RESOLUCIÓN DEL EXAMEN EBAU 2022
Matemáticas II

El objeto de este documento es doble. Por una parte, proporcionar a los profesores y alumnos de Bachillerato de la Región de Murcia la **resolución del examen** de Matemáticas II de la convocatoria EBAU2022-JUNIO. Por otra parte, **agilizar las posibles reclamaciones** a la corrección del examen, toda vez que, habiendo hecho pública la resolución de las cuestiones, pueda ser más fácil indentificar posibles errores en la corrección. Evidentemente, por la propia naturaleza de la disciplina, **una misma cuestión admite múltiples soluciones válidas y correctas** y resulta prácticamente imposible recoger aquí toda esa variedad de soluciones, a pesar de que hemos intentado incluir el mayor número de ellas. Por supuesto, cualquier otra solución a cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, **aunque no esté incluida en este documento**.

Como es bien sabido, el examen consta de un total de **ocho cuestiones** y se debe responder a un **máximo de cuatro** de ellas, elegidas libremente por el alumno. Las ocho cuestiones se pueden agrupar por bloques temáticos de la siguiente manera, pero insistimos en que se pueden escoger libremente un máximo de cuatro y en cualquier orden, **independientemente de que pertenezcan o no al mismo bloque temático**:

Cuestiones 1 y 2: Del bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 3 y 4: Del bloque de Análisis (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 5 y 6: Del bloque de Geometría (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 7 y 8: Del bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos una).

Si se responde a más de cuatro cuestiones, sólo se corrigen las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se puden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 7 de junio de 2022.

Luis J. Alías Linares
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

(2,5 p.) La suma de las edades de Carmela, Esperanza y Aurora es 68 años. La edad de Carmela es 5 años más que la mitad de la suma de las edades de Esperanza y Aurora. Además, dentro de 4 años la edad de Aurora será la edad que actualmente tiene Esperanza. Calcule las edades de cada una de ellas.

Solución: Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en donde las incógnitas son las edades de Carmela, Esperanza y Aurora. Denotemos por x la edad de Carmela, por y la edad de Esperanza y por z la edad de Aurora. Entonces la primera ecuación es

$$x + y + z = 68.$$

La segunda ecuación es $x = \frac{y+z}{2} + 5$ o, equivalentemente, $2x = y + z + 10$. Es decir,

$$2x - y - z = 10.$$

La tercera ecuación es $z + 4 = y$, es decir,

$$y - z = 4.$$

Por lo tanto, hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 68 \\ 2x - y - z & = & 10 \\ y - z & = & 4 \end{array} \right.$$

El sistema se puede resolver por cualquiera de los métodos que se desee. En este caso optamos por el que pensamos que es más sencillo, pero cualquier método utilizado, siendo correcto, es válido. Si sumamos las dos primeras ecuaciones llegamos directamente a

$$3x = 78 \Longrightarrow x = \frac{78}{3} = 26 \text{ años.}$$

Reemplazamos el valor de $x = 26$ en la primera ecuación y resulta $y+z = 68-x = 68-26 = 42$, que junto con la tercera ecuación nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para y y z:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y + z & = & 42 \\ y - z & = & 4 \end{array} \right.$$

Sumando estas dos ecuaciones se tiene

$$2y = 46 \Longrightarrow y = \frac{46}{2} = 23 \text{ años.}$$

Finalmente, con la tercera ecuación calculamos $z = y - 4 = 23 - 4 = 19$ años.

Por tanto, las edades de de Carmela, Esperanza y Aurora son, respectivamente, 26, 23 y 19 años.

También se puede resolver por el método de Cramer. Para ello, escribimos el sistema en forma matricial, de manera que la matriz ampliada del sistema es

$$A^* = (A|b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 68 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right).$$

El determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 0 + 0 + 1 + 2 = 6 \neq 0$$

y la solución del sistema por Cramer es

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 68 & 1 & 1 \\ 10 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{68 + 10 - 4 + 4 + 68 + 10}{6} = \frac{156}{6} = 26, \\ y &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 68 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-10 + 8 + 0 + 0 + 4 + 136}{6} = \frac{138}{6} = 23, \\ z &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 68 \\ 2 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{-4 + 136 + 0 + 0 - 10 - 8}{6} = \frac{114}{6} = 19. \end{aligned}$$

