RESOLUCIÓN DEL EXAMEN EBAU 2022-JULIO
MATEMÁTICAS II

El objeto de este documento es doble. Por una parte, proporcionar a los profesores y alumnos de Bachillerato de la Región de Murcia la **resolución del examen** de Matemáticas II de la convocatoria EBAU2022-JULIO. Por otra parte, **agilizar las posibles reclamaciones** a la corrección del examen, toda vez que, habiendo hecho pública la resolución de las cuestiones, pueda ser más fácil indentificar posibles errores en la corrección. Evidentemente, por la propia naturaleza de la disciplina, **una misma cuestión admite múltiples resoluciones válidas y correctas** y resulta prácticamente imposible recoger aquí toda esa variedad de resoluciones, a pesar de que hemos intentado incluir el mayor número de ellas. Por supuesto, cualquier otro método de resolución a cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcto, esté bien argumentado y lleve a la solución correcta deberá ser considerado como válido en el proceso de corrección, **aunque no esté incluido en este documento**.

Como es bien sabido, el examen consta de un total de **ocho cuestiones** y se debe responder a un **máximo de cuatro** de ellas, elegidas libremente por el alumno. Las ocho cuestiones se pueden agrupar por bloques temáticos de la siguiente manera, pero insistimos en que se pueden escoger libremente un máximo de cuatro y en cualquier orden, **independientemente de que pertenezcan o no al mismo bloque temático**:

Cuestiones 1 y 2: Del bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 3 y 4: Del bloque de Análisis (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 5 y 6: Del bloque de Geometría (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 7 y 8: Del bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos una).

Si se responde a más de cuatro cuestiones, sólo se corrigen las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se puden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 5 de julio de 2022.

Luis J. Alías Linares
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

(2,5 p.) Un conocido defraudador fiscal tiene distribuido su dinero negro en tres paraísos fiscales, las Islas Caimán, Panamá y Fiji. La suma total de este dinero es de 150 millones de euros. Si perdiera la cuarta parte del dinero que tiene en las Islas Caimán, seguiría teniendo allí el triple del dinero que tiene en Panamá. Además, el dinero que tiene en Panamá sumado a las dos quintas partes del dinero que tiene en Fiji es exactamente la mitad del dinero que tiene en las Islas Caimán. Calcule cuánto dinero tiene en cada uno de los paraísos fiscales.

Solución: Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en donde las incógnitas son las cantidades de dinero que hay en cada uno de los tres paraísos fiscales. Denotemos por x el dinero que hay en las Islas Caimán, por y el dinero que hay en Panamá y por z el dinero que hay en Fiji, todos ellos en millones de euros. Entonces la primera ecuación es

$$x + y + z = 150.$$

La segunda ecuación es $x - \frac{1}{4}x = 3y$ o, equivalentemente, $4x - x = 3x = 12y$. Es decir,

$$x - 4y = 0.$$

La tercera ecuación es $y + \frac{2}{5}z = \frac{1}{2}x$, es decir, $10y + 4z = 5x$ o, equivalentemente

$$5x - 10y - 4z = 0.$$

Por lo tanto, hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 150 \\ x - 4y & = & 0 \\ 5x - 10y - 4z & = & 0 \end{array} \right.$$

El sistema se puede resolver por cualquiera de los métodos que se desee. En este caso optamos por el que pensamos que es más sencillo, pero cualquier método utilizado, siendo correcto, es válido. Si despejamos $x = 4y$ en la segunda ecuación y lo sustituimos en las otras dos ecuaciones nos queda

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 5y + z & = & 150 \\ 5y - 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

de donde se tiene

$$3z = 150 \Longrightarrow z = \frac{150}{3} = 50 \text{ millones de euros.}$$

Despejando ahora la incógnita y en la segunda de las dos últimas ecuaciones se tiene

$$5y = 2z \Longrightarrow y = \frac{2}{5}z = \frac{2}{5} \cdot 50 = 20 \text{ millones de euros.}$$

Reemplazando ahora el valor de $y = 20$ en la segunda de las tres primeras ecuaciones resulta $x = 4y = 80$ millones de euros.

