Universidad de Murcia. Trabajo fin de Grado.

# Ecuaciones funcionales en la Obra de Abel: Historia y Avances

Autor:
Lorena Peña Cañavate

Tutor:
Antonio Linero Bas

Murcia Febrero 2019

# Declaración de originalidad

Lorena Peña Cañavate, autora del TFG "Ecuaciones funcionales en la obra de Abel: Historia y avances.", bajo la tutela del profesor Antonio Linero Bas, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 8 de febrero de 2019.

Fdo: Lorena Peña Cañavate[1]

---

[1] Nota: en la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

*Dedicado a*
*mi profesor Antonio Linero por haber sido mi guía y mi estímulo durante la redacción del TFG y en las asignaturas que me ha impartido durante la carrera.*
*También a mi familia por acompañarme durante esta etapa.*

# Resumen

Son muchas las ecuaciones funcionales que existen y que se han ido desarrollando e investigando a lo largo de los años, sin embargo, nuestra atención en este trabajo se centrará en las ecuaciones que encontramos a lo largo de la obra de Abel [1].
En primer lugar veremos la biografía de Abel, que nos permitirá acercarnos un poco más a este gran matemático. En el segundo capítulo veremos todas las ecuaciones funcionales que Abel desarrolla en sus obras "Oeuvres complètes os Niels Henrik Abel" que encontramos en [1] y [2] . En el tercer capítulo desarrollaremos dos de los métodos que Abel usa para resolver ecuaciones funcionales, uno de ellos mediante ecuaciones diferenciales y el otro reduciendo la ecuación funcional dada a una ecuación en diferencias finitas. Por último, en el cuarto capítulo veremos cómo han ido avanzando en el tiempo dos de las ecuaciones funcionales de Abel, vistas en los capítulos anteriores.
Para dar una idea más general al lector de los contenidos que se desarrollan a lo largo del trabajo, hacemos ahora un pequeño resumen de cada capítulo, explicando lo más importante de cada uno de ellos.
El **capítulo 1** está dedicado a hacer una pequeña biografía sobre la vida de Abel, para ello nos basaremos en [1], [2], [5], [14], [17], [18].
Niels Henrik Abel nació el 5 de agosto de 1802 en Fin$\phi$y, una pequeña isla del suroeste de Noruega, aunque pasó la mayor parte de su infancia en Gjerstad, una pequeña villa al sureste de Noruega. Abel creció en un contexto histórico bastante difícil, que causó el hambre y la pobreza por todo el país. El padre de Abel fue el encargado de la educación de Abel y sus hermanos, a quienes les enseñó gramática, geografía, historia y matemáticas, hasta que en 1815 Abel y uno de sus cinco hermanos ingresaron en Cathedral School, una escuela de Christiania (actual Oslo). Los primeros años de Abel en Cathedral School fueron poco satisfactorios, y no fue hasta la incorporación del profesor Holmboe en 1818 que sus resultados académicos empezaron a mejorar. Así, Abel comenzó a destacar en geometría y aritmética con sobresalientes en ellas durante los seis años que pasó en Cathedral School. El interés de Abel por grandes matemáticos como Euler, Legrange o Laplace lo llevaron a realizar su primer intento de volar por su cuenta con grandes resultados e intentó resolver la ecuación de quinto grado y aunque finalmente Abel no lo consiguiera, sí que consiguió sorprender a matemáticos de su país, como Degen, quien le sugirió que concentrase su esfuerzo en el campo de las integrales elípticas. En 1821, el profesor Holmboe consiguió que varios colegas financiasen los estudios de Abel, pudiendo así ingresar en la Universidad de Christiania, donde pronto empezaron a ver la luz sus primeros artículos. En ellos quedó claro que Noruega se le había quedado pequeña y necesitaba entrar en contacto con los grandes matemáticos continentales del momen-

to. Así, Abel viajó a Copenhague donde conoció a Degen entre otros matemáticos y a Christine Kemp, que más tarde se convertiría en su prometida. Mas tarde en 1823 surgió en Christiania una revista sobre Ciencias Naturales, donde Abel pudo publicar varios resultados matemáticos, presentando así, en uno de ellos su ecuación integral. En este mismo año, Abel decidió volver de nuevo a la ecuación quíntica, pero esta vez no buscaría una solución, sino que acabaría demostrando, tras unos meses de trabajo, que en el caso de la ecuación general de quinto grado y de las ecuaciones de mayor grado, no se puede repetir lo que se había conseguido para las de segundo, tercer y cuarto grado. Simplemente, no existe una solución a la ecuación de quinto grado en la forma de una fórmula algebraica que sólo contenga los coeficientes y operaciones elementales aritméticas junto con radicales. Descubrimiento que fue fundamental en la historia de las matemáticas. Años más tarde, en 1825, Abel viajó a Berlín, donde conoció a Crelle que junto con Holmboe se convirtió en su mejor amigo. Crelle fundó una revista, donde Abel también publicó varios artículos, uno de ellos, una versión ampliada de su trabajo sobre la quíntica. En 1826, Abel viajó a París, donde conoció a Cauchy y Legendre y donde trabajó intensamente en la "Memoria de París", sobre el teorema de adición sobre integrales elípticas. En 1827, decidió regresar a Christiania, donde enfermó de tuberculosis y siguió trabajando en su teoría de funciones elípticas. Finalmente, el 6 de abril de 1829 Abel murió. En 1830, la Academia Francesa de las Ciencias anunció que el Grand Prix a los descubrimientos matemáticos sería otorgado conjuntamente a Abel y Jacobi, por sus descubrimientos en el campo de las funciones elípticas. En 1839, Holmboe rindió un homenaje a su amigo, editando las Obras completas de Abel, en dos volúmenes y fue más tarde en 1881 cuando Sylow y Lie publicaron una edición más completa de éstas.

En el **capítulo 2** daremos una recopilación de las ecuaciones funcionales que aparecen a lo largo de las Obras Completas de Abel. Para ello nos hemos basado principalmente en [1], [2] y [10].
Las ecuaciones que desarrollaremos a lo largo de este capítulo son las siguientes.
En primer lugar tenemos la ecuación de la forma

$$\varphi(\alpha) = f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)),$$

donde $f$, $\beta$, $\alpha$ y $\gamma$ son funciones dadas y $\varphi$ es la función desconocida, que hallaremos mediante el método descrito por Abel usando ecuaciones diferenciales. Dentro de este tipo de ecuaciones funcionales encontramos las dos siguientes

$$f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)) = \varphi(\beta) + \varphi(\gamma),$$

$$f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)) = \varphi(\beta)\varphi(\gamma).$$

Dentro de este tipo de ecuaciones encontramos, por ejemplo, la conocida ecuación funcional de Cauchy $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$. El siguiente tipo de ecuación funcional aparece como consecuencia de un problema de mecánica relativo a la composición de fuerzas,

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y).$$

Lo que se hace es buscar la resultante, $R$, de dos fuerzas iguales, $P$, cuyas direcciones forman un ángulo igual a $2x$. Siguiendo [15], se llega a la ecuación funcional

$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)+\varphi(x-y)$, que veremos cómo la resuelve Abel en [2, t.I.pp.6-7]. Otra ecuación funcional que veremos es

$$\psi(\alpha) = F(x, y, \varphi(x), \varphi'(x), ...f(y), f'(y), ...),$$

donde $\alpha$ es una función dada de $x$ e $y$ y $\varphi$, $f$ y $\psi$ son funciones desconocidas que tendremos que determinar. Dentro de este tipo de ecuaciones funcionales encontramos las siguientes:

$$\psi(x + y) = \varphi(x)f'(y) + f(y)\varphi'(x),$$
$$\varphi(x + y) = \varphi(x)f(y) + f(x)\varphi(y),$$
$$\psi(x + y) = f(xy) + \varphi(x - y),$$

y de esta última ecuación veremos cómo ha ido avanzando su estudio, desde la resolución de Abel mediante ecuaciones diferenciales, hasta su resolución imponiéndole condiciones más generales, como la continuidad.
En este segundo capítulo veremos también cómo Abel estudia la búsqueda de funciones $f$ de dos variables independientes $x$ e $y$ tales que $f(x, y)$ tiene la propiedad de que $f(z, f(x.y))$ es una función simétrica de $x$, $y$ y $z$.
La siguiente ecuación aparece en el segundo volumen de la revista de Crelle,

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(xf(y) + yf(x)),$$

donde $f(y)$, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son las funciones desconocidas.
También veremos la ecuación

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$$

que Abel resuelve reduciéndola a una ecuación en diferencias finitas.
Acabaremos el segundo capítulo viendo otras ecuaciones funcionales relacionadas con la función dilogaritmo

$$\psi(x) = -\int_0^x \frac{1}{s}\log(1 - s)ds$$

y con la integral hiperelíptica

$$\varphi(x) = \int \frac{(\alpha + \beta x)dx}{\sqrt{P(x)}},$$

donde $P$ es un polinomio de grado seis y $\alpha$ y $\beta$ son contantes.

