



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JULIO

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:

- i) La suma de sus tres cifras es 9.
 - ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.
 - iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.
- a) **[1,5 p.]** Denotando por x la cifra de las centenas, por y la de las decenas y por z la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).
 - b) **[1 p.]** Calcule el número en cuestión.

2: Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

- a) **[0,75 p.]** Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible).
- b) **[0,75 p.]** Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.
- c) **[1 p.]** Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

3: Considere la función $f(x) = xe^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

- a) **[0,75 p.]** Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- b) **[0,75 p.]** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).
- c) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

4: Considere la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, donde $\cos^2 x = (\cos x)^2$.

- a) **[1 p.]** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.
- b) **[0,75 p.]** Calcule la integral definida $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$.
- c) **[0,75 p.]** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(\pi, 1)$.

El examen continúa por detrás

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JULIO

- 5: Los puntos $A = (6, -4, 4)$ y $B = (12, -1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r: \begin{cases} x - 2y = 5 \\ x + 2z = 5 \end{cases}$$

- a) [1,5 p.] Calcule las coordenadas del vértice C .
- b) [0,5 p.] Determine si el triángulo \widehat{ABC} tiene un ángulo recto en el vértice A .
- c) [0,5 p.] Calcule el área del triángulo \widehat{ABC} .
- 6: Considere el plano π de ecuación $\pi: 2x + ay - 2z = -4$ y la recta r dada por

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}.$$

- a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a .
- Se sabe que cuando $a = 1$ la recta r corta al plano π . Para ese valor de a :
- b) [0,75 p.] Calcule el punto de corte de la recta r y el plano π .
- c) [0,5 p.] Calcule el ángulo que forman.

- 7: En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80% de los espectadores, la de la sala B al 20% de los espectadores y la de la sala C al 60% de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

- a) [0,25 p.] La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.
- b) [0,5 p.] La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.
- c) [0,5 p.] La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.
- d) [0,75 p.] La probabilidad de que le haya gustado la película.
- e) [0,5 p.] La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.
- 8: En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes.

El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67% de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5% de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

- a) [0,5 p.] ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?
- b) [1 p.] Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.
- c) [1 p.] Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JULIO**CRITERIOS DE CALIFICACIÓN****OBSERVACIONES GENERALES:**

El corrector deberá ajustarse a los criterios de evaluación establecidos en este documento y en la reunión correspondiente. En ningún caso se podrá puntuar por encima de la valoración indicada en cada apartado. Se procurará que, en lo posible, los errores en un apartado no afecten a otros apartados.

Los errores simples de cálculo restarán entre 0,1 y 0,25 puntos. Los errores importantes de cálculo o errores simples reiterados pueden conllevar puntuación 0 en ese apartado. Si un error simple ha llevado a un problema más sencillo se disminuirá la puntuación.

Las preguntas contestadas correctamente sin incluir el desarrollo necesario para llegar a su resolución serán valoradas con 0 puntos.

Se valorará el correcto uso del vocabulario y de la notación. El alumno puede elegir el método que considere más oportuno para la resolución de una cuestión pero, si esto demuestra la falta de comprensión de conocimientos básicos, la puntuación final puede ser menor que la indicada para dicha cuestión.

OBSERVACIONES PARTICULARES:**CUESTIÓN 1:** [2,5 p.]

a) Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones a resolver [1,5 p.]:

$$\begin{cases} x+y+z = 9 \\ x-z = 1 \\ -y+z = 4 \end{cases}$$

b) Cálculo correcto de la solución del sistema y del número en cuestión [1 p.]:

$$x = 5, \quad y = 0, \quad z = 4 \implies \text{Número en cuestión} = 504$$

CUESTIÓN 2: [2,5 p.]

a) Justificación correcta de que una matriz nilpotente A nunca puede ser regular (por ejemplo, porque $|A|^2 = |A^2| = 0 \implies |A| = 0$). [0,75 p.].

b) Comprobación correcta de que $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ [0,75 p.].

c) Cálculo correcto de $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36+4a & 6a+ab \\ 24+4b & 4a+b^2 \end{pmatrix}$ [0,5 p.].