Por tanto, el defraudador fiscal tiene en las Islas Caimán, en Panamá y en Fiji, respectivamente, la cantidad de 80, 20 y 50 millones de euros.

También se puede resolver por el método de Cramer. Para ello, escribimos el sistema en forma matricial, de manera que la matriz ampliada del sistema es

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

El determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 5 & -10 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 10 + 0 + 20 + 0 + 4 = 30 \neq 0$$

y la solución del sistema por Cramer es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 150 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -10 & -4 \end{vmatrix} = \frac{150 \cdot 16}{30} = \frac{2400}{30} = 80, \\ y &= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 150 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \frac{150 \cdot 4}{30} = \frac{600}{30} = 20, \\ z &= \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 1 & -4 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-150 \cdot 10 + 150 \cdot 20}{30} = \frac{1500}{30} = 50. \end{aligned}$$

Finalmente, también se puede resolver por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -5 & -1 & -150 \\ 0 & -15 & -9 & -750 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 - 3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -5 & -1 & -150 \\ 0 & 0 & -6 & -300 \end{array}\right) \xrightarrow[(-\frac{1}{6})F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & -5 & -1 & -150 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right)$$

Resolvemos entonces escalonadamente. De la tercera ecuación tenemos directamente $z = 50$. Usando este valor de z en la segunda ecuación tenemos $-5y = -150 + 50 = -100 \Longrightarrow y = 20$. Finalmente, sustituyendo los valores de y y de z en la primera ecuación se tiene $x = 150 - 20 - 50 = 80$.

Cuestión 2.

Se dice que una matriz cuadrada A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.

a) **(0,75 p.)** Si A es una matriz idempotente, calcule razonadamente A^{2022}.

b) **(0,75 p.)** Si A es una matriz idempotente y regular (o inversible), calcule razonadamente su determinante.

c) **(1 p.)** Determine para qué valores de a y b la siguiente matriz es idempotente

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Solución: a) Como $A^2 = A$, se tiene que

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A, \\ A^4 &= A^3 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A, \\ A^5 &= A^4 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A, \end{aligned}$$

y, en definitiva,

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = A \cdot A = A^2 = A,$$

para cualquier exponente natural $n \geq 2$. En consecuencia,

$$A^{2022} = A.$$

Importante: No se exige ni mucho menos una demostración por inducción; es suficiente con poner en evidencia cómo se repite el patrón $A^n = A$ para todo $n \geq 2$.

b) Como $A^2 = A$, por las propiedades del determinante se tiene que

$$|A^2| = |A|^2 = |A| \Longrightarrow |A|^2 - |A| = 0 \Longrightarrow |A| \cdot (|A| - 1) = 0,$$

lo cual implica que $|A| = 0$ o $|A| = 1$. Pero como sabemos además que A es regular, no puede ser $|A| = 0$ y debe ser necesariamente $|A| = 1$.

Otra forma de resolver este apartado es demostrar que si una matriz A es idempotente y regular, debe ser necesariamente la matriz identidad $A = I$, en cuyo caso se tendrá trivialmente que $|A| = |I| = 1$. Para demostrar que $A = I$ basta con multiplicar por A^{-1} (que sabemos que existe) en la igualdad $A^2 = A$ (a izquierda o a derecha), para llegar a que

$$A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot A = I \quad \text{o, alternativamente,} \quad A^2 \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I.$$

c) Haciendo los cálculos correspondientes, se tiene que

$$\begin{aligned} A^2 = A \cdot A &= \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2a + 2(1-a) & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $A^2 = A$ si y solo si

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2 & (1-a)^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

lo cual ocurre si y solo si

$$\begin{aligned} a^2 &= a \\ (1-a)^2 &= 1-a \\ b^2 &= b \end{aligned}$$

La segunda ecuación es equivalente a la primera, ya que

$$(1-a)^2 = 1-a \iff 1-2a+a^2 = 1-a \iff a^2 = 2a-a \iff a^2 = a.$$

Por lo tanto, $A^2 = A$ si y solo si $a^2 = a$ y $b^2 = b$. Pero

$$a^2 = a \iff a^2 - a = 0 \iff a(a-1) = 0 \iff a = 0 \text{ o } a = 1.$$

Del mismo modo, $b^2 = b$ si y solo si $b = 0$ o $b = 1$. En definitiva, $A^2 = A$ si y solo si $a = 0$ o $a = 1$ y $b = 0$ o $b = 1$.

Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

Considere la función $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si} \quad x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ a & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

a) **(0,5 p.)** Calcule el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

b) **(1 p.)** Determine el valor de a para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$.

c) **(1 p.)** Estudie si, para dicho valor de a, la función $f(x)$ es derivable en $x = 1$. En caso afirmativo, calcule el valor de la derivada de f en $x = 1$.

Solución: a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Podemos resolver esta indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

b) Dado que existe $f(1) = a$, para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ debe existir también el $\lim_{x\to 1} f(x)$ y ha de ser igual a $f(1) = a$. Vamos entonces a calcular dicho límite:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln(1)}{1-1} = \frac{0}{0}.$$

Para resolver esta indeterminación podemos aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Por lo tanto, para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ debe ser $a = 1$.

c) Una vez que sabemos que la función es continua para $a = 1$, para estudiar si la función es derivable en $x = 1$ una primera alternativa es aplicar la definición de derivada en un punto y estudiar si existe el siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

y, en caso de que exista, dicho límite será el valor de la derivada en $x = 1$.

Para ello, operamos primero de la siguiente manera (con $x \neq 1$):

$$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \frac{\frac{\ln x - (x-1)}{x-1}}{x-1} = \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2},$$

de modo que

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \frac{\ln(1) - 1 + 1}{(1-1)^2} = \frac{0 - 1 + 1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Para resolver esta indeterminación podemos aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital, de manera que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)}.$$

Operando algebraicamente esta fracción, se tiene

$$\frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \frac{\frac{1-x}{x}}{2(x-1)} = \frac{-(x-1)}{2x(x-1)} = \frac{-1}{2x}.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

En conclusión, hemos comprobado que la función $f(x)$ sí es derivable en $x = 1$, ya que existe el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2},$$

y este valor es precisamente el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = 1$,

$$f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

El siguiente razonamiento alternativo para dar respuesta al apartado c) también es correcto y, posiblemente, esté más extendido entre el alumnado de Bachillerato. El razonamiento está basado en el siguiente resultado que, a su vez, es consecuencia del teorema del valor medio de Lagrange (o, si se prefiere, de la regla de L'Hôpital):

> Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua en (a, b) y derivable en $(a, b) \setminus \{x_0\}$ para un cierto punto $x_0 \in (a, b)$. Si existe y es finito el límite de $f'(x)$ cuando x tiende a x_0, entonces la función $f(x)$ es derivable en x_0 y se tiene que
>
> $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x).$$
>
> Además, como consecuencia de ello se tiene también que la función derivada $f'(x)$ es continua en x_0.

En nuestro caso, sabemos que para $a = 1$ la función $f(x)$ es continua en $(0, +\infty)$. Además, comprobamos también que $f(x)$ es derivable en el subdominio abierto formado por $\{x \in \mathbb{R} : x > 0, x \neq 1\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ y su derivada en dicho subdominio viene dada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} \quad \text{si} \quad x > 0 \ \text{ y } \ x \neq 1.$$

Calculando a continuación el límite de esta expresión cuando $x \to 1$ tenemos que (aplicando dos veces la regla de L'Hôpital)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} f'(x) &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{0}{0} \quad \text{(aplicamos primera vez L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{1 - \ln x - 1}{(x-1)^2 + 2x(x-1)} = \frac{0}{0} \quad \text{(aplicamos segunda vez L'Hôpital)} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{-\frac{1}{x}}{2(x-1) + 2(x-1) + 2x} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos concluir que $f(x)$ es derivable en $x = 1$ y

$$f'(1) = -\frac{1}{2}.$$

Observación importante: En algunas ocasiones, este segundo método no es válido y hay que recurrir necesariamente a la definición de derivada en un punto (primer razonamiento). Esto ocurre cuando la función es derivable en el punto en cuestión, pero la función derivada no es continua en dicho punto. El ejemplo típico de este caso es la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ x \neq 0 \\[2ex] 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable en todo $\mathbb{R}$ pero la función derivada $f'(x)$ no es continua en $x = 0$. Por ese motivo, no se puede aplicar el segundo razonamiento. En efecto, podemos ver que existe

