RESOLUCIÓN DEL EXAMEN EBAU JULIO 2023
MATEMÁTICAS II

El objeto de este documento es doble. Por una parte, proporcionar a los profesores y alumnos de Bachillerato de la Región de Murcia la **resolución del examen** de Matemáticas II de la convocatoria EBAU2023-JULIO. Por otra parte, **agilizar las posibles reclamaciones** a la corrección del examen, toda vez que, habiendo hecho pública la resolución de las cuestiones, pueda ser más fácil indentificar posibles errores en la corrección. Evidentemente, por la propia naturaleza de la disciplina, **una misma cuestión admite múltiples soluciones válidas y correctas** y resulta prácticamente imposible recoger aquí toda esa variedad de soluciones. Por supuesto, cualquier otra solución a cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, **aunque no esté incluida en este documento**.

Como es bien sabido, el examen consta de un total de **ocho cuestiones** y se debe responder a un **máximo de cuatro** de ellas, elegidas libremente por el alumno. Las ocho cuestiones se pueden agrupar por bloques temáticos de la siguiente manera, pero insistimos en que se pueden escoger libremente un máximo de cuatro y en cualquier orden, **independientemente de que pertenezcan o no al mismo bloque temático**:

Cuestiones 1 y 2: Del bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 3 y 4: Del bloque de Análisis (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 5 y 6: Del bloque de Geometría (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 7 y 8: Del bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos una).

Si se responde a más de cuatro cuestiones, sólo se corrigen las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se puden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 4 de julio de 2023.

Luis J. Alías Linares
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

Se quiere calcular un número de tres cifras con los siguientes datos:

i) La suma de sus tres cifras es 9.

ii) Si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99.

iii) Si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36.

a) **(1,5 p.)** Denotando por x la cifra de las centenas, por y la de las decenas y por z la de las unidades, plantee un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas que represente la información dada en i), ii) y iii).

b) **(1 p.)** Calcule el número en cuestión.

Solución: a) Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en donde las incógnitas son las cifras del número en cuestión, $N = xyz$, siendo x la cifra de las centenas, y la de las decenas y z la de las unidades. El primer dato del ejercicio es que ”la suma de sus tres cifras es 9”, que da lugar a la primera ecuación:

$$x + y + z = 9.$$

El segundo dato del ejercicio es que ”si permutamos la cifra de las centenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial menos 99”, es decir, el número zyx es el número xyz menos 99:

$$zyx = xyz - 99.$$

Sin embargo, para poder expresar esto algebraicamente en forma de ecuación debemos tener en cuenta que cuando escribimos los números como xyz o como zyx se trata sólo de una notación, siendo su valor numérico el siguiente

$$\begin{aligned} xyz &= x \cdot 10^2 + y \cdot 10 + z = 100x + 10y + z \\ zyx &= z \cdot 10^2 + y \cdot 10 + x = 100z + 10y + x. \end{aligned}$$

Esto da lugar a la segunda ecuación:

$$100z + \cancel{10y} + x = 100x + \cancel{10y} + z - 99 \Longrightarrow 99x - 99z = 99 \Longrightarrow x - z = 1.$$

El tercer dato del ejercicio es que ”si permutamos la cifra de las decenas con la cifra de las unidades, el número obtenido es el número inicial más 36”, es decir, el número xzy es el número xyz más 36:

$$xzy = xyz + 36.$$

Escribiendo esto algebraicamente se llega a la tercera ecuación

$$\cancel{100x} + 10z + y = \cancel{100x} + 10y + z + 36 \Longrightarrow -9y + 9z = 36 \Longrightarrow -y + z = 4.$$

Por lo tanto, hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 9 \\ x - z & = & 1 \\ -y + z & = & 4 \end{array} \right.$$

b) Se trata de un sistema de ecuaciones compatible determinado cuya solución (calculada por cualquier método válido) es

$$x = 5, \quad y = 0 \quad \text{y } z = 4 \Longrightarrow N = 504.$$

Cuestión 2.

Se dice que una matriz cuadrada A es 2-nilpotente si cumple que $A^2 = 0$.

a) **(0,75 p.)** Justifique razonadamente que una matriz 2-nilpotente nunca puede ser regular (o invertible).

b) **(0,75 p.)** Compruebe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

c) **(1 p.)** Determine para qué valores de a y b la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente.

Solución: a) Sabemos que una matriz cuadrada A es regular si y sólo si $|A| \neq 0$. En este caso, si A es una matriz 2-nilpotente se tiene que $A^2 = 0$, por lo que $|A^2| = |A|^2 = 0 \Longrightarrow |A| = 0$ y A no puede ser regular.