En el **capítulo 3** se desarrollan principalmente dos de los métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales que desarrolla Abel en sus obras [2, t.II.pp.36-39] y [2, t.I.pp.1-10].
El primer método que vemos se basa en asociar una ecuación diferencial a la ecuación funcional y Abel lo presenta en [2, t.I.pp.1-10]. Abel consideró un tipo muy general de ecuación funcional

$$V(x, y, \varphi(\alpha), f(\beta), ..., \varphi'(\alpha), f'(\beta), F'(\gamma), ...) = 0,$$

donde $\varphi$, $f$, $F$,... son funciones desconocidas de una variable y $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... son funciones conocidas dependientes de $x$ e $y$, donde va eliminando las funciones incógnitas de dicha ecuación, derivándola sucesivamente y haciendo primero $\alpha$ constante, después $\beta$ constante, etc. De esta manera, podremos encontrar todas las funciones desconocidas, siempre que el problema sea posible.

El segundo método de Abel para resolver ecuaciones funcionales se basa en el empleo de ecuaciones en diferencias finitas [2, t.I.pp.1-10]. Es decir, consiste en transformar el problema en la resolución de una cierta ecuación en diferencias finitas. Recordemos que una ecuación en diferencias finitas es una expresión del tipo

$$x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n, n)$$

donde $g : \Omega \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el caso no autónomo o

$$x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n)$$

donde $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ en el caso autónomo.

En el **capítulo 4**, a raíz de uno de los enunciados los problemas de Hilbert, vamos a ver cómo han ido evolucionando algunas de las ecuaciones vistas en los capítulos 2 y 3. Usaremos para ello [3].

En su famosa conferencia del Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, Hilbert enunció la segunda parte de su quinto problema. Lo que Hilbert se pregunta, entre otras cosas, es si se puede llegar a los mismos resultados de las ecuaciones tratadas por Abel en [2, t.I.pp 1,61,389], además de otras ecuaciones, eliminando el requisito de la diferenciabilidad y suponiendo condiciones más generales sobre las funciones.

Como sabemos, Abel hizo cuatro publicaciones y tres manuscritos sobre ecuaciones funcionales. Para ver el estado de la cuestión sobre la segunda parte de este quinto problema de Hilbert, se puede consultar [3], donde se hace un estudio de la evolución de diferentes ecuaciones funcionales de Abel y de la eliminación de la condición de diferenciabilidad. Nosotros nos centraremos sólo en dar algunos apuntes de la evolución de las ecuaciones funcionales de la forma $f(x + y) = g(xy) + h(x - y)$ y $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$.

En primer lugar veremos cómo evoluciona la ecuación

$$f(x + y) = g(xy) + h(x - y). \tag{1}$$

En 1823 Abel estudió esta ecuación funcional, pero no quedó ahí la cosa, ya que en 1960 Roscau resolvió la ecuación bajo la condición de que las incógnitas $f$, $g$ y $h$ eran continuas [16], aunque la prueba no era del todo correcta según leemos en el correspondiente recenso de Kuczma que aparece en el repositorio MathSciNet. Unos años más tarde, en 1964, fue Stamate quien encontró la solución general medible de esta ecuación, [19]. En 1987 fue Lajkó quien dio la solución general de esta ecuación, sin imponer ninguna condición de regularidad a las incógnitas. En 1989, Aczél también determinó la solución general a esta ecuación al reducirla a la ecuación funcional de Cauchy. Finalmente, en 1994 Lakjó [13] consiguió dar una nueva demostración, más elemental, para la resolución de (1) sin suponer regularidad alguna sobre las

funciones desconocidas.
En la primera sección de este **capítulo 4** vamos a presentar la demostración de Lajkó dada en [4] para resolver la ecuación (1). El teorema que demostraremos dice lo siguiente:

**Teorema 0.1.** *Si las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ satisfacen la ecuación funcional* (4.1)

$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y),$$

*entonces*

$$f(x) = A(\frac{x^2}{4}) + \alpha + \beta, \tag{2}$$

$$g(x) = A(x) + \alpha, \tag{3}$$

$$h(x) = A(\frac{x^2}{4}) + \beta, \tag{4}$$

*donde $x \in \mathbb{R}$, $\alpha$ y $\beta$ son constantes reales arbitrarias y $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función aditiva de $\mathbb{R}^2$, es decir, que preserva la suma ($A(x+y) = A(x) + A(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$). Además, como condición inicial tenemos que $f(0) = g(0) + h(0)$.*

Con este teorema vemos la resolución de la ecuación (1) sin suposición alguna de continuidad o medibilidad, por lo que para darle más interés al tema, también, veremos un corolario en el que obtendremos la solución de la ecuación (1) suponiendo que las funciones del teorema mencionado anteriormente, son continuas.
En la segunda sección del **capítulo 4** veremos cómo evoluciona la ecuación

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1. \tag{5}$$

Como vimos en el capítulo 3 Abel no impone ninguna condición general para resolver esta ecuación salvo el hecho de que $f$ tenga inversa para que el cambio $f(x) = \psi(y+1)$ se pueda llevar a cabo con una función $\psi$ invertible. Ahora vamos a analizar la solución de esta ecuación con otras condiciones sobre la función $f$.
Nos centraremos sobre todo en resolver las siguientes cuestiones sobre la ecuación (5): ¿Tendrá siempre solución? ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que tenga solución? Para empezar, nos damos cuenta de que es evidente que no siempre hay solución, lo que vemos con la ecuación funcional de la forma

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + c.$$

La segunda pregunta nos la responde el siguiente teorema ( [20])

**Teorema 0.2.** *Sea $E$ un conjunto real y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada. Sea $\mathbb{E} = E \cup f(E)$. Para que la ecuación*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1,$$

*admita una solución en $\mathbb{E}$ es necesario y suficiente que la ecuación $f^n(x) = x$ no se cumpla para ningún punto de $E$ ni para ningún índice natural $n$.*

Para su demostración usaremos tres lemas previos y algunas definiciones previas de interés, como la de iterada $n$-ésima $f^n = f \circ \underbrace{\cdots}_{n-\text{veces}} \circ f$

Además de esto, basándonos en [8], [21], [7], también veremos algunos otros resultados, que nos proporcionan otras propiedades de las soluciones de la ecuación (5).

# Summary

There are many functional equations that people has developed along the history, however, at this work, we will focus on the equations developed by Niels Henrik Abel in his works [1] .

First of all, we will see the biography of Abel. It will help us to approach to this great mathematician. On the second chapter we will carry out to all the functional equations that Abel develop on his works [2] and [1]. Chapter three is focussed to the development of two method that Abel used to solve functionals equations. One of this method is based on differential equations and the other is based on to reduce the functional equation to a difference equation. Finally, on chapter four, we will see how the Abel‘s functional equations have advanced with the time.

In order the reader has a general idea of the contents developed along the report, we are going to do a little resume of each chapter explaining the most important of each one.

**Chapter 1** is dedicated to make a brief biography about Abel's life, we will be based on [14], [18], [5], [1], [2] and [17] for that.

Niels Henrik Abel was born on August 5, 1802 in Fin$\phi$y, a small island in southwestern Norway, although he spent most of his childhood in Gjerstad, a small village in southeastern Norway. Abel grew up during a historical situation quite difficult, with hunger and poverty along all the country. Abel's father was in charge of his education and his siblings' education, whom he taught grammar, geography, history and mathematics. In 1815, Abel and one of his brothers entered in Cathedral School, a school in Chistiania (nowadays Oslo). First years at Cathedral School were not so satisfying for Abel, but when the teacher Holmboe arrived in 1818, his academic results started to improve. Thereby, Abel started to stand out in geometry and arithmetic, with distinctions in these during the six years that he was in Cathedral School. Abel was interested in important mathematicians like Euler, Lagrange or Laplace, and this took him to try his own results, trying to solve the fifth grade equation. Although finally he did not get it, he could to surprise other important mathematicians like Degen, who suggested Abel to focus his effort into the elliptic integrals. In 1821, Holmboe achieved that some people financed Abel's studies, so he could enter in the University of Chritisnia, where early he published his firsts articles. In these articles, you could see that Norway was small to Abel and he needed to meet the other important mathematicians of that moment. Thus, Abel travelled to Copenhague, where he met Degen, among other mathematicians, and Christine Kemp, who would later become his fiancée. Later, in 1823, a new journal about Natural Sciences appeared in Christiania, and Abel published several mathematical

results on their pages, where he showed his integral equation. This year, Abel decided to start again with the fifth grade equation, but in this occasion to show that we can not do the same to solve it that we do with second, third or fourth grade equations. Simply it does not exist a solution of the fifth grade equation that we can set forth with an algebraic equation that only involves the coefficients of the equation and uses the elemental operations. This discovery was essential in the history of mathematics. Years later, in 1825, Abel went to Berlin, where he met Crelle who, equal than Holmboe, became his best friend. Crelle started a journal, where Abel published some articles too, one of this an extended version about his work of the fifth grade equation. In 1826, Abel travelled to Paris, where he met Cauchy and Legendre and where he worked deeply at the 'Memory of Paris', work about the theorem of addition of elliptic integrals. In 1827, he dediced to come back to Christiania, where he got tuberculosis. In spite of his disease, Abel was still working on his theory about eleptic functions. Finally, on 6 April, 1829 Abel died. In 1830, the Science French Academy, announced that the Grand Prix to the mathematical discoveries would be awarded to Abel and Jacobi, due to their discoveries about elliptic functions. In 1839, Holmboe honored to his friend publishing 'Complete Works of Abel', in two volumes. Later, in 1881, Sylow and Lie, published another extended version of that.