Finalmente, también se puede resolver por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 68 \\ 2 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 2F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 68 \\ 0 & -3 & -3 & -126 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[(-\frac{1}{3})F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 68 \\ 0 & 1 & 1 & 42 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 68 \\ 0 & 1 & 1 & 42 \\ 0 & 0 & -2 & -38 \end{array}\right) \xrightarrow[(-\frac{1}{2})F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 68 \\ 0 & 1 & 1 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \end{array}\right)$$

Resolvemos entonces escalonadamente. De la tercera ecuación tenemos directamente $z = 19$. Usando este valor de z en la segunda ecuación tenemos $y = 42 - 19 = 23$. Finalmente, sustituyendo los valores de y y de z en la primera ecuación se tiene $x = 68 - 23 - 19 = 26$.

Cuestión 2.

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **(1 p.)** Si I denota la matriz identidad de orden 3, compruebe que $A^3 = -I$ y calcule A^{2023}.

b) **(0,5 p.)** Calcule la inversa de A.

c) **(1 p.)** Resuelva la ecuación matricial $AX - B^T = A^2$, donde B^T denota la matriz traspuesta de B.

Solución: a) Haciendo los cálculos correspondientes, se tiene que

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$

como se quería comprobar.

Para calcular A^{2023}, en primer lugar observamos que $A^6 = I$ ya que

$$A^6 = (A^3)^2 = (-I)^2 = (-1)^2 \cdot I^2 = I.$$

Por lo tanto, para calcular A^{2023} basta con hacer la división con resto de 2023 entre 6, ya que, poniendo $2023 = 337 \cdot 6 + 1$ se tiene

$$A^{2023} = A^{337 \cdot 6+1} = A^{337 \cdot 6} \cdot A^1 = (A^6)^{337} \cdot A = I^{337} \cdot A = I \cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si no nos damos cuenta de que $A^6 = I$ también se puede calcular usando que $A^3 = -I$. En ese caso, hacemos la división con resto de 2023 entre 3 y se tiene $2023 = 674 \cdot 3 + 1$, de modo que

$$A^{2023} = A^{674 \cdot 3+1} = A^{674 \cdot 3} \cdot A^1 = (A^3)^{674} \cdot A = (-I)^{674} \cdot A = (-1)^{674} \cdot I^{674} \cdot A = I \cdot A = A,$$

porque $(-1)^{\text{nº par}} = 1$.

Finalmente, también se puede resolver *por la cuenta de la vieja*, haciendo

$$\begin{aligned} A &= A \\ A^2 &= A^2 \\ A^3 &= -I \\ A^4 &= A^3 \cdot A = (-I) \cdot A = -A \\ A^5 &= A^4 \cdot A = (-A) \cdot A = -A^2 \\ A^6 &= A^5 \cdot A = (-A^2) \cdot A = -A^3 = I \end{aligned}$$

y a partir de aquí se ve que cada vez que el exponente es múltiplo de 6 se obtiene la identidad. Por lo tanto, observando que $2022 = 337 \cdot 6$ es el mayor múltiplo de 6 que es menor que 2023, se tiene $2023 = 2022 + 1$ de modo que

$$A^{2023} = A^{2022+1} = A^{2022} \cdot A^1 = I \cdot A = A.$$

b) Si nos hemos dado cuenta en el apartado anterior de que $A^6 = I$, entonces este apartado es inmediato ya que eso significa que $A^{-1} = A^5 = -A^2$, y utilizando los cálculos de a) se tiene

$$A^{-1} = A^5 = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por supuesto, otra forma de hacerlo es calculando la inversa de A por cualquiera de los métodos válidos. Por ejemplo, utilizando la fórmula

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A^T) = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) Despejando X en la ecuación matricial se tiene

$$AX - B^T = A^2 \Longrightarrow AX = A^2 + B^T \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot (A^2 + B^T) = A^{-1} \cdot A^2 + A^{-1} \cdot B^T,$$

y, teniendo en cuenta que $A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot A \cdot A = I \cdot A = A$, se llega a que

$$X = A + A^{-1} \cdot B^T.$$

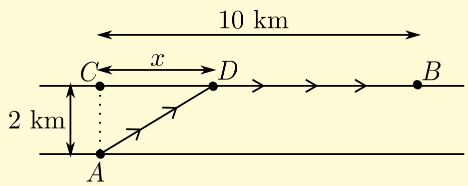
Sustituyendo ahora el valor numérico de cada una de las matrices, se llega a la solución:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & -9 & -14 \\ 0 & 7 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