Otra forma de justificar que A no puede ser nunca regular es por reducción al absurdo, suponiendo que sí que existe la inversa A^{-1} y argumentar que en ese caso se tiene

$$A^2 = 0 \Longrightarrow A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot 0 = 0 \Longrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot A = 0 \Longrightarrow A = 0,$$

lo cual no tiene sentido porque $A = 0$ no es regular.

b) Se trata simplemente de comprobar que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - 9 & -27 + 27 \\ 3 - 3 & -9 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) La matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$ es 2-nilpotente si y solo si $A^2 = 0$, es decir, si y solo si

$$\begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & a \\ 4 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 + 4a & 6a + ab \\ 24 + 4b & 4a + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular, fijándonos en la primera columna se tiene que si A es 2-nilpotente entonces

$$\begin{aligned} 36 + 4a = 0 &\implies a = -9 \\ 24 + 4b = 0 &\implies b = -6. \end{aligned}$$

Además, para estos dos valores de a y b se tiene también la igualdad en la segunda columna:

$$\begin{aligned} 6a + ab &= -54 + 54 = 0 \\ 4a + b^2 &= -36 + 36 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto A es 2-nilpotente si y solo si $a = -9$ y $b = -6$.

Bloque 2: Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

Considere la función $f(x) = x\,e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **(0,75 p.)** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **(0,75 p.)** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos (máximos y/o mínimos).

c) **(1 p.)** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

Solución: a) Comenzamos calculando

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Podemos resolver esta indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

b) La derivada de $f(x) = x\,e^{-x}$ es

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$, calculamos primero los puntos críticos de $f(x)$, es decir, las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0 \iff x = 1, \text{ ya que } e^{-x} = 1/e^x > 0.$$

A continuación, estudiamos el signo de $f'(x)$ para ver dónde la función es creciente o decreciente. Como $f'(x) = 0$ solo para $x = 1$, basta con darle valores a $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de este valor. Observamos que $f'(x) > 0$ si $x < 1$ (por ejemplo, $f'(0) = 1 > 0$) y que $f'(x) < 0$ si $x > 1$ (por ejemplo, $f'(2) = -e^{-2} < 0$), de modo que $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$. Por lo tanto la función tiene un máximo relativo en $x = 1$. El valor de esta máximo relativo es $f(1) = e^{-1} = 1/e$.

c) Se trata de calcular la siguiente integral indefinida $\int xe^{-x}dx$, que es una integral típica por partes. Hacemos $u = x$ y $dv = e^{-x}dx$, de modo que $du = dx$ y $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$. Por tanto

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$

Cuestión 4.

Considere la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, donde $\cos^2 x = (\cos x)^2$.

a) **(1 p.)** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

b) **(0,75 p.)** Calcule la integral definida $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\, dx$.

c) **(0,75 p.)** Determine la primitiva de $f(x)$ que pasa por el punto $(\pi, 1)$.

Solución: a) Para calcular la integral indefinida $f(x) = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$ hacemos el cambio de variable $y = \cos x \Longrightarrow dy = -\operatorname{sen} x dx$, de modo que

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int \frac{1}{1 + y^2} dy = -\operatorname{arc\,tg} y = -\operatorname{arc\,tg}(\cos x) + C.$$

Este apartado también se puede hacer directamente, sin especificar el cambio de variable, argumentando que es casi una integral inmediata del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} dx = \operatorname{arc\,tg}(f(x)) + C$$

pero llevando cuidado con el signo de la derivada, ya que en este caso se tiene $\cos'(x) = -\operatorname{sen} x$. Por lo tanto, se tiene

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = -\operatorname{arc\,tg}(\cos x) + C.$$

b) Calculamos la integral definida aplicando la regla de Barrow con la primitiva obtenida en el apartado a) tomando $C = 0$ (por ejemplo):

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx &= -\operatorname{arc\,tg}(\cos x) \Big|_0^{\pi/2} = -\operatorname{arc\,tg}(\cos \pi/2) + \operatorname{arc\,tg}(\cos 0) \\ &= -\operatorname{arc\,tg}(0) + \operatorname{arc\,tg}(1) = -0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

c) Por el apartado a) sabemos que la primitiva general de $f(x)$ es $F(x) = -\operatorname{arc\,tg}(\cos x) + C$. Se trata, por tanto, de calcular el valor de C para que $F(\pi) = 1$. En este caso

$$F(\pi) = -\operatorname{arc\,tg}(\cos \pi) + C = -\operatorname{arc\,tg}(-1) + C = \frac{\pi}{4} + C = 1 \Longrightarrow C = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Por tanto, la solución es $F(x) = -\operatorname{arc\,tg}(\cos x) + 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