In **chapter 2** we will carry out an elaborate compilation of all the functional equations that appeared at Abel's Complete Works. For that, we have based on [1], [2] and [10].
The equations that we are going to develop are the following.
First we have this equation

$$\varphi(\alpha) = f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)),$$

where $f$, $\beta$, $\alpha$ y $\gamma$ are known functions and $\varphi$ is the unknown function, that we will find out using a method described by Abel with differential equations. Inside this kind of equations we can find others like

$$f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)) = \varphi(\beta) + \varphi(\gamma)),$$

$$f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)) = \varphi(\beta)\varphi(\gamma).$$

The next type of functional equation appearedd as consequence of a mecanic problem regarding to the composition of forces,

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y).$$

What is done is to search the resultant, $R$, of two equal forces, $P$, whose directions form an angle equal to $2x$. Following [15] we will show how Abel find the functional equation $R = P\varphi(x)$ donde $\varphi(x)$ satisfies this equation $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x+y)+\varphi(x-y)$.
Other functional equation that we will see is

$$\psi(\alpha) = F(x, y, \varphi(x), \varphi'(x), ...f(y), f'(y), ...),$$

where $\alpha$ is a $x$, $y$ known function and $\varphi$, $f$, $\psi$ are unknown functions that we have to find. Inside this kind of equations we can find the following:

$$\psi(x+y) = \varphi(x)f'(y) + f(y)\varphi'(x),$$

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)f(y) + f(x)\varphi(y),$$
$$\psi(x+y) = f(xy) + \varphi(x-y).$$

About this last equation, we are going to see how it progressed, from its solution with differential equations, to its resolution by imposing other general conditions, like continuity.
In this chapter, we will also see how Abel studied the search of two independent variables functions $f$ such that $f(x,y)$ has the property of $f(z, f(x,y))$ being a symmetric function at $x$, $y$ and $z$.
The next equation comes up at the second volum of the Crelle's journal,

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(xf(y) + yf(x)))$$

where $f(y)$, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ are the unknown functions.
As well, we are going to see the equation

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$$

that Abel solve reducing it to other equation in finite diferences.
We will finish the second chapter by looking at other functional equations related to the dilogarithm function

$$\psi(x) = -\int_0^x \frac{1}{x}\log(1-x)dx,$$

and with the hypereliptic integral

$$\varphi(x) = \int \frac{(\alpha + \beta(x))dx}{\sqrt{P(x)}},$$

where $P$ is a sixth grade polinomial.

In **chapter 3**, we will show two of the method to solve differential equations that Abel developed in his works [2, t.II.pp.36-39] and [2, t.I.pp.1-10].
The first method is based on associating a differential equation to the functional equation, like Abel show at [2, t.I.pp.1-10]. Abel considered a very general type of functional equation

$$V(x, y, \varphi(\alpha), f(\beta), ..., \varphi'(\alpha), f'(\beta), F'(\gamma), ...) = 0$$

where $\varphi$, $f$, $F$,... are unknown functions with only one variable and $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... are known functions that depend on $x$ and $y$. He was eliminating the unknown functions of this equation, deriving it successively and doing, first, $\alpha$ equal to a constant, after $\beta$ equal to constant, etc. In this way, we can find out all the unknown functions, if

the problem is possible.
The second method of Abel to solve functional equations is based on using finite difference equations [2, t.I.pp.1-10]. That is to say, it consists of transforming the problem to other where we are going to solve one finite difference equation. Reminding that a finite difference equation is an expression as

$$x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n, n)$$

where $g : \Omega \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ in the non-autonomous case, or

$$x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n)$$

where $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ in the autonomous case.

In **chapter 4** we are going to see how, in the wake of one of the problems of Hilbert, some of the equations that we show in chapter 2 and 3 have evolved. For that pupose, we use [3].
At his famous conference on the International Congress of Mathematicians of Paris in 1900, Hilbert enunciated the second part of his fifth problem. Hilbert ask if we can get the same results about the equations treated by Abel in [2, t.I.pp 1,61,389], among others, eliminating the hypothesis of differenciability and supposing other general conditions.
As we know, Abel made four publishing and three manuscripts about functional equations. To see all the second part of that fifth problem of Hilbert, we can use [3], where a study about the development of several functional equations of Abel is done. We will focus only on the development about the functional equations of the form $f(x+y) = g(xy) + h(x-y)$ and $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$.
We will start with

$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y). \tag{6}$$

In 1823, Abel studied this functional equation, but it continued advancing. In 1960, Roscau solved the equation with the restriction that the unknown functions $f$, $g$, and $h$ was continuous, although the resolution was not correct. A few years later, in 1964, Stamate find the general measurable solution of this equation. In 1987, Lajkó give the general solution, without regularity restrictions in the unknown functions. In 1989, Aczél find out the general solution too, reducing the equation to other functional equation of Cauchy. Finally, in 1994, Lakjó managed to give a new proof, more elementary, to solve (6) without restrictions.
In the first part of **chapter 4** we are going to show the proof of Lajkó, given in [4], to solve (6). The theorem says:

**Teorema 0.3.** *If the functions $f, g, h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ satisfy the functional equation*

$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y),$$

*then,*

$$f(x) = A(\frac{x^2}{4}) + \alpha + \beta, \tag{7}$$

$$g(x) = A(x) + \alpha, \tag{8}$$

$$h(x) = A(\frac{x^2}{4}) + \beta, \tag{9}$$

*where $x \in \mathbb{R}$, $\alpha$ y $\beta$ are constant and $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ is an additive function in $\mathbb{R}^2$, that is to say, $A(x+y) = A(x) + A(y)$, for all $x, y \in \mathbb{R}$. Furthemore, as initial condition, we have $f(0) = g(0) + h(0)$.*

With this theorem we can see the solution of the equation (6) without restrictions about continuity or measurability. So, to do the topic more interesting, we also see one corollary where we will obtain the solution of (6) with the hypotesis that the functions that appears in the theorem are continuous.
In the second part of **chapter 4** we will show the development of the equation

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1. \tag{10}$$

As we will see in **chapter 3** the only restriction that Abel did was that the function $f$ has an inverse function, to do the change $f(x) = \psi(y+1)$. Now, we are going to analyze te solution of this equation with other hypothesis about $f$.
We will focus to solve the following questions about (10): Can we always find out a solution of this equation? What are the sufficient and necessary contitions to find it? To start, we can see that we can not always find a solution, using the following example:

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + c.$$

The second question is answered by the following theorem:

**Teorema 0.4.** *The equation*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$$

*has a solution in $\mathbb{E}$ if, and onlu if, the equation $f^n(x) = x$ is not satisfied for no point of $E$ and for no index $n$.*

To proof this theorem we need three previous lemmas and several definitions. Furthemore, using [8] we will show other results with we can see others properties of (10).

# Índice general

# Capítulo 1

# Biografía de Niels Henrik Abel

En este capítulo haremos un recorrido por la vida de Abel, exponiendo algunos de los aspectos más importantes de ella, y sus descubrimientos más importantes. Nos hemos basado en [14], [18], [5], [1], [2] y [17].

## 1.1. Primeros años de vida y contexto histórico en el que creció.

Figura 1.1: Niels Henrik Abel

Niels Henrik Abel nació el 5 de agosto de 1802 en Finnøy, una pequeña isla del suroeste de Noruega. Era el segundo de cinco hermanos e hijo de Soren Georg Abel y Anne Marie Simonsen. Dos años después del nacimiento de Abel toda la familia se trasladó a Gjerstad, una pequeña villa del sureste de Noruega, donde su padre fue trasladado como pastor protestante en la iglesia de allí y donde Abel pasó la mayor parte de su infancia. Abel creció en un contexto histórico bastante difícil, ya que Noruega comenzó el siglo XIX unida al reino de Dinamarca y pasó por un duro bloqueo británico de casi diez años, como represalia dentro del contexto de


Figura 1.2: Villa de Finnøy

las guerras napoleónicas. A consecuencia de este bloqueo, se paralizaron todas las exportaciones e importaciones, lo que resultó especialmente grave para Noruega, ya que dependía del grano danés, y el hambre y la pobreza se extendieron por todo el país. En 1814 quedó anexada al Reino de Suecia tras una guerra entre Dinamarca y Suecia, hasta que a principios del siglo XX alcanzó su plena independencia.
El padre de Abel fue el encargado de la educación de sus hijos enseñándoles gramática, geografía, historia y matemáticas, hasta que en 1815 Abel y su hermano mayor ingresaron en Cathedral School, una escuela de Christiania (actual Oslo). Sin embargo, no tuvo gran suerte ya que la reciente inauguración de la Universidad de Christiania había privado a Cathedral School de todos sus mejores profesores, dejando en ella a los menos cualificados. Los primeros años de Abel en Cathedral School fueron poco satisfactorios. Cabe destacar en estos primeros años al profesor de matemáticas Hans Peter Barder, el cual no gozó de muy buena fama y fue sustituido por Bernt Michael Holmboe. Fue en 1818, tras la incorporación del profesor Holmboe, cuando Abel comenzó a despertar su interés y entusiasmo por las matemáticas, así como a mejorar sus resultados académicos. Para Holmboe no pasó desapercibido el genio de Abel y supo apreciar el gran talento de éste, por lo que lo animó a leer las obras de grandes matemáticos como Euler, Lagrange o Laplace, entre otros. A Abel llegaron a absorberlo tanto las matemáticas que descuidó sus demás asignaturas, pero en general sus notas eran muy variables, excepto en geometría y aritmética, donde todas, en los seis años que pasó en Cathedral School, fueron sobresalientes. En las demás asignaturas sus notas oscilaban entre el aprobado y el notable, siendo la peor la caligrafía, ya que tenía una letra indescifrable, como podemos observar en la imagen 1.6.