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

ya que $x \to 0$ y $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, aunque es oscilante, está acotado en valor absoluto por 1, por lo que el producto $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ converge a 0. Además, $f'(x)$ para $x \neq 0$ viene dada por

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} + x^2 \cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \text{ y } x \neq 0.$$

Si intentamos calcular el límite cuando $x \to 0$ de esta expresión tenemos que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$$

pero este límite no existe porque es oscilante. Por dicho motivo, no se puede aplicar el segundo razonamiento. Por supuesto, somos conscientes de que esta explicación excede el nivel de la asignatura de Matemáticas II de Bachillerato, pero aprovechamos la ocasión para aclararlo aquí y enfatizar que, en determinadas ocasiones, es necesario recurrir a la definición de derivada en un punto para justificar la derivabilidad de una función en dicho punto.

Cuestión 4.

Considere la función $f(x) = x^2 e^{-x}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **(1 p.)** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

b) **(1 p.)** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

c) **(0,5 p.)** Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(0, 1)$.

Solución: a) La derivada de $f(x)$ viene dada por

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$, calculamos primero los puntos críticos de $f(x)$, es decir, las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff (2x - x^2)e^{-x} = 0 \iff 2x - x^2 = x(2 - x) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = 2,$$

donde hemos tenido en cuenta que $e^{-x} > 0$ para todo valor de x.

A continuación, estudiamos el signo de $f'(x)$ para ver dónde la función es creciente o decreciente. Como $e^{-x} > 0$ para todo valor de x, el signo de $f'(x)$ coincide con el signo del factor $2x - x^2 = x(2 - x)$, que se anula en $x = 0$ y en $x = 2$. Por tanto para estudiar el signo de $f'(x)$ basta con darle valores a $x(2 - x)$ a la izquierda y a la derecha de estos valores.

	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 2)$	$x = 2$	$(2, +\infty)$
Valor de x	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
Valor de $x(2 - x)$	-3	0	1	0	-3
Signo de $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
Crecimiento/decrecimiento de $f(x)$	$\searrow$	Mínimo	$\nearrow$	Máximo	$\searrow$

En conclusión, $f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y creciente en el intervalo $(0, 2)$. Aunque no se pide en el ejercicio, a partir de aquí se concluye también que $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

b) Para calcular la integral indefinida de $f(x)$ utilizamos el método de integración por partes, haciendo $u = x^2$ y $dv = e^{-x}dx$. En ese caso se tiene $du = 2xdx$ y $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$, por lo que

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2xe^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx$$

Hacemos de nuevo integración por partes, tomando ahora $u = x$ y $dv = e^{-x}dx$. En este caso se tiene $du = dx$ y $v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$, por lo que, continuando con el cálculo anterior,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \int xe^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \left(-xe^{-x} + \int e^{-x} dx \right) \\ &= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2 \int e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C. \end{aligned}$$

c) Por el apartado b) sabemos que la primitiva general de $f(x)$ es

$$F(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.$$

Se trata, por tanto, de calcular el valor de C para que $F(0) = 1$. En este caso

$$F(0) = -2e^0 + C = -2 + C = 1 \Longleftrightarrow C = 1 + 2 = 3.$$

La solución es

$$F(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + 3.$$

Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Considere el plano π de ecuación $\pi : x + y + z = 1$ y la recta r dada por

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} x - y &=& 0 \\ ax - z &=& a - 1 \end{array} \right.$$

a) **(1,5 p.)** Estudie la posición relativa del plano π y de la recta r en función del parámetro a.

b) **(1 p.)** Si $a = -1$ la recta r corta al plano π. Calcule en ese caso el punto de corte y el ángulo que forma la recta r con el plano π.