Bloque 3: Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Los puntos $A = (6, -4, 4)$ y $B = (12, -1, 1)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C es la proyección ortogonal del vértice A sobre la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 5 \\ x + 2z & = & 5 \end{array} \right.$$

a) **(1,5 p.)** Calcule las coordenadas del vértice C.

b) **(0,5 p.)** Determine si el triángulo $\widehat{ABC}$ tiene un ángulo recto en el vértice A.

c) **(0,5 p.)** Calcule el área del triángulo $\widehat{ABC}$.

Solución: a) El punto C se puede calcular como intersección de la propia recta r con el plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto A. El vector director de la recta r viene dado por

$$\vec{v}_r = (1, -2, 0) \times (1, 0, 2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-4, -2, 2) \parallel (-2, -1, 1).$$

Por tanto, el haz de planos perpendiculares a la recta r viene dado por $-2x - y + z = D$. Para calcular el plano π necesitamos calcular el valor de D para que π pase por A:

$$A \in \pi \Longleftrightarrow -12 + 4 + 4 = D \Longleftrightarrow D = -4.$$

Por tanto, $\pi : -2x - y + z = -4$. Como la recta r es $r : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 5 \\ x + 2z & = & 5 \end{array} \right.$, el punto C viene dado como la solución del siguiente sistema, que por interpretación geométrica es S.C.D. (no es necesario comprobarlo):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + z & = & -4 \\ x - 2y & = & 5 \\ x + 2z & = & 5 \end{array} \right.$$

La solución (calculada por cualquier método válido) es $x = 3$, $y = -1$ y $z = 1$; es decir, el tercer vértice del triángulo es $C = (3, -1, 1)$.

b) Necesitamos comprobar si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son perpendiculares o no. Para ello calculamos

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = (6, 3, -3) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (-3, 3, -3)$$

y comprobamos que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -18 + 9 + 9 = 0 \Longrightarrow \text{vectores perpendiculares} \Longrightarrow \text{ángulo recto en el vértice } A.$$

c) Para calcular el área del triángulo, podemos hacerlo aplicando directamente la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$$

y teniendo en cuenta que

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, 3, -3) \times (-3, 3, -3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0\vec{i} + 27\vec{j} + 27\vec{k} = (0, 27, 27).$$

Por lo tanto,

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\sqrt{27^2 + 27^2} = \frac{27\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{\sqrt{2}}\text{u}^2.$$

Como se trata de un triángulo rectángulo en A, también podemos calcular el área aplicando la fórmula elemental de

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2},$$

teniendo en cuenta que en este caso se puede tomar

$$\text{base} = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{54} \quad \text{y} \quad \text{altura} = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{27}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{54} \cdot \sqrt{27}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2} = \frac{27}{\sqrt{2}}\text{u}^2.$$

Cuestión 6.

Considere el plano π de ecuación $\pi : 2x + ay - 2z = -4$ y la recta r dada por

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2}.$$

a) **(1,25 p.)** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

Se sabe que cuando $a = 1$ la recta r corta al plano π. Para ese valor de a:

b) **(0,75 p.)** Calcule el punto de corte de la recta r y el plano π.

c) **(0,5 p.)** Calcule el ángulo que forman.

Solución: a) Una posibilidad para estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π es considerar el vector director de la recta, $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$, y el vector normal al plano π, $\vec{n} = (2, a, -2)$, y hacer su producto escalar

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (2, 1, -2) \cdot (2, a, -2) = 8 + a.$$

Si este producto es distinto de 0 significa que la recta r corta al plano π, lo cual ocurre cuando $a \neq -8$. Por tanto, si $a \neq -8$ la recta corta al plano en un punto.

Por otro lado, si $a = -8$ este producto es 0, lo cual significa que o bien la recta es paralela al plano o bien está contenida en el plano. En este caso, para decidir cuál de las dos alternativas es la correcta basta con sustituir un punto de la recta en la ecuación del plano para ver si la recta está contenida en el plano o no. Tomando, por ejemplo, el punto de la recta $(-1, -1, 5)$ comprobamos que dicho punto de r sí está en el plano, ya que $-2+8-10 = -4$, y concluimos que si $a = -8$ la recta está contenida en el plano.