Resolución correcta de $\begin{pmatrix} 36+4a & 6a+ab \\ 24+4b & 4a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff a = -9 \text{ y } b = -6$ [0,5 p.].

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JULIO**CUESTIÓN 3:** [2,5 p.]

a) Cálculo correcto de $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ por cualquier método válido **[0,75 p.]**.

b) Cálculo correcto de la derivada $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ **[0,25 p.]**.

Justificación de que la función es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$ **[0,25 p.]**.

Justificación de que $f(x)$ alcanza en $x = 1$ un máximo relativo, con $f(1) = 1/e$ **[0,25 p.]**.

c) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida $\int x e^{-x} dx = -(x+1)e^{-x} + C$ **[1 p.]**.

CUESTIÓN 4: [2,5 p.]

a) Cálculo correcto y justificado de la integral indefinida

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = -\operatorname{arctg}(\cos x) + C$$

aplicando el cambio de variable $t = \cos x$ (y $dt = -\operatorname{sen} x dx$) o argumentando que es casi una integral inmediata del tipo $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + C$ **[1 p.]**

b) Cálculo correcto de la integral definida $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{4}$ **[0,75 p.]**.

c) Determinación correcta de la primitiva que cumple la condición $F(\pi) = 1$ **[0,75 p.]**

$$F(x) = -\operatorname{arctg}(\cos x) + 1 - \frac{\pi}{4}.$$

CUESTIÓN 5: [2,5 p.]

a) Cálculo correcto y razonado de $C = (3, -1, 1)$ por cualquier método válido **[1,5 p.]**.

b) Comprobación razonada de que el triángulo tiene un ángulo recto en A **[0,5 p.]**.

c) Cálculo correcto del área del triángulo, obteniendo el valor $\frac{27\sqrt{2}}{2}$ **[0,5 p.]**.

CUESTIÓN 6: [2,5 p.]

a) Justificación correcta y razonada de que la recta corta al plano para todo valor de a distinto de -8 **[0,75 p.]**. Justificación correcta y razonada de que la recta está contenida en el plano para $a = -8$. **[0,5 p.]**.

b) Cálculo correcto del punto de corte entre la recta y el plano, obteniendo el punto $(1, 0, 3)$ **[0,75 p.]**.

c) Cálculo correcto del ángulo de corte, obteniendo que la recta es perpendicular al plano (ángulo = $\pi/2$ radianes o 90 grados) **[0,5 p.]**.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II
EBAU2023 - JULIO

CUESTIÓN 7: [2,5 p.] Denotamos por C el suceso "el espectador ha estado en la sala C" y por G el suceso "al espectador le ha gustado la película".

a) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo

$$P(C) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{número de espectadores en la sala C}}{\text{número total de espectadores en el cine}} = \frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

[0,25 p.].

b) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo

$$P(G/C) = \text{probabilidad de que la película de la sala C le guste un espectador} = 0,6$$

porque sabemos que la película de la sala C le gusta al 60% de los espectadores [0,5 p.].

c) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo

$$P(G \cap C) = P(G/C) \cdot P(C) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24.$$

[0,5 p.].

d) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G/A) \cdot P(A) + P(G/B) \cdot P(B) + P(G/C) \cdot P(C) \\ &= 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,6 \\ &= 0,32 + 0,04 + 0,24 = 0,6. \end{aligned}$$

[0,75 p.].

e) Cálculo correcto y justificado de la probabilidad pedida, obteniendo

$$P(G \cup C) = P(G) + P(C) - P(G \cap C) = 0,6 + 0,4 - 0,24 = 0,76.$$

[0,5 p.].

CUESTIÓN 8: [2,5 p.]

a) Cálculo correcto y justificado del porcentaje pedido, obteniendo que el 31,5% de los recién nacidos tienen un peso comprendido entre 3,464 y 4,502 kg [0,5 p.].

b) Cálculo correcto de la media $\mu = 3,2$ [0,5 p.]. Cálculo correcto de la desviación típica $\sigma = 0,6$ [0,5 p.].

c) Cálculo correcto y justificado del porcentaje pedido, obteniendo que el 7,35% de los recién nacidos tienen un peso menor de 2,33 kg [1 p.].