RESOLUCIÓN DEL EXAMEN EBAU JUNIO 2023
MATEMÁTICAS II

El objeto de este documento es doble. Por una parte, proporcionar a los profesores y alumnos de Bachillerato de la Región de Murcia la **resolución del examen** de Matemáticas II de la convocatoria EBAU2023-JUNIO. Por otra parte, **agilizar las posibles reclamaciones** a la corrección del examen, toda vez que, habiendo hecho pública la resolución de las cuestiones, pueda ser más fácil indentificar posibles errores en la corrección. Evidentemente, por la propia naturaleza de la disciplina, **una misma cuestión admite múltiples soluciones válidas y correctas** y resulta prácticamente imposible recoger aquí toda esa variedad de soluciones. Por supuesto, cualquier otra solución a cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, **aunque no esté incluida en este documento**.

Como es bien sabido, el examen consta de un total de **ocho cuestiones** y se debe responder a un **máximo de cuatro** de ellas, elegidas libremente por el alumno. Las ocho cuestiones se pueden agrupar por bloques temáticos de la siguiente manera, pero insistimos en que se pueden escoger libremente un máximo de cuatro y en cualquier orden, **independientemente de que pertenezcan o no al mismo bloque temático**:

Cuestiones 1 y 2: Del bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 3 y 4: Del bloque de Análisis (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 5 y 6: Del bloque de Geometría (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 7 y 8: Del bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos una).

Si se responde a más de cuatro cuestiones, sólo se corrigen las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se puden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 6 de junio de 2023.

Luis J. Alías Linares
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

Una papelería vende bolígrafos, rotuladores y libretas. Una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos, un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta, y un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo.

a) **(0,75 p.)** Denotando por x el precio de cada bolígrafo, por y el de cada rotulador y por z el de cada libreta, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente los datos del ejercicio.

b) **(0,25 p.)** Justifique que, con estos datos, no se puede conocer el precio de cada uno de los tres productos.

c) **(1 p.)** Calcule el conjunto de todas las posibles soluciones del sistema.

d) **(0,5 p.)** Sabiendo que una libreta cuesta 18 euros, calcule el precio de cada producto.

Solución: a) Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en donde las incógnitas son el precio unitario de cada uno de los productos. Denotemos por x el precio de cada bolígrafo, por y el precio de cada rotulador y por z el precio de cada libreta. El primer dato del ejercicio es que "una libreta cuesta el doble que un bolígrafo y un rotulador juntos", que da lugar a la primera ecuación:

$$z = 2(x+y) \Longleftrightarrow 2x + 2y - z = 0.$$

El segundo dato del ejercicio es que "un bolígrafo cuesta la sexta parte que una libreta", que da lugar a la segunda ecuación:

$$x = \frac{z}{6} \Longleftrightarrow 6x - z = 0.$$

El tercer dato del ejercicio es que "un rotulador cuesta el doble que un bolígrafo", que da lugar a la tercera ecuación:

$$y = 2x \Longleftrightarrow 2x - y = 0.$$

Por lo tanto, hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2x+2y-z & = & 0 \\ 6x-z & = & 0 \\ 2x-y & = & 0 \end{array}\right.$$

b) Como se puede observar, se trata de un sistema de ecuaciones homogéneo, que es siempre un sistema compatible ya que, al ser la última columna de $A^* = (A|b)$ una columna de ceros, siempre se tiene que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$. En este caso se tiene

$$A^* = (A|b)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A tiene al menos un menor de orden 2 distinto de cero, $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, y su determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 4 - 2 = 0.$$

Por lo tanto, rango$(A) =$ rango$(A^*) = 2 < 3$ y se trata de un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Por lo tanto, con los datos de que se dispone no es posible conocer el precio de cada uno de los productos.

c) El sistema se puede resolver en función de un parámetro. Por ejemplo, eligiendo como parámetro $x = \lambda$ y desechando la primera ecuación, queda el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 6\lambda - z & = & 0 \\ 2\lambda - y & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 6\lambda \\ y & = & 2\lambda \end{array} \right.$$

cuya solución es

$$x = \lambda, \quad y = 2\lambda \quad \text{ y } z = 6\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

d) Sabiendo que $z = 6\lambda = 18$ euros (precio de cada libreta) se concluye que $x = \lambda = 3$ euros (precio de cada bolígrafo) y que $y = 6$ euros (precio de cada rotulador).

Cuestión 2.

Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & a \\ -1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) **(0,5 p.)** Determine para qué valores del parámetro a la matriz A es regular (o invertible).

Se sabe que cuando $a = -2$ la matriz A es regular (o invertible). Para ese valor de a:

b) **(1 p.)** Calcule la inversa de A y compruebe que $A \cdot A^{-1} = I$, con I la matriz identidad de orden 2.

c) **(1 p.)** Resuelva la ecuación matricial $AXA^{-1} + B = C^\top$, donde $C^\top$ denota la matriz traspuesta de C.

Solución: a) Sabemos que A es regular si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso se tiene $|A| = a^2 + a = a(a+1)$. Por lo tanto

$$A \text{ no es regular } \Longleftrightarrow |A| = a(a+1) = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ o } a = -1$$

o, equivalentemente,

$$A \text{ es regular } \Longleftrightarrow |A| = a(a+1) \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq 0 \text{ y } a \neq -1.$$

Es decir, A es regular para todo valor de a distinto de 0 y de -1.
b) Como $a = -2$ se tiene

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |A| = 4 - 2 = 2 \neq 0.$$

Podemos calcular la inversa de A por cualquiera de los métodos válidos. Por ejemplo, utilizando la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A^T) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos que efectivamente se tiene $A \cdot A^{-1} = I$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Despejando X en la ecuación matricial se tiene

$$AXA^{-1} + B = C^{\top} \Longrightarrow AXA^{-1} = C^{\top} - B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot (C^{\top} - B) \cdot A.$$

Calculamos entonces

$$C^{\top} - B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -14 & -2 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 30 & 32 \\ -23 & -24 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bloque 2: Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

Calcule los siguientes límites:

a) **(1,25 p.)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x \,\text{sen}(x)}$.

b) **(1,25 p.)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{3x}$.

Solución: a) Comenzamos calculando

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x\ \text{sen}(x)}=\frac{\cos(0)-1}{0\cdot\text{sen}(0)}=\frac{1-1}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}.$$

Podemos resolver esta indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x\ \text{sen}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\,\text{sen}(2x)}{\text{sen}(x)+x\ \cos(x)}=\frac{-2\,\text{sen}(0)}{\text{sen}(0)+0\ \cos(0)}=\frac{-2\cdot 0}{0+0\cdot 1}=\frac{0}{0}.$$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{-2\,\text{sen}(2x)}{\text{sen}(x)+x\ \cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{-4\cos(2x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\ \text{sen}(x)}\\ &= \frac{-4\cos(0)}{\cos(0)+\cos(0)-0\cdot\text{sen}(0)}\\ &= \frac{-4}{1+1-0}=\frac{-4}{2}=-2.\end{aligned}$$

En resumen

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x\ \text{sen}(x)}=-2.$$

b) En primer lugar observamos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}.$$

Un modo sencillo de resolver esta indeterminación es operando algebraicamente:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x} &= \frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}\cdot\frac{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x}}\\ &= \frac{(\sqrt{9+x})^2-(\sqrt{9-x})^2}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\frac{9+x-(9-x)}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}\\ &= \frac{9+x-9+x}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\frac{2x}{3x(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}\\ &= \frac{2}{3(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3(\sqrt{9+x}+\sqrt{9-x})}=\frac{2}{3(\sqrt{9}+\sqrt{9})}=\frac{2}{3(3+3)}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}.$$

Para los incondicionales de L'Hôpital, la indeterminación inicial también se puede resolver por el método de L'Hôpital, haciendo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{3x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{9-x}}}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}+\frac{1}{2\sqrt{9-x}}}{3}\\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}+\frac{1}{2\sqrt{9}}}{3}=\frac{\frac{1}{\sqrt{9}}}{3}=\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Cuestión 4.

Considere la función $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **(0,5 p.)** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) **(0,5 p.)** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$.

c) **(1 p.)** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

d) **(0,5 p.)** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$.