Otra forma de resolver este apartado es pasar la recta r a su forma implícita, considerar el sistema de ecuaciones formado por la ecuación del plano π y las ecuaciones implícitas de la recta r y estudiar dicho sistema en función del parámetro a. Para ello, observamos que

$$r : \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{-2} \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y & = & 1 \\ x + z & = & 4 \end{array} \right.$$

y el sistema de ecuaciones resultante es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + ay - 2z & = & -4 \\ x - 2y & = & 1 \\ x + z & = & 4 \end{array} \right.$$

La matriz del sistema es

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

El determinante de A es $|A| = -8 - a$, de manera que $|A| = 0 \Longleftrightarrow a = -8$. Por lo tanto, si $a \neq -8$ el rango de A es 3 y se trata de un S.C.D. y geométricamente significa que la recta corta al plano en un punto. Por otra parte, si $a = -8$ se tiene

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -8 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

y el rango de A no puede ser 3 porque $|A| = 0$. Como A tiene un menor de orden 2 distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, sabemos que rango$(A) = 2$. Para estudiar el rango de A^* basta estudiar el rango de la submatriz obtenida al ampliar dicho menor de orden 2 con la nueva columna, es decir, el rango de

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -16 - 8 - 8 + 32 = 0 \Longrightarrow \text{rango}(A^*) = 2.$$

Por tanto, si $a = -8$ se tiene $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 < 3 = n$ y se trata de un S.C.I., con infinitas soluciones dependientes de un parámetro. Geométricamente significa que la recta r está contenida en el plano π.

b) Para calcular el punto de corte basta con resolver el correspondiente sistema de ecuaciones, que ya sabemos que es S.C.D.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - 2z & = & -4 \\ x - 2y & = & 1 \\ x + z & = & 4 \end{array} \right.$$

Su solución (calculada con cualquier método válido) es $x = 1$, $y = 0$ y $z = 3$, de manera que el punto de corte es el punto $P = (1, 0, 3)$.

Otra forma de resolver este apartado es escribir la recta en forma paramétrica y sustituir en la ecuación del plano para calcular el valor de λ. En ese caso, se tiene

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 + 2\lambda \\ y & = & -1 + \lambda \\ z & = & 5 - 2\lambda \end{array} \right.$$

y al sustituir en la ecuación del plano se llega a

$$2(-1 + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - 2(5 - 2\lambda) = -4 \Longleftrightarrow 9\lambda = 9 \Longleftrightarrow \lambda = 1.$$

Por lo tanto, el punto de corte es el punto $P = (1, 0, 3)$.

c) Para calcular el ángulo que forman, observamos que en este caso el vector director de la recta es $\vec{v}_r = (2, 1, -2)$ y el vector normal al plano π es $\vec{n} = (2, 1, -2)$. Como se trata de vectores proporcionales (de hecho, iguales), la recta es perpendicular al plano y el ángulo que forman es $\pi/2$ radianes (o 90 grados).

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

En un cine hay 3 salas y un total de 250 espectadores repartidos de la siguiente manera: 100 espectadores en la sala A, 50 en la sala B y 100 en la sala C. Se sabe que la película de la sala A gusta al 80 % de los espectadores, la de la sala B al 20 % de los espectadores y la de la sala C al 60 % de los espectadores. A la salida de las tres películas se elige un espectador al azar. Calcule:

a) **(0,25 p.)** La probabilidad de que el espectador haya estado en la sala C.

b) **(0,5 p.)** La probabilidad de que le haya gustado la película, sabiendo que ha estado en la sala C.

c) **(0,5 p.)** La probabilidad de que le haya gustado la película y haya estado en la sala C.

d) **(0,75 p.)** La probabilidad de que le haya gustado la película.

e) **(0,5 p.)** La probabilidad de que le haya gustado la película o haya estado en la sala C.

Solución: Denotamos por C el suceso "el espectador ha estado en la sala C" y por G el suceso "al espectador le ha gustado la película".

a)

$$P(C) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{número de espectadores en la sala C}}{\text{número total de espectadores en el cine}} = \frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

b)

$$P(G/C) = \text{probabilidad de que la película de la sala C le guste un espectador} = 0,6$$

porque sabemos que la película de la sala C le gusta al 60 % de los espectadores.

c)

$$P(G \cap C) = P(G/C) \cdot P(C) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24.$$

d) Utilizando el teorema de la probabilidad total se tiene

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G \cap A) + P(G \cap B) + P(G \cap C) \\ &= P(G/A) \cdot P(A) + P(G/B) \cdot P(B) + P(G/C) \cdot P(C). \end{aligned}$$

Haciendo lo mismo que hemos hecho en a) pero para las salas A y B sabemos que

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{número de espectadores en la sala A}}{\text{número total de espectadores en el cine}} = \frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

$$P(B) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{número de espectadores en la sala B}}{\text{número total de espectadores en el cine}} = \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Haciendo lo mismo que hemos hecho en b) pero para las salas A y B sabemos que $P(G/A) = 0,8$, porque sabemos que la película de la sala A le gusta al 80 % de los espectadores, y que $P(G/B) = 0,2$, porque sabemos que la película de la sala B le gusta al 20 % de los espectadores.