En este ejercicio se puede utilizar el resultado del apartado a) para realizar el apartado b), aun en el caso en que no se sepa realizar el apartado a).
Un triatleta participa en una competición de SwimRun en la que debe ir desde el punto A, situado en la orilla de un canal de agua en reposo de 2 kilómetros de ancho, hasta el punto B, situado en la otra orilla del canal y a una distancia de 10 kilómetros del punto C (punto opuesto de A), tal y como se indica en la figura. Para ello, debe ir nadando desde A hasta cualquier punto D de la otra orilla del canal y continuar corriendo desde D hasta B. El triatleta tiene plena libertad para elegir D.



a) **(1 p.)** Sabiendo que el triatleta es capaz de nadar a una velocidad de 4 km/h y de correr a una velocidad de 12 km/h, demuestre que el tiempo total empleado por el triatleta en ir desde A hasta B (pasando por D) viene dado por la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \dfrac{10-x}{12}$, donde x denota la distancia de C a D.

b) **(1,5 p.)** Calcule cuál debe ser el punto D para que el tiempo empleado por el triatleta en ir desde A hasta B sea mínimo. ¿Cuánto tardará en dicho caso?

Solución: a) Según se observa en la figura, la distancia que el triatleta debe nadar es la distancia de A a D y la distancia que debe correr es la distancia de D a B. La distancia de A a D es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son 2 y x km, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras se tiene

$$\text{distancia}(A, D) = \sqrt{x^2+2^2} = \sqrt{x^2+4} \text{ km}.$$

Como nada a una velocidad de 4 km/h, el tiempo invertido para recorrer esa distancia es

$$\text{Tiempo}_{\text{nadar}} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} \text{ horas}.$$

Esto también se puede hacer por un simple razonamiento de proporcionalidad, sin necesidad de saber que velocidad=espacio/tiempo:

$$\begin{array}{rcl} 4 \text{ km} & \longrightarrow & 1 \text{ hora} \\ \sqrt{x^2+4} \text{ km} & \longrightarrow & ? \text{ horas} \end{array}$$

de modo que

$$? = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} \text{ horas}.$$

Por otra parte, a partir de la figura se ve que la distancia de D a B es

$$\text{distancia}(D, B) = (10 - x) \text{ km}.$$

Como corre a una velocidad de 12 km/h, el tiempo invertido para recorrer esa distancia es

$$\text{Tiempo}_{\text{correr}} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \frac{10 - x}{12} \text{ horas}.$$

Igual que antes, esto también se puede hacer por un simple razonamiento de proporcionalidad, sin necesidad de saber que velocidad=espacio/tiempo:

$$\begin{aligned} 12 \text{ km} &\longrightarrow 1 \text{ hora} \\ 10 - x \text{ km} &\longrightarrow \text{? horas} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo total empleado para ir de A a B, en función de x es

$$f(x) = \text{Tiempo total} = \text{Tiempo}_{\text{nadar}} + \text{Tiempo}_{\text{correr}} = \frac{\sqrt{x^2+4}}{4} + \frac{10-x}{12} \text{ horas}.$$

b) Se trata de calcular para qué valor de x se alcanza el mínimo de la función $f(x)$, teniendo en cuenta que los valores "permitidos" de x son $0 \leq x \leq 10$, es decir, la variable $x \in [0, 10]$. Para estudiar el crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ en su dominio, estudiamos en primer lugar su derivada y sus puntos críticos (candidatos a ser extremos relativos). La derivada de $f(x)$ viene dada por:

$$f'(x) = \frac{1}{4}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{12} = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{12}.$$

Los puntos críticos son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{12} \iff \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \iff 3x = \sqrt{x^2+4}.$$

Elevando al cuadrado esta última igualdad, se tiene

$$9x^2 = x^2 + 4 \Longrightarrow 8x^2 = 4 \Longrightarrow x^2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ km} \approx 0,707107 \text{ km}$$

Nos quedamos solo con la raíz positiva porque $x \in [0, 10]$. Para comprobar si efectivamente se trata de un mínimo, podemos hacerlo estudiando el signo de $f'(x)$ para ver dónde la función es creciente o decreciente. Para ello escribimos $f(x)$ como una fracción:

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{12} = \frac{3x - \sqrt{x^2+4}}{12\sqrt{x^2+4}}.$$

El denominador de esta expresión es siempre positivo, por lo que el signo de $f'(x)$ será el signo del numerador. Sabemos por el cálculo anterior que $3x - \sqrt{x^2+4} = 0$ justo en $x = 1/\sqrt{2}$. Dando valores a la izquierda y a la derecha de este valor vemos que $f'(x) < 0$ si $0 \leq x < 1/\sqrt{2}$ (por ejemplo, $f'(0) < 0$), mientras que $f'(x) > 0$ si $1/\sqrt{2} < x \leq 10$ (por ejemplo, $f'(1) > 0$).