Solución: a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$. Para resolver esta indeterminación podemos operar algebraicamente, observando que

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1+x^2}{x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}.$$

De este modo,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

También se puede razonar por la regla de los grados. En este caso, como el numerador y el denominador son ambos polinomios de grado 2, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

b) La derivada de $f(x)$ viene dada por

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(1+x^2) - x^2\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x+2x^3-2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$, calculamos primero los puntos críticos de $f(x)$, es decir, las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0.$$

A continuación, estudiamos el signo de $f'(x)$ para ver dónde la función es creciente o decreciente. Como $f'(x) = 0$ solo para $x = 0$, basta con darle valores a $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de este valor. Además, el denominador de $f'(x)$ es siempre positivo, por lo que el signo de $f'(x)$ solo depende del signo del numerador. Observamos que $f'(x) > 0 \iff x > 0$ y que $f'(x) < 0 \iff x < 0$, de modo que $f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$ y decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$.

c) Se trata de una integral racional casi elemental. Operando algebraicamente se tiene

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \frac{x^2+1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

d) Por el apartado c) sabemos que la primitiva general de $f(x)$ es $F(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x + C$. Se trata, por tanto, de calcular el valor de C para que $F(1) = 1$. En este caso

$$F(1) = 1 - \operatorname{arc\,tg} 1 + C = 1 - \frac{\pi}{4} + C = 1 \Longleftrightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

La solución es $F(x) = x - \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{4}$.

Bloque 3: Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Considere las siguientes rectas:

$$r : \begin{cases} x - 2y &= 5 \\ y + z &= 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s : \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1}.$$

a) **(1 p.)** Compruebe que ambas rectas son paralelas.

b) **(1 p.)** Compruebe que el punto $P = (7, 1, -1)$ está en la recta r y calcule su proyección ortogonal sobre la recta s.

c) **(0,5 p.)** Calcule la distancia entre ambas rectas.

Solución: a) El vector director de la recta r viene dado por

$$\vec{v}_r = (1, -2, 0) \times (0, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} = (-2, -1, 1).$$

Además, el vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$. Como ambos vectores son paralelos, significa que las rectas r y s o bien son paralelas o bien son coincidentes. El punto $Q = (8, -3, 3)$ está en s pero no está en r, ya que no cumple la primera de las ecuaciones de r $(8 + 6 \neq 5)$, por lo que se trata de dos rectas paralelas.

Otra forma de resolver este apartado es pasar la recta s a su forma implícita y estudiar el sistema de ecuaciones resultante de las dos rectas. Es ese caso, la recta s se escribe como

$$s : \frac{x-8}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1} \Longrightarrow s : \begin{cases} x - 2y &= 14 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

y el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-2y & = & 5 \\ y+z & = & 0 \\ x-2y & = & 14 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

La matriz del sistema es

$$A^* = (A|b)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

En este caso es muy fácil ver que se trata de un sistema incompatible (la primera y la tercera ecuación son incompatibles). Además, rango$(A) = 2$ y rango$(A^*) = 3$, ya que A tiene solo 2 filas linealmente independientes pero A^* tiene algún menor de orden 3 distinto de 0, por ejemplo,

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 14 \end{array}\right| = 14 - 5 = 9 \neq 0.$$

Esto significa que las rectas son paralelas.

b) El punto $P = (7, 1, -1)$ está en la recta r porque cumple sus dos ecuaciones:

$$r : \left\{\begin{array}{lcl} x-2y & =7-2 & = & 5 \\ y+z & =1-1 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow P \in r.$$

La proyección ortogonal de P sobre s se puede calcular como intersección de la recta s con el plano π perpendicular a s que pasa por P. Vamos entonces a calcular este plano π. Como el vector director de s es $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$, el haz de planos perpendiculares a s viene dado por $2x + y - z + D = 0$, con $D \in \mathbb{R}$. Calculamos el valor de D para que π pase por P:

$$P \in \pi \Longleftrightarrow 2 \cdot 7 + 1 - (-1) + D = 0 \Longleftrightarrow 16 + D = 0 \Longleftrightarrow D = -16.$$

Por tanto, $\pi : 2x + y - z = 16$. Como la recta s es $s : \left\{\begin{array}{rcl} x-2y & = & 14 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right.$, la proyección ortogonal de P sobre s viene dado como la solución del siguiente sistema, que por interpretación geométrica es S.C.D. (no es necesario comprobarlo):

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z & = & 16 \\ x-2y & = & 14 \\ y+z & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow A^* = (A|b)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 16 \\ 1 & -2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ con } |A| = -6.$$

La solución es

$$x = \frac{1}{-6}\left|\begin{array}{ccc} 16 & 1 & -1 \\ 14 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| = \frac{-60}{-6} = 10,$$

$$y = \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 2 & 16 & -1 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{12}{-6} = -2,$$

$$z = \frac{1}{-6}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 16 \\ 1 & -2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-12}{-6} = 2.$$

En conclusión, la proyección ortogonal de P sobre s es el punto $Q = (10, -2, 2)$.

c) La distancia entre ambas rectas se puede calcular directamente como la distancia entre los puntos P y Q del apartado anterior:

$$d(r,s) = d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

ya que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (10,-2,2) - (7,1,-1) = (3,-3,3)$.

