+2}$, el eje de abscisa y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ (1,25 puntos)

Solución:

a) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$ **(0,5 puntos)**

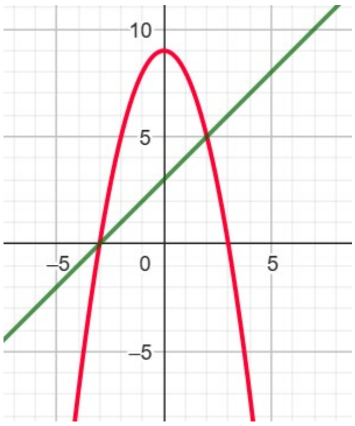
$$f'(-2) = 3;\ f(-2) = 3 \Rightarrow y - 3 = 3(x+2) \Rightarrow y = 3x + 9$$ **(0,75 puntos)**

b) $\int_0^1 3e^{x+2}\, dx = 3e^{x+2} \Big]_0^1 = 3e^2(e-1)$ **(1,25 puntos)**

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 9 - x^2$ y $g(x) = 3 + x$ y calcular su área.

Solución:

La representación gráfica es **(1 puntos)**:



Expresar bien el área **(0,75 puntos)**:

$$A = \int_{-3}^{2} \left(-x^2+9\right) - (3+x)dx = \int_{-3}^{2} \left(-x^2 - x + 6\right) dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x \Big]_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$$

Calcular la primitiva **(0,5 puntos),** resultado final **(0,25 puntos)**

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A) = 0{,}3$, $P(B/A) = 0{,}6$ y $P(A/B) = 0{,}3$

   i. Calcular $P(A \cap B)$. (0,5 puntos)

   ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)

   iii. Calcular $P(A \cup \bar{B})$. (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1,69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99 %. (1 punto).

Solución:

a) i) $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$ **(0,5)**

ii) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A/B)} = \dfrac{0{,}18}{0{,}3} = 0{,}6$

Son independientes pues: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ **(0,5 puntos)**

iii)

$P(A \cup \bar{B}) = \left[\overline{P(B) - P(A \cap B)}\right] = 1 - \left[P(B) - P(A \cap B)\right] = 1 - (0{,}6 - 0{,}18) = 0{,}58$

(0,5 puntos)

b) $IC_{99\%} = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; **(expresión correcta 0,5 puntos)**

Sustituimos los valores:

$$IC_{96\%} = \left(5{,}84 - 2{,}575\frac{\sqrt{1{,}69}}{\sqrt{324}} \quad 5{,}84 + 2{,}575\frac{\sqrt{1{,}69}}{\sqrt{324}}\right) = (5{,}65603 \quad 6{,}02597)$$

(resultado final 0,5 puntos)