## 1.2. Primeros descubrimientos y publicaciones.

Durante su último año en Cathedral School , Abel realizó su primer intento de volar por su cuenta con grandes resultados e intentó resolver la ecuación de quinto grado. Abel mostró su solución a Holmboe, el cual no supo encontrar ningún error, pero falto de confianza presentó la solución a los matemáticos Christopher Hansteen y Soren Rasmussen, que tampoco lograron encontrar errores en la solución. Hansteen

Figura 1.3: Bernt Michael Holmboe

remitió el trabajo al mejor matemático escandinavo del momento, Ferdinand Degen, para que lo publicara la Academia Danesa. Degen no halló fallo alguno en la solución de Abel, pero le pidió que le enviara una deducción más detallada del resultado y una ilustración numérica del método. Abel trató de ofrecer ejemplos específicos, pero finalmente descubrió que su solución, en realidad, era incorrecta. A pesar de esto, el profesor Degen quedó impresionado y sugirió a Abel que concentrase su esfuerzo en el campo de las integrales elípticas.

En 1820, el padre de Abel murió, por lo que Abel se encontró con una precaria situación económica, pues no disponía de dinero para completar su educación y además debía convertirse en el sostén económico de su familia. Por suerte, su ya gran amigo Holmboe acudió en su ayuda y consiguió que varios colegas financiasen los estudios del joven, quien en 1821 ingresó en la Universidad de Christiania, donde pronto empezaron a ver la luz sus primeros artículos donde quedó claro que Noruega se le había quedado pequeña y necesitaba entrar en contacto con los grandes matemáticos continentales para seguir progresando. Así, consiguió una pequeña beca para visitar a Degen y otros matemáticos daneses en Copenhague, donde también conoció a la que pronto se convertiría en su prometida, Christine Kemp, llamada coloquialmente Crelly.

En febrero de 1823 ocurrió un acontecimiento que impulsó la notoriedad de Abel. En Christiania apareció el "Magazin for naturvidenskaberne" (Revista sobre Ciencias Naturales), la primera revista científica noruega, que estaba dedicada principalmente a las ciencias naturales. Uno de los tres editores de esta revista fue Hansteen quien defendió el mérito de los trabajos de Abel y del propio Abel para que pudiese publicar sus resultados matemáticos en ella, pues no a todos los editores les gustaba la idea de publicar resultados matemáticos en una revista de ciencias naturales. En el segundo número de esta publicación apareció el primer artículo de Abel, era un trabajo sobre la posibilidad de despejar una variable en función de otra cuando se conoce una

Figura 1.4: Christine Kemp, Crelly

relación entre las dos variables, es decir lo que se conoce como funciones implícitas. En el siguiente volumen, dividido en dos números, apareció “La solución de un par de proposiciones con la ayuda de la integral definida”, un trabajo de 25 páginas en total. En este segundo trabajo aparece por primera vez en la historia una ecuación integral y su solución, ecuación que hoy en día se conoce como ecuación integral de Abel, a saber,

$$f(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{\phi(s)}{(x-s)^{\alpha}} dx \tag{1.1}$$

donde, $0 < \alpha < 1$, $f$ una función conocida y $\phi$ una función desconocida.
Fue también en el verano de 1823 cuando, según Holmboe, Abel realizó otro trabajo que no logró la atención de la revista y que tampoco pudo publicarse, sobre la integración de ecuaciones diferenciales, pero que sí llamó la atención de sus compañeros y que sin embargo se perdió, ya que cuando Holmboe editó las Obras Completas de Abel tampoco lo encontró. En 1823 Abel decidió volver de nuevo a la ecuación quíntica, pero esta vez no buscaría una solución, sino que estaba decidido a demostrar que no existía ninguna solución según una fórmula del estilo de las que se conocían para las ecuaciones de grado menor o igual que cuatro. Tras unos meses de trabajo, Abel demostró que, en el caso de la ecuación general de quinto grado y de las ecuaciones de mayor grado, no se puede repetir lo que se había conseguido para las de segundo, tercer y cuarto grado. Simplemente, no existe una solución a la ecuación de quinto grado en la forma de una fórmula algebraica que sólo contenga los coeficientes y las operaciones elementales aritméticas junto con radicales. Este descubrimiento fue fundamental en la historia de las matemáticas. Cambió por completo el enfoque de las ecuaciones desde simples intentos de encontrar soluciones a la necesidad de demostrar si las soluciones a ciertos tipos existen en realidad. La demostración de Abel subyace en el método de reducción al absurdo, suponiendo que la ecuación de quinto grado es resoluble y demostrando que su suposición conduce a una contra-

dicción lógica, pero a pesar de esto el gran tecnicismo y la opaca versión que envió a matemáticos como Gauss, obtuvo poca atención.

En 1825 Abel viajó Berlín, donde conoció al ingeniero August Leopold Crelle que se convirtió en uno de sus mejores amigos junto con Holmboe. Crelle que fundó una revista matemática llamada *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, también conocida como "Revista Crelle" (el nombre oficial era Revista de matemáticas puras y aplicadas), cuyo primer volumen, publicado en 1826, incluía seis artículos de Abel. El segundo fue una versión ampliada de su trabajo sobre la quíntica. En ese mismo año se publicaron otros siete trabajos de Abel en la revista.

Figura 1.5: August Leopold Crelle

En este mismo año Abel también tuvo la oportunidad de convertirse en el sustituto del profesor Rasmussen en Cathedral School, pero este cargo finalmente fue para su amigo Holmboe. A pesar de las circunstancias, ese invierno en Berlín fue una de las épocas más felices de su vida, contribuyendo con artículos originales sobre cálculo integral y sobre teoría de las sumas de varias series infinitas.

En el verano de ese mismo año, 1826, Abel viajó a París, donde conocería a Cauchy y Legendre. Allí trabajó incesantemente para completar uno de sus estudios más importantes, la "Memoria sobre una propiedad general de una clase muy amplia de funciones trascendentes" o "Memoria de París". Este artículo fue presentado por Abel a la Academia Francesa de las Ciencias, el 30 de octubre de 1826, que eligió a Cauchy y Legendre como encargados de la revisión del trabajo. Pero debido a la pasividad de Legendre, que por aquella época tenía ya setenta y cuatro años y carecía de la paciencia necesaria para leer un manuscrito tan largo y apenas legible, y a que Cauchy se encontraba sólo preocupado por su investigación, el manuscrito fue olvidado hasta que a instancias de Jacobi, su gran competidor en el tema, fue publicado en 1841. Debido a la incesante espera por parte de Abel por obtener el reconocimiento merecido, el 26 de diciembre decidió regresar a Berlín, donde pudo subsistir gracias a la ayuda de Holmboe y Crelle y donde completó su obra más extensa, "Investigación sobre las funciones elípticas", una amplia generalización de las funciones trigonométricas con importantísimas aplicaciones físicas, tales como el cálculo del período del péndulo simple o la rectificación de un arco de elipse. Allí fue donde su salud empezó a deteriorarse, y donde permaneció hasta mediados de 1827.