Otra forma de calcular la distancia entre ambas rectas es utilizar que

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_s|}$$

siendo P un punto cualquier de la recta r y A un punto cualquiera de la recta s. Podemos tomar $P = (7,1,-1)$ que, por el enunciado, sabemos que está en la recta r y $A = (8,-3,3)$, con $\vec{v}_s = (2,1,-1)$. En ese caso, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (7,1,-1) - (8,-3,3) = (-1,4,-4)$ y

$$\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + \vec{j} + 8\vec{k} + 4\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k} = (0,9,9).$$

Por tanto,

$$d(r,s) = d(P,s) = \frac{|\vec{v}_s \times \overrightarrow{AP}|}{|\vec{v}_s|} = \frac{\sqrt{81+81}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

Cuestión 6.

Considere el plano π de ecuación $\pi : 3x - y - 2z = 5$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1}.$$

a) **(1,25 p.)** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a = 0$ la recta r es paralela al plano π. Para ese valor de a:

b) **(0,75 p.)** Calcule la distancia de la recta r al plano π.

c) **(0,5 p.)** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

Solución: a) Lo más sencillo es pasar la recta r a su forma implícita, considerar el sistema de ecuaciones formado por la ecuación del plano π y las ecuaciones implícitas de la recta r y estudiar dicho sistema en función del parámetro a. Para ello, observamos que

$$r : \frac{x-a}{1} = \frac{y-3+a}{1} = \frac{z}{1} \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{rcr} x - z & = & a \\ y - z & = & 3 - a \end{array} \right.$$

y el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x - y - 2z & = & 5 \\ x - z & = & a \\ y - z & = & 3 - a \end{array} \right.$$

La matriz del sistema es

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 3-a \end{array} \right).$$

El determinante de A es $|A| = -2 + 3 - 1 = 0$ y como A tiene al menos un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo $\left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 1$ sabemos que $\text{rango}(A) = 2$ para todo valor de a.

Para estudiar el rango de A^* basta estudiar el rango de la submatriz

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3-1 \end{array} \right).$$

Su determinante es

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3-a \end{array} \right| = 5 - 3a + 3 - a = 8 - 4a = 0 \Longleftrightarrow a = 2.$$

Por tanto, si $a \neq 2$ se tiene $\text{rango}(A^*) = 3 > 2 = \text{rango}(A)$ y se trata de un sistema incompatible, sin solución. Geométricamente significa que la recta r no corta al plano π y por tanto la recta es paralela al plano.

Si $a = 2$ se tiene $\text{rango}(A^*) = 2 = \text{rango}(A) < n = 3$ y se trata de un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Geométricamente significa que la recta r está contenida en el plano π.

b) En este caso se tiene

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad \pi : 3x - y - 2z - 5 = 0.$$

Como se sabe que la recta r es paralela al plano π, podemos calcular $d(r, \pi) = d(P, \pi)$ siendo P cualquier punto de la recta r. Podemos tomar entonces $P = (0, 3, 0)$ y aplicar directamente la fórmula de la distancia de un punto a un plano

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 3 - 2 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{|0 - 3 - 0 - 5|}{\sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

Otra forma de resolver este apartado es calcular el punto Q obtenido como la proyección ortogonal de $P = (0, 3, 0)$ sobre el plano $\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0$ y utilizar que $d(r, \pi) = d(P, \pi) = d(P, Q)$. Para calcular Q, basta considerar la recta perpendicular a π que pasa por P y calcular Q como la intersección de esta recta con π. La recta perpendicular a π que pasa por P viene dada en coordenadas paramétrica por

$$\begin{cases} x &= 0 + 3\lambda &= 3\lambda \\ y &= 3 - \lambda &= 3 - \lambda \\ z &= 0 - 2\lambda &= -2\lambda \end{cases}$$

El punto $Q = (3\lambda, 3 - \lambda, -2\lambda)$ verifica entonces

$$9\lambda - 3 + \lambda + 4\lambda - 5 = 0 \Longleftrightarrow 14\lambda - 8 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