Por lo tanto, la función $f(x)$ es decreciente (derivada negativa) en $[0, 1/\sqrt{2})$ y es creciente (derivada positiva) en $(1/\sqrt{2}, 10]$, por lo que concluimos que en $x = 1/\sqrt{2}$ alcanza su mínimo absoluto para $x \in [0, 10]$.

En conclusión, para hacer el mínimo tiempo posible el triatleta debe ir nadando desde la salida en el punto A hasta el punto D situado aproximadamente a 707 metros del punto C, y a partir de ahí continuar corriendo hasta la meta situada en el punto B. El tiempo que tardará será entonces

$$\begin{aligned}
\text{Tiempo total} &= f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}+4}}{4} + \frac{10-\frac{1}{\sqrt{2}}}{12} = \frac{\sqrt{\frac{9}{2}}}{4} + \frac{\frac{10\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{12} \\
&= \frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{10\sqrt{2}-1}{12\sqrt{2}} = \frac{9+10\sqrt{2}-1}{12\sqrt{2}} = \frac{8+10\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} \\
&= \frac{8\sqrt{2}+20}{24} = \frac{2\sqrt{2}+5}{6} \approx 1,305 \text{ horas} = 1\text{h}18'18''.
\end{aligned}$$

Cuestión 4.

Considere la función $f(x) = x\ln(x)$, definida para $x > 0$.

a) **(1 p.)** Calcule la derivada de $f(x)$ y determine sus intervalos de crecimiento y/o decrecimiento.

b) **(1 p.)** Calcule la integral indefinida de la función $f(x)$.

c) **(0,5 p.)** Determine la primitiva de la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1, 0)$.

Solución: a) La derivada de $f(x)$ viene dada por

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$, calculamos primero los puntos críticos de $f(x)$, es decir, las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x) + 1 = 0 \Longleftrightarrow \ln(x) = -1 \Longleftrightarrow x = e^{\ln(x)} = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,367879441.$$

A continuación, estudiamos el signo de $f'(x)$ para ver dónde la función es creciente o decreciente. Como $f'(x) = 0$ solo para $x = e^{-1} = 1/e$, basta con darle valores a $f'(x)$ a la izquierda y a la derecha de este valor. Evaluando, por ejemplo, $f'(x)$ en $x = e^{-2} < e^{-1}$ observamos que $f'(e^{-2}) = -1 < 0$, de modo que $f'(x) < 0$ en el intervalo $(0, 1/e)$ y $f(x)$ es decreciente en dicho intervalo. Del mismo modo, evaluando, por ejemplo, $f'(x)$ en $x = e > e^{-1}$ observamos que $f'(e) = 2 > 0$, de modo que $f'(x) > 0$ en el intervalo $(1/e, +\infty)$ y $f(x)$ es creciente en dicho intervalo.

En conclusión, $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1/e)$ y creciente en el intervalo $(1/e, +\infty)$.

Observación importante: El apartado a) está enunciado de manera que por "y determine **sus** intervalos de crecimiento y/o decrecimiento" se refiere a los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$. No obstante, si alguien lo interpreta como los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la derivada de $f(x)$ y está bien realizado, se dará por válido.

b) Para calcular la integral indefinida de $f(x)$ utilizamos el método de integración por partes, haciendo $u = \ln(x)$ y $dv = xdx$. En ese caso se tiene $du = \dfrac{dx}{x}$ y $v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2}$, por lo que

$$\begin{aligned} \int x\ln(x)dx &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C. \end{aligned}$$

c) Por el apartado b) sabemos que la primitiva general de $f(x)$ es

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

Se trata, por tanto, de calcular el valor de C para que $F(1) = 0$. En este caso

$$F(1) = \frac{1^2}{2}\ln(1) - \frac{1^2}{4} + C = \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4} + C = -\frac{1}{4} + C = 0 \Longleftrightarrow C = \frac{1}{4}.$$

La solución es

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Considere las siguientes rectas:

$$r : \frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{0} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

a) **(1 p.)** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **(1,5 p.)** En caso de que las rectas se corten, calcule la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. En caso de que las rectas se crucen, calcule la perpendicular común a ambas rectas.