Figura 1.6: Notas de Abel

## 1.3. Últimos años y retiro

El 20 de mayo de 1827 decidió regresar a Christiania, donde se encontró sin empleo, con deudas propias y familiares y además enfermó de tuberculosis. Finalmente, consiguió sobrevivir gracias a una pequeña ayuda de la Universidad de Christiania, la Academia militar y dando clases particulares. Continuó trabajando en su teoría de funciones elípticas y no fue hasta principios de 1828 cuando descubrió los avances del matemático alemán Jacob Jacobi en dicha teoría. Abel publicaría dos artículos sobre esto, uno de ellos la primera parte de "Investigación sobre las funciones elípticas" y el otro un artículo donde, como hemos dicho ya, anunciaba los resultados obtenidos por parte de Jacobi. Para que no le robaran la primicia, Abel se apresuró a publicar la segunda parte de su manuscrito, al que añadió una nota que mostraba cómo podían obtenerse los resultados de Jacobi a partir de los suyos propios. Y dejó de trabajar en lo que se suponía iba a ser su respuesta definitiva a la pregunta de qué ecuaciones funcionales se pueden resolver mediante una fórmula. En las Navidades de 1828 Abel decidió viajar a Froland, donde se encontraba su prometida Crelly. El frío noruego de esa época y los varios días de viaje le provocaron fiebre y, después de las celebraciones navideñas, la tuberculosis lo obligó a reposar en cama. Finalmente, el 6 de abril de 1829 Abel murió, sin haber cumplido los veintisiete años y sólo dos días antes de que Crelle le remitiera una carta para informarle de que por fin le había conseguido un puesto de profesor en Berlín.
Además de sus contribuciones fundamentales a las ya mencionadas teoría de ecuaciones algebraicas y teoría de funciones elípticas, hiperbólicas y abelianas, Abel

Figura 1.7: Froland, 1831

participó de forma destacada en el establecimiento firme del rigor en el análisis matemático, especialmente en lo referente al estudio de la convergencia de las series de funciones. En particular, se le considera el autor de la primera demostración rigurosa y completa del binomio de Newton[1], así como de algunas de las críticas al trabajo de Cauchy, a quien admiraba, y de Euler, que dieron lugar a una corriente de pensamiento en el análisis cuyo testigo recogerían posteriormente muchos otros matemáticos de renombre, especialmente Karl Weierstrass. Otro aspecto en el que destacó fue en el estudio y el uso de diversas ecuaciones funcionales, rama del análisis de la que también se le considera uno de sus fundadores, que va ser el objeto principal de estudio en este trabajo.

El 28 de junio de 1830, la Academia Francesa de las Ciencias anunció que el Grand Prix a los descubrimientos matemáticos sería otorgado conjuntamente a Abel y Jacobi, por sus descubrimientos en el campo de las funciones elípticas. Entre los muchos honores conferidos a Abel destacan: un cráter lunar lleva su nombre, una calle del distrito duodécimo de París se denomina Rue Abel y una estatua suya fue construida en el Royal Park de Oslo. Además, también es importante el reconocimiento que le dieron los matemáticos asociando su nombre con multitud de términos y conceptos fundamentales de la disciplina como grupo abeliano, integrales abelianas, funciones abelianas, variedades abelianas, ecuación fundamental de Abel y transformada de Abel, entre otros.

## 1.4. Después de Abel

Holmboe fue el encargado de poner en orden y publicar toda la obra matemática de Abel. Diez años después, en 1839, aparecieron editadas las Obras Completas en dos volúmenes. En la introducción, Holmboe rinde tributo a la memoria de quien fuera su íntimo amigo. En 1858, el matemático francés Charles Hermite publicó una solución de la quíntica a través de las funciones elípticas abelianas, enlazando estos dos campos. Paralelamente, Weierstrass desarrollaría toda una teoría de represen-

[1]Con la fórmula del binomio de Newton podemos calcular la potencia de un binomio elevado a cualquier exponente y es el siguiente $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$

Figura 1.8: Estatua del Royal Park

tación en series infinitas para presentar armónicamente una teoría general con los resultados de Abel, Jacobi y otros sobre integrales hiperelípticas y sus inversas, las funciones abelianas. Tras la publicación de las Obras Completas de Abel editada por Holmboe, Ludwig Sylow y Sophus Lie prepararon y publicaron en 1881 una edición más completa de las Obras Completas de Abel. La idea de esta nueva edición surgió de algunos matemáticos como Weiertrass que veían las Obras publicadas por Holmboe un poco antiguas y tenían la necesidad de modernizarlas. El Gobierno noruego y la sociedad de Ciencias de Christiania fueron los encargados de aprobar el caso y hacer un exhaustivo estudio de todo lo que necesitaban para llevarlo a cabo. Matemáticos como Kronecker, Weierstrass, Jordan, entre otros, y la Academia de Berlín proporcionaron manuscritos de varias memorias de Abel de los tomos II y IV de la revista Crelle. Se intentó recaudar toda la información posible, por lo que también se pusieron en contacto con la viuda de Holmboe, quien revisando los papeles de su difunto marido, encontró una serie completa de manuscritos de Abel. Sin embargo, muchos de ellos estaban dañados por un incendio provocado en la casa de Holmboe poco después de su muerte. La mayoría de estos manuscritos datan de los últimos años de vida de Abel, y aunque no contienen resultados nuevos, sí que muestran importantes teoremas que fueron conocidos por otros más tarde y que ocultaron en la primera publicación. El tomo I de la primera edición de 1839, contiene en orden cronológico todas las memorias publicadas por Abel, excepto un folleto de la revista "Magasin des Sciences Naturelles" de 1824, que contenía un error del que Abel se retractó. Además, en la nueva edición de 1881 encontramos en el primer volumen las memorias III, V, VII y XIII que fueron omitidas en la edición de Holmboe, ya que las dos primeras memorias estaban en otras obras de Abel. La memoria VII presentada por Abel a la Academia de las Ciencias de París en 1826, no pudo ser insertada en la edición de Holmboe y la memoria XIII se escapó de la atención de este. Todos los trabajos de Abel fueron traducidos en el prefacio de Holmboe, escrito en francés, excepto unas memorias publicadas en los primeros volúmenes de la revista "Für die reine und angewandte Mathematik" que fueron traducidas al alemán por Crelle, a excepción de su obra sobre funciones elípticas. Respecto a las memorias impresas en el cuarto volumen de esta revista, todavía existen copias de los manuscritos originales de Abel, en los que Crelle hizo varias correcciones, parte de ellas innecesarias, por lo que las traducciones alemanas de Crelle no se pueden considerar como versiones absolutamente exactas al texto original. Así se consideró que la mejor opción era traducir todo al francés y preservar también la unidad lingüística. El volumen II de la segunda edición incluye obras póstumas y extractos de cartas de Abel. Se reconoce el gran mérito de Holmboe, como hábil maestro y fiel amigo de Abel, así como el editor celoso de sus obras. Otra diferencia de la segunda edición con respecto de la de Holmboe es que en el tomo II, en vez de dar una visión general de todos los manuscritos de Abel, se hace una recopilación de obras completadas por Abel desde agosto de 1826 hasta finales del mismo año y principios de 1827, con obras que prueban que Abel se ocupó de la teoría de transformación de funciones elípticas. En definitiva podemos decir que en esta nueva edición de la Obras Completas de Abel están reunidos todos los datos accesibles de la vida de Abel.

Finalmente, en 2002, el gobierno noruego estableció un fondo de 22 millones de dólares para retribuir el Premio Abel de Matemáticas, que es entregado al estilo del Nobel por el rey de Noruega. Desde entonces, en Oslo, a finales de mayo, año tras año, en los jardines del Palacio Real, a los pies de una imponente estatua de bronce sobre un enorme pedestal de granito, algunos de los mejores matemáticos del mundo colocan coronas de flores en honor a Niels Henrik Abel. La ceremonia principal es la entrega del premio Abel por parte de rey de Noruega. Uno de los motivos principales por los que el Parlamente noruego aprobó por unanimidad la creación del premio Abel fue para aumentar el prestigio social de las matemáticas y generar interés por las mismas entre las jóvenes generaciones. En vinculación a este premio, el ministro de educación noruego, entrega anualmente, el premio en memoria de Bernt Michael Holmboe a la excelencia en la enseñanza matemática.

# Capítulo 2

# Ecuaciones funcionales en la obra de Abel

En este capítulo daremos una exhaustiva recopilación de todas las ecuaciones funcionales que aparecen a lo largo de las Obras Completas de Abel. Para ello tendremos en cuenta [1] y [2] que son las dos publicaciones de las Obras Completas de Abel que hay y también nos apoyaremos en [10], artículo dedicado a los diferentes aspectos matemáticos que trabajó Abel.
En 1823, Abel publicó dos artículos en noruego, en el primer número de *"Magasinet for Naturvidenskaberne"*, revista editada por Hansteen. El primero de estos artículos, llamado textualmente *"Almindelig Methode til at finde Funktioner er udtrykt ved en Ligning mellom to Variable"* podemos encontrarlo en [2, t.I.pp.1-10] y trata sobre el método común para encontrar funciones de una variable, con propiedades suficientes para expresar el resultado como una ecuación entre dos variables.

Es decir, Abel da un método general, basado en ecuaciones diferenciales, para obtener soluciones de ecuaciones funcionales. Método que desarrollaremos en capítulos posteriores.
A continuación vamos a ver todas las ecuaciones funcionales que Abel desarrolla a lo largo de sus obras.

1. En [2, t.I.pp.3-4] encontramos la siguiente ecuación,

$$\varphi(\alpha) = f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma))^{1}, \tag{2.1}$$

   donde, $f$, $\beta$, $\alpha$ y $\gamma$ son funciones dadas y $\varphi$ es una función desconocida.
   La resolución de esta ecuación la veremos en el capítulo siguiente cuando desarrollemos su método de resolución.
   Dentro de este tipo de funciones, entre otras Abel estudia en sus obras [2, t.I.pp.4-6] las siguientes ecuaciones funcionales:

   - En [2, t.I.pp.4] tenemos

$$f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)) = \varphi(\beta) + \varphi(\gamma)),^{2}$$

[1] Abel emplea $\varphi\alpha = f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma)$
[2] Abel emplea la notación $f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma) = \varphi\beta + \varphi\gamma)$

o equivalentemente
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) + \varphi(\gamma), \tag{2.2}$$
donde, $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son funciones conocidas y $\varphi$ es la función de una variable que estamos buscando. Aplicando a esta ecuación el método que veremos en el siguiente capítulo y por el cual desarrollaremos la misma, llegaremos a
$$\varphi(\beta) = \varphi'(\gamma) \int \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}}{\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y}} d\beta. \tag{2.3}$$
Así, si tomamos $\beta = x$ y $\gamma = y$, tendremos
$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y), \tag{2.4}$$
y por tanto
$$\varphi(x) = \varphi'(y) \int \frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}} dx. \tag{2.5}$$
En el siguiente capítulo veremos algunos ejemplos más específicos.