Es decir,

$$Q = \left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}, \frac{-8}{7}\right),$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \left(\frac{12}{7}, \frac{17}{7}, \frac{-8}{7}\right) - (0, 3, 0) = \left(\frac{12}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{-8}{7}\right)$$

y

$$d(r, \pi) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{144}{49} + \frac{16}{49} + \frac{64}{49}} = \sqrt{\frac{224}{49}} = \sqrt{\frac{32}{7}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{8}{\sqrt{14}}.$$

c) El haz de planos paralelos al plano π es de la forma $3x - y - 2z = D$. Como debe contener a la recta r, basta con calcular D para que el plano pase por el punto $P = (0, 3, 0) \in r$. Por tanto

$$0 - 3 - 0 = D \Longleftrightarrow D = -3 \Longrightarrow \text{ La solución es el plano } 3x - y - 2z = -3.$$

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 3 bolas rojas y 4 bolas negras, y la urna B contiene 1 bola verde, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **(0,5 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

b) **(1 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

c) **(1 p.)** La probabilidad de que la bola que se sacó de la urna A fuera verde, sabiendo que la bola que se ha sacado de la urna B ha sido negra.

Solución: Observemos en primer lugar que la urna A tiene un total de 10 bolas, de las cuales 3 son verdes, 3 son rojas y 4 son negras. La urna B tiene un total de 9 bolas, de las cuales 1 es verde, 3 son rojas y 5 son negras.

Una vez que se ha sacado al azar una bola de la urna A y se ha metido en la urna B, la urna B contiene un total de 10 bolas, siendo su composición la siguiente:

Caso 1: La bola sacada de A ha sido verde: 2 verdes, 3 rojas y 5 negras;

Caso 2: La bola sacada de A ha sido roja: 1 verde, 4 rojas y 5 negras;

Caso 3: La bola sacada de A ha sido negra: 1 verde, 3 rojas y 6 negras.

a) Como la bola que se sacó de la urna A era verde, significa que estamos en el Caso 1 y la composición de la urna B, una vez que se ha pasado una bola verde de A a B, es la siguiente: 2 bolas verdes, 3 bolas rojas y 5 bolas negras. Por lo tanto, en este caso la probabilidad de que la bola que se saca de B sea negra es

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Observemos que en este caso estamos calculando de hecho una probabilidad condicionada, ya que se trata de

$$P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 1}) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B en el Caso 1}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Esta observación no es estrictamente necesaria en este apartado pero sí lo será en los apartados siguientes.

b) En este apartado no sabemos de qué color es la bola que se ha pasado de A a B. Por lo tanto, y siguiendo la observación hecha en el apartado a), debemos utilizar el teorema de la probabilidad total para ver que

$$\begin{aligned} P(\text{Bola Negra}) &= P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 1}) \cdot P(\text{Caso 1}) + P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 2}) \cdot P(\text{Caso 2}) \\ &\quad + P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 3}) \cdot P(\text{Caso 3}). \end{aligned}$$

Pasamos a continuación a calcular cada una de estas probabilidades. Como el Caso 1 corresponde al caso en que la bola sacada de A es verde, se tiene

$$P(\text{Caso 1}) = P(\text{sacar Bola Verde de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas verdes en A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{3}{10}.$$

Además, en este caso, se tiene

$$P(\text{Bola Negra}/\text{Caso 1}) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas negras en B en el Caso 1}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10}.$$

Análogamente, como el Caso 2 corresponde al caso en que la bola sacada de A es roja, se tiene

$$P(\text{Caso 2}) = P(\text{sacar Bola Roja de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas rojas en A}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{3}{10}.$$

En este caso se tiene
$$P(\text{Bola Negra/Caso 2}) = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas negras en B en el Caso 2}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10}.$$

Finalmente, como el Caso 3 corresponde al caso en que la bola sacada de A es negra, se tiene
$$P(\text{Caso 3}) = P(\text{sacar Bola Negra de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas negras en A}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{4}{10}.$$

En este caso se tiene
$$P(\text{Bola Negra/Caso 3}) = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas negras en B en el Caso 3}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{6}{10}.$$