Solución: a) La recta r, que viene dada en forma continua, pasa por el punto $P(-2,3,0)$ y tiene como vector director el vector $\vec{v}=(-1,1,0)$.

Por otra parte, haciendo, por ejemplo, $x=0$ en la ecuaciones implícitas de la recta s vemos que esta recta pasa por el punto $Q(0,1,0)$. Dado que la recta s viene dada en implícitas como intersección de dos planos, su vector director se puede calcular como el producto vectorial de los vectores perpendiculares a dichos planos, es decir,

$$\vec{w}=(1,0,-1)\times(0,1,0)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\vec{k}+\vec{i}=(1,0,1).$$

A partir de aquí, como los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son colineales sabemos que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para decidir cuál de las dos alternativas es la correcta basta con estudiar el rango del conjunto de vectores $\{\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{PQ}\}$: si el rango es 2 entonces la rectas se cortan y si el rango es 3 entonces la rectas se cruzan. Obsérvese que el rango es al menos 2 porque ya sabemos que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son colineales. Por lo tanto, dado que $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(2,-2,0)$ basta con estudiar el rango de la matriz

$$M=\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \\ \overrightarrow{PQ} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que $|M|=2-2=0$ y por lo tanto el rango de M es 2 y las rectas se cortan.

Otra forma de concluir que las rectas se cortan es estudiar el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas formado por las dos ecuaciones implícitas de ambas rectas y comprobar que se trata de un sistema compatible determinado. Para ello, necesitamos las ecuaciones implícitas de r, que se obtienen a partir de la ecuación continua haciendo

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}\Longrightarrow x+2=-y+3 \quad \text{y} \quad \frac{y-3}{1}=\frac{z}{0}\Longrightarrow z=0,$$

es decir

$$r:\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ z &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad s:\left\{\begin{array}{rcl} x-z &=& 0 \\ y &=& 1 \end{array}\right.$$

Se trata entonces de estudiar el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ z &=& 0 \\ x-z &=& 0 \\ y &=& 1 \end{array}\right.$$

En este caso es muy fácil ver que se trata de un sistema compatible determinado porque tiene una única solución dada por $z=0$ ($2^{\underline{a}}$ ecuación), $y=1$ ($4^{\underline{a}}$ ecuación) y, consecuentemente $x=0$ ($1^{\underline{a}}$ y $3^{\underline{a}}$ ecuaciones). El punto de corte de r y s es por tanto el punto $(0,1,0)$.

Alternativamente, también se puede concluir que las rectas se cortan estudiando la intersección de la recta r dada en paramétricas con s dada en implícitas y comprobando que se trata de un punto. Para ello, escribimos la recta r en paramétricas, haciendo

$$\begin{array}{rcl} x &=& -2-\lambda \\ y &=& 3+\lambda \\ z &=& 0 \end{array}$$

y lo sustituimos en las ecuaciones implícitas de s:

$$s:\left\{\begin{array}{rcl} x-z & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2-\lambda-0 & = & 0 \\ 3+\lambda & = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -2 \\ \lambda & = & -2 \end{array}\right.$$

Por lo tanto, las rectas se cortan en el punto determinado por $\lambda=-2 \Longrightarrow (0,1,0)$.
b) Como las rectas se cortan, debemos calcular la ecuación del plano que las contiene y el ángulo que forman ambas rectas. Para calcular la ecuación del plano que las contiene, basta con tomar un punto cualquiera de una de las dos rectas como punto del plano y los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ como vectores directores del plano. Por ejemplo, tomando el punto $P(-2,3,0)$ se tiene que la ecuación implícita del plano que contiene a r y s es

$$\left|\begin{array}{ccc} x+2 & y-3 & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow x+2-z+y-3=0 \Longrightarrow x+y-z=1.$$

Otra manera de calcular este plano es calcular $\vec{n}$, el vector normal del plano, que viene dado por

$$\vec{n}=\vec{v}\times\vec{w}=(-1,1,0)\times(1,0,1)=\left|\begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right| = \vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1,1,-1).$$

Por lo tanto, el plano buscado es de la forma $x+y-z=D$, siendo D tal que el plano pase por el punto $P(-2,3,0)$ (por ejemplo). Es decir, $-2+3-0=D \Longrightarrow D=1$ y la solución es $x+y-z=1$.