- En [2, t.I.pp.5-6] encontramos
$$f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)) = \varphi(\beta)\varphi(\gamma),$$ [3]
o equivalentemente
$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)\varphi(\gamma), \tag{2.6}$$
donde como en el caso anterior $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son funciones conocidas y $\varphi$ es la función buscada.
Donde al igual que en el caso anterior ya veremos en el capítulo siguiente el desarrollo del método para llegar a
$$\varphi(x) = e^{cx}, \tag{2.7}$$
cuando $\alpha = \alpha(x, y) = x + y$, $\beta(x) = x$ y $\gamma(y) = y$.

2. Abel considera otro tipo de ecuación funcional, [2, t.I,pp.6-7],
$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x + y) + \varphi(x - y), \tag{2.8}$$
que aparece como consecuencia de un problema de mecánica relativo a la composición de fuerzas.
Se busca la resultante $R$ de dos fuerzas iguales $P$ cuyas direcciones forman un ángulo igual a $2x$. Abel afirma, basándose en [15, t.I.pp.14], que ha de cumplirse $R = P\varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ verifica (2.8).
Veamos cómo se demuestra este hecho en dicho trabajo de Poisson [15].
Para ello, en primer lugar, vamos a tener en cuenta el siguiente gráfico

[3] Abel emplea la notación $f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma) = \varphi\beta\varphi\gamma$

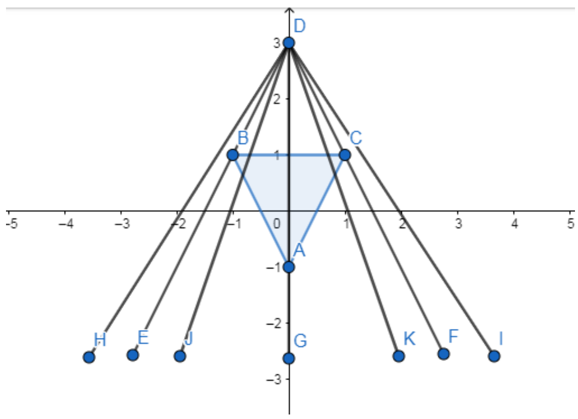


Figura 2.1: Estudio de Poisson

Si nos fijamos en la figura, vemos que $DE$ y $DF$ representan las dos componentes de la fuerza $P$, el ángulo de $2x$ será el formado por $EDF$, y por tanto, los ángulos $EDG = FDG = x$. Por tanto, tendremos una función dependiente de $P$ y $R$, que designaremos como $R = f(P, x)$. En esta ecuación podemos observar que $R$ y $P$ son las únicas cantidades cuya expresión numérica varía con la unidad de fuerza que elegimos, y su relación $\frac{R}{P}$ es independiente de esta unidad, por lo que podemos concluir que tendremos una función únicamente dependiente de $x$, así $f(P, x) = P\varphi(x)$ y por tanto

$$R = P\varphi(x).$$

Con lo que tenemos hasta aquí, la cuestión de la deducción de la ecuación (2.8) reside en determinar la forma de la función $\varphi(x)$.
Para ello trazamos arbitrariamente los segmentos $DH$, $DJ$, $DK$ y $DI$, que forman los ángulos $HDE$, $JDE$, $KDF$ e $IDK$ respectivamente y los representamos por $z$. Una vez hecho esto, descomponemos la fuerza $P$ con dirección $DE$, en dos fuerzas iguales, con direcciones $DH$ y $DJ$. Si designamos como $Q$ este valor, tendremos

$$P = Q\varphi(z).$$

De igual modo, descomponemos la fuerza $P$ con dirección $DF$ en dos fuerzas iguales $Q$ en direcciones $DK$ y $DI$. De esta manera, la fuerza $P$ quedará reemplazada por las cuatro fuerzas $Q$. Obviamente la resultante de estas fuerzas deberá coincidir con la fuerza $R$ resultante de las fuerzas $P$.
Llamando ahora $Q'$ a la resultante de dos fuerzas $Q$ en direcciones $DJ$ y $DK$, tenemos que $JDG = KDG = x - z$ y así tenemos

$$Q' = Q\varphi(x - z). \tag{2.9}$$

De la misma forma, si $Q''$ es la resultante de dos fuerzas en direcciones $DH$ y $DI$, tendremos $HDG = IDG = x + z$, luego

$$Q'' = Q\varphi(x + z). \tag{2.10}$$

Por tanto, tendremos que $R = Q' + Q''$, donde sabemos que $R = P\varphi(x) = Q\varphi(x)\varphi(z)$ y así llegamos a (2.8).

Une vez visto cómo Poisson llega a esta ecuación funcional, que resuelve a través del teorema de Taylor [15, t.I.pp.14-17], vamos a ver cómo lo hace Abel, [2, t.I.pp.6-7].
Si en (2.8) suponemos que $x+y$ =constante y derivamos respecto a $x$ tenemos

$$\varphi'(x)\varphi(y)+\varphi(x)\varphi'(y)\frac{dy}{dx}=\varphi'(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right),$$

donde ya se ha eliminado $\alpha=x+y$. Como $x+y=c$, tenemos que $\frac{dy}{dx}=-1$ y sustituyendo este valor en la ecuación anterior tenemos

$$\varphi'(x)\varphi(y)-\varphi(x)\varphi'(y)=2\varphi'(x-y).$$

Derivando ahora respecto a $x$ y suponiendo $x-y=\beta$ constante, tenemos

$$\varphi''(x)\varphi(y)+\varphi'(x)\varphi'(y)\frac{dy}{dx}-\varphi'(x)\varphi'(y)-\varphi(x)\varphi''(y)\frac{dy}{dx}=0,$$

al igual que antes como ahora $x-y=c$, tendremos $\frac{dy}{dx}=1$ y por tanto, sustituyendo este valor en la ecuación anterior, obtenemos

$$\varphi''(x)\varphi(y)-\varphi(x)\varphi''(y)=0.$$

Suponiendo que $y$ es constante, tendremos que $\varphi(y)\neq 0$ y por tanto

$$\varphi''(x)-\varphi(x)\frac{\varphi''(y)}{\varphi(y)}=\varphi''(x)-c\varphi(x)=0. \tag{2.11}$$

Para resolver esta ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, distinguimos dos casos:
Si $c=0$, tendremos $\varphi''(x)=0$, entonces $\varphi(x)=Ax+B$ y por tanto,

$$\varphi(x)\varphi(y)=(Ax+B)(Ay+B), \tag{2.12}$$

$$\varphi(x+y)=Ax+Ay+B, \tag{2.13}$$

$$\varphi(x-y)=Ax-Ay+B, \tag{2.14}$$

e igualando (2.12) a la suma de (2.13) y (2.14), tenemos $(Ax+B)(Ay+B)=2(Ax+B)$, de donde tenemos por un lado $Ax+B=0$, entonces $A=B=0$ y por tanto $\varphi(x)=0$ y por otro lado $Ay+B=2$, entonces $A=0$ y $B=2$ y por tanto $\varphi(x)=2$.
Si $c>0$, tendremos $\varphi''(x)+c\varphi(x)=0$ y resolviéndola como la ecuación ordinaria de segundo orden que es, tenemos que su ecuación característica es $\lambda^2+c=0$, de donde $\lambda=i\sqrt{c}$ y $\lambda=-i\sqrt{c}$ y por tanto $\varphi(x)=A\cos(x\sqrt{c})+B\text{sen}(x\sqrt{c})$. Así, si escribimos $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}=\cos(\beta)$ y $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=\text{sen}(\beta)$, resultará que $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(\cos(\beta)\cos(x\sqrt{c})+\text{sen}(\beta)\text{sen}(x\sqrt{c}))$ que observamos que es el coseno de la diferencia de ángulos, es decir, $\varphi(x)=\frac{1}{A^2+B^2}\cos(x\sqrt{c}-\beta)$ o lo que es lo mismo $\varphi(x)=k\cos(qx+r)$ donde $k\neq 0$. Ahora, si sustituimos estas funciones en la ecuación funcional (2.8) y aplicamos las fórmulas trigonométricas, tenemos que

$$k\cos(qx+r)\cos(qy+r)=2\cos(qx+r)\cos(qy),$$

donde comparando tenemos que $k=2$, $r=0$ y $q$ arbitrario y por tanto, $\varphi(x)=2\cos(qx)$ que como se ve claramente es la fuerza resultante $R$.