Solución: a) Dado que la recta r viene dada por su ecuación ímplicita como intersección de dos planos, la manera más directa (a nuestro juicio) de resolver este apartado es realizar el estudio del sistema lineal de ecuaciones dependiente del parámetro a formado por la ecuación del plano π y por la ecuación implícita de r, es decir, el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x+y+z & = & 1 \\ x-y & = & 0 \\ ax-z & = & a-1 \end{array} \right.$$

cuya matriz ampliada es

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & 0 & -1 & a-1 \end{array} \right).$$

Observamos en primer lugar que A tiene siempre $\text{rango}(A) \geq 2$, independientemente del valor de a, ya que tiene el siguiente menor de orden 2 distinto de 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Además, el determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + a + 1 = a + 2 = 0 \Longleftrightarrow a = -2.$$

Por lo tanto, si $a \neq -2$ se tiene $|A| \neq 0$. Esto implica necesariamente que $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ y se trata de un sistema compatible determinado, lo cual significa geométricamente que la recta corta al plano en un punto.

Si $a = -2$ sabemos que $\text{rango}(A) = 2$. Veamos qué ocurre con el rango de A^*. Para ello basta ampliar el menor de orden 2 de A que ya sabemos que es distinto de 0 al único menor posible de orden 3 de A^* que lo contiene y ver si es o no distinto de 0 (por supuesto, utilizando que $a = -2$):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

Por tanto, si $a = -2$ se tiene $\text{rango}(A^*) = 3 > \text{rango}(A) = 2$ y se trata de un sistema incompatible, lo cual significa geométricamente que la recta r es paralela al plano π.

Otra forma de realizar el apartado **a)** es calculando el vector director de r y estudiar su comportamiento con respecto al vector normal del plano π. Para ello, calculamos el vector director de r, al que denotamos por $\vec{v}$, haciendo

$$\vec{v} = (1,-1,0) \times (a,0,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + a\vec{k} + \vec{j} = (1,1,a).$$

El vector normal de π es $\vec{n} = (1,1,1)$ y el producto escalar de ambos vectores es

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (1,1,a) \cdot (1,1,1) = 1 + 1 + a = 2 + a.$$

Vemos entonces que

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 2 + a = 0 \Longleftrightarrow a = -2.$$

Por la tanto, si $a \neq -2$ se tiene $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$, lo cual significa geométricamente que $\vec{v}$ no es perpendicular a $\vec{n}$ y, por lo tanto, la recta r corta al plano π en un punto.

Si $a = -2$ se tiene que $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Es decir, $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{n}$, lo cual significa geométricamente que pueden ocurrir dos cosas: o bien la recta r está contenida en el plano π o bien la recta r es paralela al plano π. Para decidir cuál de las dos alternativas es la correcta, basta con comprobar si un punto arbitrario de r está contenido en π o no. Teniendo en cuenta que $a = -2$, tomamos entonces el punto de r determinado por $x = y = 0$ y $z = 3$ y comprobamos que $x + y + z = 0 + 0 + 3 = 3 \neq 1$, por lo que el punto no está en π. Por lo tanto, la recta r no está contenida en el plano π y debe ser entonces paralela al plano.

b) Cuando $a = -1$ sabemos que la recta r corta al plano π (porque nos lo dice el enunciado del ejercicio o porque lo hemos deducido correctamente en el apartado anterior). Para calcular el punto de corte, basta con resolver el sistema de ecuaciones formado por la ecuación del plano y la ecuación implícita de la recta, es decir, resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z & = & 1 \\ x - y & = & 0 \\ -x - z & = & -2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ x - y & = & 0 \\ x + z & = & 2 \end{array} \right.$$

Por la segunda ecuación se tiene $x = y$. Haciendo $y = x$ en las otras dos ecuaciones se tiene

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + z & = & 1 \\ x + z & = & 2 \end{array} \right.$$

y restando estas dos ecuaciones se tiene

$$x = -1 \Longrightarrow z = 2 - x = 2 + 1 = 3 \text{ además de } y = x = -1.$$

Por tanto el punto de corte es el punto $P(-1,-1,3)$.