Por otra parte, para calcular el ángulo que forman basta calcular el ángulo que forman sus correspondientes vectores directores, mediante la fórmula

$$\cos\angle(r,s)=\cos\angle(\vec{v},\vec{w})=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Longrightarrow \angle(r,s)=60^{\text{o}}=\frac{\pi}{3}\text{ radianes.}$$

Cuestión 6.

Considere los puntos $A=(1,-1,2)$ y $B=(3,5,2)$.

a) **(1,5 p.)** Determine la ecuación del plano π perpendicular al segmento AB y que pasa por el punto medio de dicho segmento.

b) **(1 p.)** Calcule la distancia del punto A al plano π.

Solución: a) Evidentemente, el vector normal del plano π es el vector $\vec{n}=\overrightarrow{AB}=B-A=(3,5,2)-(1,-1,2)=(2,6,0)\parallel(1,3,0)$. Tomamos entonces $\vec{n}=(1,3,0)$, de manera que la ecuación implícita del plano π es de la forma $x+3y=D$. Para determinar D utilizamos la información adicional de que el plano π pasa por el punto medio del segmento AB, es decir, por el punto

$$M=\frac{A+B}{2}=\frac{(1,-1,2)+(3,5,2)}{2}=\frac{(4,4,4)}{2}=(2,2,2).$$

Por lo tanto, $2 + 3 \cdot 2 = D \Longrightarrow D = 2 + 6 = 8$. En conclusión, π es el plano de ecuación $x + 3y = 8$.

b) Por la situación geométrica considerada, resulta obvio que la distancia de A al plano π no es más que la distancia de A al punto M que, a su vez, no es más que la mitad de la distancia de A a B. Por lo tanto

$$d(A,\pi) = d(A,M) = \frac{d(A,B)}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+6^2}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{2} = \sqrt{10} \text{ unidades de distancia.}$$

Otra forma de resolver este apartado es aplicando directamente la fórmula de la distancia del punto $A = (1,-1,2)$ al plano $\pi : x + 3y - 8 = 0$, de modo que

$$d(A,\pi) = \frac{|1-3-8|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \text{ unidades de distancia.}$$

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras, y la urna B contiene 2 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Se saca al azar una bola de la urna A y se mete en la urna B. A continuación, se saca al azar una bola de la urna B. Calcule:

a) **(0,75 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja.

b) **(0,75 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea verde, sabiendo que la bola que se sacó de la urna A era verde.

c) **(1 p.)** La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea negra.

Solución: Observemos en primer lugar que la urna A tiene un total de 10 bolas, de las cuales 6 son verdes y 4 son negras. La urna B tiene un total de 9 bolas, de las cuales 2 son verdes, 4 son negras y 3 son rojas. Una vez que se ha sacado al azar una bola de la urna A y se ha metido en la urna B, la urna B contiene un total de 10 bolas, siendo su composición la siguiente:

Caso 1: 3 verdes, 4 negras y 3 rojas, en el caso en que la bola sacada de la urna A haya sido verde, o

Caso 2: 2 verdes, 5 negras y 3 rojas, en el caso en que la bola sacada de la urna A haya sido negra.

a) La probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja es independiente del color de la bola que se ha pasado de la urna A a la B, porque en la urna A no hay bolas rojas y, por tanto, el número de bolas rojas en la urna B sigue siendo siempre 3. Por tanto, en cualquiera de los dos casos anteriores la probabilidad de que la bola que se saca de la urna B sea roja es

$$P(\text{Bola Roja}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas rojas en B}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

b) Como la bola que se sacó de la urna A era verde, significa que estamos en el Caso 1 y la composición de la urna B, una vez que se ha pasado una bola verde de A a B, es la siguiente: 3 bolas verdes, 4 bolas negras y 3 bolas rojas. Por lo tanto, en este caso la probabilidad de que la bola que se saca de B sea verde es