3. En [2, t.I.pp.7-10] encontramos la siguiente ecuación funcional

$$\psi(\alpha) = F(x, y, \varphi(x), \varphi'(x), ...f(y), f'(y), ...),^{4} \tag{2.15}$$

donde $\alpha$ es una función dada de $x$ e $y$ y $\varphi$, $f$ y $\psi$ son funciones por determinar que satisfacen (2.15). Dentro de este tipo de funciones podemos destacar las siguientes:

- En [2, t.I.pp.8-9] tenemos

$$\psi(x + y) = \varphi(x)f'(y) + f(y)\varphi'(x), \tag{2.16}$$

donde $\psi$, $\varphi$ y $f$ serán las funciones que determinaremos, aplicando el método que veremos en el capítulo siguiente y $\alpha = x + y$ será la función conocida.

- En [2, t.I.pp.10] encontramos

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)f(y) + f(x)\varphi(y), \tag{2.17}$$

donde $f$ y $\varphi$ son las funciones desconocidas, que hallaremos aplicando el método que veremos en el siguiente capítulo.

- Por último, dentro de este tipo de ecuaciones funcionales en [2, t.I.pp.10] vemos

$$\psi(x + y) = f(xy) + \varphi(x - y) \tag{2.18}$$

donde $\psi$, $\varphi$ y $f$ son las funciones que estamos buscando.

Como ya hemos comentado, en el siguiente capítulo veremos tanto el método general para resolver estas ecuaciones, como la aplicación de dicho método en cada una de estas ecuaciones para hallar sus soluciones. Además, en el cuarto capítulo veremos otra forma de resolver la ecuación (2.18) considerando algunas condiciones generales de las funciones, ya que como hemos visto hasta ahora, Abel no impone ninguna condición general sobre las funciones que intervienen en las ecuaciones funcionales.

4. Abel estudió otro tipo de ecuación funcional en [2, t.I.pp 61-65], trabajo que llamó " Recherche des fonctions de deux quantités variables indépendantes x et y, telles que $f(x, y)$, qui ont la propriété que $f(z, f(x, y))$ est une fonction symétrique de z, x et y", publicado en alemán en el primer volumen de la revista de Crelle en 1826.
Abel estudia la búsqueda de funciones de dos variables independientes $x$ e $y$ tales que $f(x, y)$ tiene la propiedad de que $f(z, f(x, y))$ es una función simétrica de $x$, $y$ y $z$.
Si por ejemplo tenemos que $f(x, y) = x + y$ (o $f(x, y) = xy$), entonces tendremos que $f(z, f(x, y)) = z+f(x, y) = z+x+y$ (o $f(z, f(x, y)) = zf(x, y) = zxy$) que es una función simétrica respecto $x$, $y$ y $z$.

[4] Notación de Abel: $\psi\alpha = F(x, y, \varphi x, \varphi' x, ...fy, f'y, ...)$

La condición del título caracteriza una de ley de composición asociativa y conmutativa, que nos permite escribir

$$\begin{aligned} f(z, f(x,y)) &= f(z, f(y,x)) \\ &= f(x, f(z,y)) \\ &= f(x, f(y,z)) \\ &= f(y, f(x,z)) \\ &= f(y, f(z,x)). \end{aligned} \tag{2.19}$$

De (2.19) deducimos que $f(x,y) = f(y,x)$, por la conmutatividad mencionada antes, y por tanto $f(x,y)$ es una función simétrica de $x$ e $y$. Así las ecuaciones (2.19) se reducen a

$$f(z, f(x,y)) = f(x, f(y,z)), \tag{2.20}$$

$$f(z, f(x,y)) = f(y, f(z,x)), \tag{2.21}$$

y tomando $f(x,y) = r$, $f(y,z) = v$ y $f(z,x) = s$, tendremos

$$f(z,r) = f(x,v) = f(y,s). \tag{2.22}$$

Derivando respecto a $x$, $y$ y $z$, tenemos

$$\frac{\partial f(z,r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f(y,s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f(z,r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial f(y,s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} \tag{2.25}$$

Si ahora multiplicamos (2.23), (2.24) y (2.25) miembro a miembro obtenemos:

$$\frac{\partial f(z,r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f(y,s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{\partial f(y,s)}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial f(z,r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z},$$

y dividiendo esto por $\frac{\partial f(z,r)}{\partial r}\frac{\partial f(x,v)}{\partial v}\frac{\partial f(y,s)}{\partial s}$, obtenemos

$$\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial z} \tag{2.26}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial z}} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\frac{\partial s}{\partial z}}. \tag{2.27}$$

Si ahora hacemos $\frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi(y)$ y $\frac{\partial s}{\partial x} : \frac{\partial s}{\partial z} = \varphi(x)$, sustituyendo en (2.27) tendremos

$$\frac{\partial r}{\partial x}\varphi(y) = \frac{\partial r}{\partial y}\varphi(x). \tag{2.28}$$

Así, integrando (2.28), obtenemos el valor general de $f(x,y) = r$,

$$r = \psi\left(\int \varphi(x)dx + \int \varphi(y)dy\right), \tag{2.29}$$

con $\psi$ una función arbitraria.
Si para abreviar escribimos $\varphi(x) = \int \varphi(x)dx$ y $\varphi(y) = \int \varphi(y)dy$, tendremos

$$r = \psi(\varphi(x) + \varphi(y)) \tag{2.30}$$

o

$$f(x, y) = \psi(\varphi(x) + \varphi(y)), \tag{2.31}$$

que es la ecuación general que estamos buscando. Pero además (2.31) también debe satisfacer que

$$f(z, r) = \psi(\varphi(z) + \varphi(r)) \tag{2.32}$$

de donde, usando (2.30), tenemos

$$f(z, r) = \psi(\varphi(z) + \varphi\psi(\varphi(x) + \varphi(y)). \tag{2.33}$$

Como esta expresión tiene que ser simétrica respecto a $x$, $y$ y $z$, operando y buscando la función inversa de $\varphi$, llegamos a que la forma general de la función buscada es

$$f(x, y) = \varphi^{-1}(c + \varphi(x) + \varphi(y)), \tag{2.34}$$

operando en (2.34), tendremos

$$\psi(f(x, y)) = \psi(x) + \psi(y) \tag{2.35}$$

que da lugar al siguiente teorema,

**Teorema 2.1.** *Cuando una función de $f(x, y)$ de dos variables independientes $x$ e $y$ tiene la propiedad de que $f(z, f(x, y))$ es una función simétrica de $x$, $y$ y $z$, siempre habrá una función $\psi$, para la cual tendremos*

$$\psi(f(x, y)) = \psi(x) + \psi(y). \tag{2.36}$$

Es decir, dada la función $f(x, y)$ encontramos fácilmente la función $\psi(x)$. El procedimiento consistiría en diferenciar (2.36) respecto a $x$ y respecto a $y$, y hacer $f(x, y) = r$. Así, tenemos

$$\psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = \psi'(x), \tag{2.37}$$

$$\psi'(r)\frac{\partial r}{\partial y} = \psi'(y). \tag{2.38}$$

Despejando $\psi'(r)$ de ambas ecuaciones e igualando, obtenemos

$$\psi'(x)\frac{\partial r}{\partial y} = \psi'(y)\frac{\partial r}{\partial x}, \tag{2.39}$$

de donde, $\psi'(x) = \psi'(y)\frac{\frac{\partial r}{\partial x}}{\frac{\partial r}{\partial y}}$ e integrando respecto a $x$, tendremos

$$\psi(x) = \psi'(y)\int \frac{\frac{\partial r}{\partial x}}{\frac{\partial r}{\partial y}} dx. \tag{2.40}$$

Para concluir con este tipo de ecuaciones funcionales simétricas, veremos un ejemplo para poder aplicar el teorema 2.1.

**Ejemplo 2.2.** *Sea* $r = f(x,y) = xy$*, vamos a aplicar el teorema 2.1. En primer lugar, veamos que* $r$ *es una función simétrica de* $x$ *e* $y$*, y efectivamente así lo es, pues* $f(x,y) = xy = yx = f(y,x)$*. Entonces por el teorema 2.1 existe una función* $\psi$ *tal que:*

$$\psi(xy) = \psi(x) + \psi(y). \tag{2.41}$$

*Así, como* $r = xy$*, se tiene* $\frac{\partial r}{\partial x} = y$*, y* $\frac{\partial r}{\partial y} = x$*, y aplicando (2.40) tendremos*

$$\psi(x) = \psi'(y) \int \frac{y}{x} dx,$$

*por tanto*

$$\psi(x) = y\psi'(y) \int \frac{1}{x} dx = y\psi'(x) \log(cx),$$

*y como* $y$ *es constante, si llamamos* $a = y\psi'(y)$ *tenemos*

$$\psi(x) = a \log(cx).$$

*Así tendremos que*

$$\psi(y) = a \log(cy),$$
$$\psi(xy) = a \log(cxy).$$

*Sustituyendo estos valores en (2.41), tendremos que*

$$a \log(cxy) = a \log(cx) + a \log(cy),$$

*lo que obliga a que* $c = 1$ *y tendremos por lo tanto que* $\psi(x) = a \log(x)$*, de modo que tendremos por tanto*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