El ángulo que forma la recta r con el plano π es el complementario del menor ángulo formado por el vector director de la recta r, que denotamos por $\vec{v}$, y el vector normal del plano π, que denotamos por $\vec{n}$. Es decir,

$$\angle(r,\pi) = 90^{\text{o}} - \angle(\vec{v},\vec{n}) \text{ grados.}$$

o, si se prefiere trabajar en radianes,

$$\angle(r,\pi) = \frac{\pi}{2} - \angle(\vec{v},\vec{n}) \text{ radianes,}$$

siendo

$$\angle(\vec{v},\vec{n}) = \arccos \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \in [0, 90^{\text{o}}] \quad \text{o} \quad \angle(\vec{v},\vec{n}) = \arccos \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

En nuestro caso, $\vec{n} = (1,1,1)$ y, como $a = -1$,

$$\vec{v} = (1,-1,0) \times (-1,0,-1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} + \vec{j} = (1,1,-1).$$

Por tanto, trabajando en grados,

$$\begin{aligned} \cos\angle(\vec{v},\vec{n}) &= \frac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow \angle(\vec{v},\vec{n}) = \arccos(\frac{1}{3}) = 70,5288^{\text{o}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\angle(r,\pi) = 90 - 70,5288 = 19,4712 \text{ grados} = 19^{\text{o}}\,28'\,16,32''$$

Cuestión 6.

Considere las rectas r y s dadas por

$$r : \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x + 2z &= 1 \\ y &= 0 \end{cases}$$

a) **(1,5 p.)** Compruebe que las rectas son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano) y calcule la ecuación del plano que las contiene.

b) **(1 p.)** Calcule la distancia de la recta r al plano $\pi : x - y + 2z = 3$.

Solución: a) El vector director de r es $\vec{v} = (-1,1,1)$ y el vector director de s es

$$\vec{w} = (1,0,2) \times (0,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{k} = (-2,0,1).$$

Como los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales, sabemos ya que las rectas no son paralelas ni coincidentes. Por lo tanto, las rectas serán coplanarias si y solo si se cortan en un punto. En este caso, a partir de la ecuación continua de r es muy fácil identificar el punto $P(1,0,0)$ como punto de r y comprobar que este mismo punto está en la recta s, ya que cumple la ecuación implícita de s: $x + 2z = 1 + 0 = 1$, $y = 0$. Por tanto r y s se cortan en el punto P y son rectas coplanarias.

Para calcular la ecuación del plano que las contiene, basta tomar como punto del plano el propio $P(1,0,0)$ y como vectores directores del plano los vectores $\vec{v} = (-1,1,1)$ y $\vec{w} = (-2,0,1)$. Por tanto, la ecuación general del plano que las contiene es

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (x-1) - 2y + 2z + y = 0 \Longleftrightarrow x - y + 2z = 1.$$

Observación: Otra forma de ver que las rectas son coplanarias es comprobar que el rango de $\{\vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{PQ}\}$ es 2, donde P y Q son dos puntos cualesquiera de las rectas r y s, respectivamente.

b) Sabemos que el vector director de r es $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ y el vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -1, 2)$. En primer lugar observamos que

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = -1 - 1 + 2 = 0.$$

Por lo tanto, o bien la recta r es paralela al plano π o bien está contenida en el plano π. En cualquiera de los dos casos, la distancia de r a π se puede calcular directamente como la distancia de un punto cualquiera de r a π. Tomamos como punto el propio $P(1, 0, 0)$ y se tiene

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 - 0 + 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \text{ unidades de distancia.}$$

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

Un estudio publicado en *Environmental, Science and Technology* ha revelado que la probabilidad de contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes es 0,45. Además, según los datos de las Naciones Unidas, en el mundo hay actualmente un 50,5 % de hombres y un 49,5 % de mujeres.

a) **(0,5 p.)** Suponiendo que los sucesos ”contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes” y ”ser mujer” sean independientes, calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mujer y contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

b) **(1 p.)** En el mismo supuesto que en el apartado a), calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar no sea mujer o no contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

c) **(1 p.)** Si se eligen 8 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 4 de ellas contraigan el Covid-19 en el interior de restaurantes?