En definitiva,

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G/A) \cdot P(A) + P(G/B) \cdot P(B) + P(G/C) \cdot P(C) \\ &= 0,8 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,6 \\ &= 0,32 + 0,04 + 0,24 = 0,6. \end{aligned}$$

e)

$$P(G \cup C) = P(G) + P(C) - P(G \cap C) = 0,6 + 0,4 - 0,24 = 0,76.$$

Cuestión 8.

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades y 2 decimales para los porcentajes.
El peso de los recién nacidos en la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 67 % de los recién nacidos pesan menos de 3,464 kg y que el 1,5 % de los recién nacidos pesan más de 4,502 kg.

a) **(0,5 p.)** ¿Cuál es el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg?

b) **(1 p.)** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **(1 p.)** Calcule el porcentaje de recién nacidos que pesan menos de 2,33 kg.

Solución: Denotamos por X a la variable aleatoria "peso de los recién nacidos en la Región de Murcia" medido en kg. Sabemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ con los siguientes datos:

- $P(X < 3,464) = 0,67$;
- $P(X > 4,502) = 0,015$.

a) Con los datos conocidos, podemos calcular la probabilidad de que el peso de los recién nacidos esté comprendido entre 3,464 y 4,502 kg:

$$\begin{aligned} P(3,464 < X < 4,502) &= P(X < 4,502) - P(X < 3,464) \\ &= 1 - P(X > 4,502) - P(X < 3,464) \\ &= 1 - 0,015 - 0,67 = 0,315. \end{aligned}$$

Por tanto, el porcentaje de recién nacidos cuyo peso está comprendido entre 3,464 y 4,502 kg es el 31,5 %

b) Haciendo uso de la tipificación $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ sabemos que $Z \sim N(0,1)$ y que

$$P(X < 3,464) = P(Z < \frac{3,464 - \mu}{\sigma}) = 0,67.$$

Consultando en la tabla de $Z \sim N(0,1)$ proporcionada, vemos que dicho valor de la probabilidad corresponde al valor de $z = 0,44$, es decir,

$$z = \frac{3,464-\mu}{\sigma} = 0,44 \Longrightarrow 3,464-\mu = 0,44\cdot\sigma \Longrightarrow \mu + 0,44\cdot\sigma = 3,464.$$

Por otro lado

$$P(X < 4,502) = P(Z < \frac{4,502-\mu}{\sigma}) = 1 - 0,015 = 0,985.$$

Consultando de nuevo en la tabla de $Z \sim N(0,1)$ proporcionada, vemos que dicho valor de la probabilidad corresponde al valor de $z = 2,17$, es decir,

$$z = \frac{4,502-\mu}{\sigma} = 2,17 \Longrightarrow 4,502-\mu = 2,17\cdot\sigma \Longrightarrow \mu + 2,17\cdot\sigma = 4,502.$$

Tenemos entonces que μ y σ son las soluciones del siguiente sistema lineal de dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mu + 0,44\cdot\sigma & = & 3,464 \\ \mu + 2,17\cdot\sigma & = & 4,502 \end{array}\right.$$

Restando a la segunda ecuación la primera ecuación, se tiene

$$1,73\cdot\sigma = 1,038 \Longrightarrow \sigma = \frac{1,038}{1,73} = 0,6 \text{ kg}.$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación, se tene

$$\mu = 3,464 - 0,44\cdot 0,6 = 3,2 \text{ kg}.$$

c) Calculamos primero la probabilidad $P(X < 2,33)$, usando la tipificación y haciendo

$$P(X < 2,33) = P(Z < \frac{2,33-3,2}{0,6}) = P(Z < -1,45) = 1 - P(Z < 1,45).$$

Buscando en la tabla observamos que $P(Z < 1,45) = 0,9265$, de modo que

$$P(X < 2,33) = 1 - P(Z < 1,45) = 1 - 0,9265 = 0,0735,$$

lo que significa que el 7,35 % de los recién nacidos pesan menos de 2,33 kg.