En conclusión,
$$P(\text{Bola Negra}) = \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10} + \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10} + \frac{6}{10}\cdot\frac{4}{10} = \frac{15+15+24}{100} = \frac{54}{100} = 0,54.$$

c) Se trata también de una probabilidad condicionada pero en este caso nos están pidiendo $P(\text{Caso 1/Bola Negra})$. Por calcularla, observamos que
$$\begin{aligned}
P(\text{Caso 1/Bola Negra}) &= \frac{P(\text{Caso 1} \cap \text{Bola Negra})}{P(\text{Bola Negra})} \\
&= \frac{P(\text{Bola Negra} \cap \text{Caso 1})}{P(\text{Bola Negra})} \\
&= \frac{P(\text{Bola Negra/Caso 1}) \cdot P(\text{Caso 1})}{P(\text{Bola Negra})} \\
&= \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{54}{100}} = \frac{15}{54} = \frac{5}{18} = 0,2778.
\end{aligned}$$

Observación: Evidentemente, esta cuestión también se puede hacer por diagrama de árbol.

Cuestión 8.

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
Se lanza una moneda al aire 100 veces y se anota el resultado del lanzamiento, que puede ser cara o cruz con la misma probabilidad. Determine:

a) **(0,5 p.)** Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara.

b) **(0,5 p.)** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **(0,5 p.)** Cuál es la probabilidad de que salga cara 60 veces.

d) **(1 p.)** Cuál es la probabilidad de que el número de veces que sale cara sea mayor o igual que 55.

Solución: a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que sale cara cuando se lanza una moneda al aire 100 veces.

La variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros $n = 100$, porque se lanza la moneda 100 veces, y $p = 0,5$, porque el resultado puede ser cara o cruz con la misma probabilidad.

b) La media de esta distribución es

$$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,5 = 50$$

y su desviación típica es

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = \sqrt{25} = 5.$$

c) Se trata de calcular $P(X = 60)$. Utilizando la fórmula de las probabilidades puntuales de la binomial $B(n = 100, p = 0,5)$ se tiene que

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \cdot 0,5^{60} \cdot 0,5^{40} = \binom{100}{60} \cdot 0,5^{100}.$$

Si nuestra calculadora puede hacer este cálculo, basta con poner su valor numérico redondeando al cuarto decimal

$$P(X = 60) = \binom{100}{60} \cdot 0,5^{100} = 0,0108.$$

Como se trata de valores muy grandes de n, algunas calculadoras no son capaces de calcularlo a partir de la fórmula. Por eso, en este caso es necesario aproximar la distribución binomial $X = B(n = 100, p = 0,5)$ por una distribución normal $Y = N(\mu, \sigma)$ con $\mu = np = 50$ y $\sigma = \sqrt{npq} = 5$.

Comprobamos antes si dicha aproximación es fiable, para lo cual es suficiente con comprobar, por ejemplo, que n sea suficientemente grande, $n \geq 30$, y que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, lo cual es cierto porque $np = nq = 50$. Otro criterio válido es que la n sea suficientemente grande, $n \geq 30$, y que $0,1 < p < 0,9$, lo cual también se cumple porque $n = 100$ y $p = 0,5$.

Por lo tanto, se puede aplicar la aproximación de la binomial por la normal. Teniendo en cuenta la corrección de continuidad (o corrección de Yates) y haciendo uso de la tipificación $Z = \dfrac{Y - 50}{5}$ sabemos entonces que $Z \sim N(0,1)$ y se concluye que

$$\begin{aligned} P(X = 60) &\approx P(59,5 < Y < 60,5) = P(\frac{59,5 - 50}{5} < Y < \frac{60,5 - 50}{5}) \\ &= P(1,9 < Z < 2,1) = P(Z < 2,1) - P(Z < 1,9). \end{aligned}$$

Consultando en la tabla de $Z \sim N(0,1)$ proporcionada, concluimos que

$$P(X = 60) \approx P(59,5 < Y < 60,5) = P(Z < 2,1) - P(Z < 1,9) = 0,9821 - 0,9713 = 0{,}0108.$$

d) Ahora se trata de calcular $P(X \geq 55)$. De nuevo, tenemos que hacerlo aproximando la binomial por la normal, que ya sabemos que es posible. En este caso, la corrección de continuidad nos dice que

$$\begin{aligned} P(X \geq 55) &\approx P(Y > 54,5) = P(Z > \frac{54,5 - 50}{5}) \\ &= P(Z > 0,9) = 1 - P(Z < 0,9), \end{aligned}$$

y, consultando en la tabla de $Z \sim N(0,1)$ proporcionada, concluimos que

$$P(X \geq 55) \approx P(Y > 54,5) = 1 - P(Z < 0,9) = 1 - 0,8159 = 0,1841.$$