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas verdes en B}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Observemos que en este caso estamos calculando de hecho una probabilidad condicionada, ya que se trata de

$$P(\text{Bola Verde/Caso 1}) = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas verdes en B en el Caso 1}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{3}{10} = 0,3.$$

Esta observación no es estrictamente necesaria en este apartado pero sí lo será en el apartado c).

c) En este apartado no sabemos de qué color es la bola que se ha pasado de A a B. Por lo tanto, y siguiendo la observación hecha en el apartado b), debemos utilizar el teorema de la probabilidad total para ver que

$$P(\text{Bola Negra}) = P(\text{Bola Negra/Caso 1}) \cdot P(\text{Caso 1}) + P(\text{Bola Negra/Caso 2}) \cdot P(\text{Caso 2}).$$

Pasamos a continuación a calcular cada una de estas probabilidades. Como el Caso 1 corresponde al caso en que la bola sacada de A es verde, se tiene

$$P(\text{Caso 1}) = P(\text{sacar Bola Verde de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas verdes en A}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{6}{10}.$$

Además, en este caso, se tiene

$$P(\text{Bola Negra/Caso 1}) = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas negras en B en el Caso 1}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{4}{10}.$$

Análogamente, como el Caso 2 corresponde al caso en que la bola sacada de A es negra, se tiene

$$P(\text{Caso 2}) = P(\text{sacar Bola Negra de A}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas negras en A}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en A}} = \frac{4}{10}.$$

En este caso se tiene

$$P(\text{Bola Negra/Caso 2}) = \frac{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas negras en B en el Caso 2}}{\text{n}^{\underline{\text{o}}} \text{ de bolas totales en B}} = \frac{5}{10}.$$

En conclusión,

$$P(\text{Bola Negra}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{24+20}{100} = \frac{44}{100} = 0,44.$$

Cuestión 8.

En este ejercicio trabaje con 4 decimales para las probabilidades.
El cociente intelectual (CI) de los estudiantes universitarios sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que la media es igual a 10 veces la desviación típica y que el 93,32 % de los estudiantes tiene un CI menor de 115.

a) **(1,5 p.)** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

b) **(1 p.)** Si se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 3 de ellos tengan un CI mayor de 115?

Solución: a) Denotemos por X a la variable aleatoria "CI de los estudiantes universitarios". Sabemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ con $\mu = 10\sigma$. Además, sabemos que $P(X < 115) = 0,9332$. Haciendo uso de la tipificación $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ sabemos entonces que $Z \sim N(0,1)$ y que

$$P(X < 115) = P(Z < \frac{115-\mu}{\sigma}) = 0,9332.$$

Consultando en la tabla de $Z \sim N(0,1)$ proporcionada, vemos que dicho valor de la probabilidad corresponde al valor de $z = 1,5$, es decir,

$$z = \frac{115-\mu}{\sigma} = 1,5 \Longrightarrow 115 - \mu = 1,5\sigma \Longrightarrow \mu + 1,5\sigma = 115.$$

Pero como $\mu = 10\sigma$, se tiene

$$10\sigma + 1,5\sigma = 115 \Longrightarrow 11,5\sigma = 115 \Longrightarrow \sigma = \frac{115}{11,5} = 10 \Longrightarrow \mu = 10\sigma = 100.$$

Por lo tanto se tiene media$= \mu = 100$ y desvación típica$= \sigma = 10$.

b) Este apartado es independiente de a). En este caso llamamos Y a la variable aleatoria que cuenta el número de estudiantes universitarios con CI mayor que 115 cuando se eligen al azar 5 estudiantes universitarios, y el ejercicio pide calcular la probabilidad de que $Y = 3$.

La variable aleatoria Y sigue una distribución binomial de parámetros $n = 5$, porque se eligen 5 estudiantes universitarios, y $p = P(X > 115)$, porque el éxito del experimento es que el CI sea mayor de 115. Por la información dada en el enunciado, sabemos que

$$p = P(X > 115) = 1 - P(X < 115) = 1 - 0,9332 = 0,0668.$$

Por lo tanto $Y \sim B(5, 0,0668)$ es una binomial con $n = 5$, $p = 0,0668$ y $q = 1 - p = 0,9332$. En tal caso, la probabilidad de que $Y = 3$ viene dada por

$$p(Y = 3) = \binom{5}{3} \cdot 0,0668^3 \cdot 0,9332^2 \approx 10 \cdot 0,0003 \cdot 0,8709 = 0,0026.$$