Solución: Llamamos A al suceso ”contraer el Covid-19 en el interior de restaurantes” y B al suceso ”ser mujer”. Por tanto, los datos del ejercicio son

$$P(A) = 0,45 \quad \text{y} \quad P(B) = 0,495.$$

a) Se trata de calcular la probabilidad del suceso intersección $A \cap B$. Como se está suponiendo que los sucesos A y B son independientes, entonces se tiene

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,45 \cdot 0,495 = 0,22275.$$

b) Se trata de calcular la probabilidad del suceso $\bar{A} \cup \bar{B}$, donde, como es habitual, $\bar{A}$ y $\bar{B}$ denotan los sucesos contrarios de A y de B, respectivamente. Teniendo que cuenta que

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

se tiene que

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B),$$

y, como se está suponiendo que A y B son independientes, podemos usar el apartado a) para concluir que

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,22275 = 0,77725.$$

c) En este apartado llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de personas que contraen el Covid-19 en el interior de restaurantes cuando elegimos 8 personas al azar. Se trata por tanto de una variable aleatoria que sigue una distribución binomial de parámetros $n = 8$, porque se eligen 8 personas al azar, y $p = P(A) = 0,45$, porque es la probabilidad de que una persona contraiga el Covid-19 en el interior de restaurantes.

Por tanto $X \sim B(n = 8, p = 0,45)$ y se trata de calcular $P(X \geq 4)$. Utilizando la tabla de la binomial (o aplicando la fórmula correspondiente) se tiene

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) \\ &= 0,2627 + 0,1719 + 0,0703 + 0,0164 + 0,0017 = 0,523 \end{aligned}$$

o, alternativamente,

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)) \\ &= 1 - (0,0084 + 0,0548 + 0,1569 + 0,2568) = 1 - 0,4769 = 0,5231. \end{aligned}$$

La aparente discrepancia en el resultado se debe a la precisión usada en la tabla. Las dos respuestas se considerarán correctas.

Cuestión 8.

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
La altura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 175 cm y desviación típica 4 cm.

a) **(0,75 p.)** Calcule la probabilidad de que un individuo elegido al azar mida más de 170 cm.

b) **(0,75 p.)** Calcule qué porcentaje de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) **(1 p.)** Calcule la altura que es superada por el 33 % de la población.

Solución: a) Denotemos por X a la variable aleatoria "altura de los individuos" de la citada población. Sabemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 175$ cm y $\sigma = 4$ cm. Nos piden $P(X > 170)$ (o $P(X \geq 170)$, ya que al ser una variable continua no hay diferencia entre $>$ y $\geq$).

Haciendo uso de la tipificación $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ sabemos entonces que $Z \sim N(0,1)$ y que

$$P(X > 170) = P\left(Z > \frac{170-175}{4}\right) = P(Z > -1,25)$$

y, haciendo uso de la simetría de la función de densidad de Z y consultando en la tabla de Z, se tiene

$$P(X > 170) = P(Z > -1,25) = P(Z < 1,25) = 0,8944.$$

b) Para calcular dicho porcentaje, vamos a calcular al probabilidad $P(170 < X < 185)$ y, a continuación, pasarlo a porcentaje. Tipificando de nuevo y consultando la tabla de Z se tiene

$$\begin{aligned} P(170 < X < 185) &= P\left(\frac{170-175}{4} < Z < \frac{185-175}{4}\right) \\ &= P(-1,25 < Z < 2,5) = P(Z < 2,5) - P(Z < -1,25) \\ &= P(Z < 2,5) - (1 - P(Z > -1,25)) = 0,9938 - (1 - 0,8944) \\ &= 0,9938 - 1 + 0,8944 = 0,8882. \end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que el $88,82\,\%$ de la población mide entre 170 y 185 cm.

c) Se trata de calcular el valor x para el cual se tiene que

$$P(X > x) = 0,33 \Longleftrightarrow P(X < x) = 1 - 0,33 = 0,67.$$

Haciendo uso de la tipificación, tenemos que

$$0,67 = P(X < x) = P\left(Z < \frac{x-175}{4}\right) = 0,67$$

y, consultando en la tabla de Z, sabemos que

$$\frac{x-175}{4} = 0,44.$$

Por tanto, despejando aquí x tenemos

$$x = 175 + 4 \cdot 0,44 = 175 + 1,76 = 176,76 \text{ cm}.$$