5. En el segundo volumen de la revista de Crelle Abel publicó la siguiente ecuación funcional [2, t.I.pp.389-398]

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \psi(xf(y) + yf(x)) =: \psi(r) \tag{2.42}$$

donde $r = xf(y) + yf(x)$ y $f(y)$, $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son las funciones desconocidas, que tenemos que encontrar. Esta ecuación incluye como soluciones particulares la función logaritmo ( con $f(y) = \frac{1}{2}$, $\varphi(x) = \psi(x) = \log(x)$) y la función arco seno (con $f(y) = \sqrt{1-y^2}$, $\varphi(x) = \psi(x) = \text{arcsen}(x)$).
En primer lugar hacemos las siguientes derivadas de (2.42)

$$\varphi'(x) = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\varphi'(y) = \psi'(r)\frac{\partial r}{\partial y}$$

así que $\varphi'(x)\frac{\partial r}{\partial y} = \varphi'(y)\frac{\partial r}{\partial x}$ o lo que es lo mismo

$$\varphi'(y).(f(y) + yf'(x)) = \varphi'(x).(f(x) + xf'(y)), \tag{2.43}$$

donde tomando $y = 0$

$$\varphi'(0)f(0) - \varphi'(x)(f(x) + xf'(0)) = 0, \tag{2.44}$$

es decir,

$$a\alpha - \varphi'(x)(f(x) + x\alpha') = 0,$$

con $a = \varphi'(0)$, $\alpha = f(0)$, $\alpha' = f'(0)$ constantes, es una ecuación diferencial que determina $\varphi$ si $f$ es conocida.
Sustituyendo en (2.43) tenemos

$$\frac{1}{y}(\alpha' f(y) - f(y)f'(y) - \alpha' y f'(y)) = \frac{1}{x}(\alpha' f(x) - f(x)f'(x) - \alpha' x f'(x)) = m,$$

necesariamente constante. Así que

$$f'(x)(f(x) + \alpha' x) + (mx - \alpha' f(x)) = 0 \tag{2.45}$$

lo que determina $f$.
Como esta ecuación diferencial es homogénea, se integra fácilmente tomando $f(x) = xz$ de forma que se llega a:

$$\log(c) - \log(x) = \frac{1}{2}\log(z^2 - n^2) + \frac{\alpha'}{2n}\log(\frac{z-n}{z+n})$$

donde $m = -n^2$ y $c$ es la constante de integración. Así obtenemos

$$c^{2n} = (f(x) - nx)^{n+\alpha'}(f(x) + nx)^{n-\alpha'},$$

con $c = \alpha$, entonces $\varphi$ se verifica por (2.42) y (2.44) si satisface $\psi(x) = \varphi(\frac{x}{\alpha}) + \varphi(0)$.
Abel trata explícitamente el caso en el que $n = \alpha' = \frac{1}{2}$ así $f(x) = \alpha + \frac{1}{2}x$ y entonces

$$\varphi'(x) = a\alpha\log(\alpha + x) + k$$

y

$$\psi(x) = 2k + a\alpha\log(\alpha^2 + x).$$

La relación $\alpha^{2n} = (f(x) - nx)^{n+\alpha'}(f(x) + nx)^{n-\alpha'}$, que determina la función $f$ nos permite expresar $f(x) - nx$ y luego $x$ y $f(x)$ en términos de $f(x) + nx = v$ y volviendo a (2.44), tenemos

$$\varphi(x) = \frac{a\alpha}{n + \alpha'}\log(cnx + cf(x)).$$

Cuando $n = 0$ la relación que determina $f$ es de la forma $e^{\alpha' x} = (\frac{f(x)}{\alpha})^{f(x)}$ y tendremos que

$$\varphi(x) = \frac{a\alpha}{\alpha'}\log(c\alpha) + \frac{a\alpha x}{f(x)}$$

y

$$\psi(x) = \frac{2a\alpha}{\alpha'}\log(c\alpha) + \frac{ax}{f(\frac{x}{\alpha})}.$$

Lo que la ecuación (2.42) quiere decir, es que $\alpha f(\frac{xf(y)+yf(x)}{\alpha}) = f(x)f(y)$.
Otro caso particular es en el que $\alpha' = \infty$. Cuando $m$ es finito, (2.45)se reduce a $xf'(x) - f(x) = 0$, así que $f(x) = cx$.
Cuando $m$ es infinito y $m = -p\alpha'$, (2.45) se reduce a $xf(x) - px - f(x) = 0$ y $f(x) = px\log(cx)$. En este último caso por (2.43) tenemos $y\varphi'(y) - x\varphi'(x) = 0$, de donde, $\varphi'(x) = k$ constante y $\varphi(x) = k\log(mx)$ con $m$ distinta a la otra, entonces $\psi(pv\log(c^2v) = k\log(m^2v)$ con lo que finalizamos el estudio de esta ecuación.

6. Una memoria no publicada por Abel en ninguna revista contiene la siguiente ecuación funcional [2, t.II.pp.36-39]

$$\varphi(x) + 1 = \varphi(f(x)), \tag{2.46}$$

donde $f$ es una función dada y $\varphi$ es la función desconocida. El desarrollo de esta ecuación para hallar la solución que Abel desarrolló mediante el método de diferencias finitas lo veremos en el siguiente capítulo más detalladamente. Además, en el cuarto capítulo también veremos cómo a lo largo de los años esta ecuación ha continuado siendo estudiada motivada principalmente por el enunciado de uno de los problemas de Hilbert. Además, también ha sido motivo a lo largo de los años la imposición a esta ecuación de algunas condiciones más restrictivas, ya que Abel únicamente supone que las funciones sean continuas y monótonas.

7. Otro tipo de ecuación funcional se relaciona con el dilogaritmo

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + ... + \frac{x^n}{n^2} + ..., \tag{2.47}$$

que Abel estudió en [2, t.I.pp.189-193], después de leer el libro de Legendre de “Exercices de Calcul Intégral”. El estudio de esta ecuación se basa en la suma de la serie, para $|x| \leq 1$, en forma de una integral

$$\psi(x) = -\int_0^x \frac{1}{s}\log(1-s)ds. \tag{2.48}$$

Abel reproduce varias ecuaciones funcionales dadas por Legendre, como por ejemplo

$$\psi(x) + \psi(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \log(x).\log(1-x).$$

Pero Abel añade una notable nueva propiedad a la ecuación anterior, que es la siguiente

$$\psi\left(\frac{x}{1-x}.\frac{y}{1-y}\right) = \psi\left(\frac{y}{1-x}\right) + \psi\left(\frac{x}{1-y}\right) - \psi(y) \tag{2.49}$$

$$- \psi(x) - \log(1-y)\log(1-x) \tag{2.50}$$

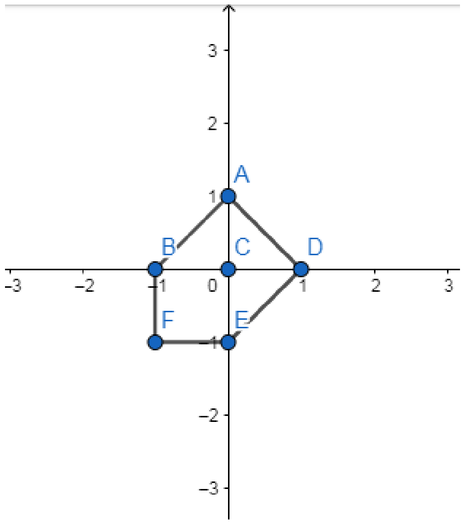


Figura 2.2: Dominio de la propiedad que da Abel

y que se cumple para $(x, y)$ en el dominio interior de la figura anterior.

Para probar (2.49) Abel sustituye $x$ por $\frac{a}{1-a}\frac{y}{1-y}$ en la ecuación (2.48) y tenemos así

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{a}{1-a}\frac{y}{1-y}\right) &= -\int\left(\frac{dy}{y}+\frac{dy}{1-y}\right)\log\left(\frac{1-a-y}{(1-a)(1-y)}\right)\\
&= -\int\frac{dy}{y}\log\left(1-\frac{y}{1-a}\right)+\int\frac{dy}{y}\log(1-y)\\
&- \int\frac{dy}{1-y}\log\left(1-\frac{a}{1-y}\right)+\int\frac{dy}{1-y}\log(1-a)\\
&= \psi\left(\frac{y}{1-a}\right)-\psi(y)-\int\frac{dy}{1-y}\log\left(1-\frac{a}{1-y}\right)\\
&- \log(1-a)\log(1-y),
\end{aligned}$$

donde la integral restante se calcula tomando $z = \frac{a}{1-y}$ como variable,

$$\begin{aligned}
\int\frac{dy}{1-y}\log\left(1-\frac{a}{1-y}\right) &= \int\frac{dz}{z}\log(1-z) = -\psi(z)\\
&= -\psi\left(\frac{a}{1-y}\right) + \text{constante.}
\end{aligned}$$

La constante de integración se determina tomando $y = 0$ y se encuentra que es $\psi(a)$.

8. En el capítulo anterior, ya hemos hablado de la rigurosidad que caracterizaba a Abel, y muestra de ello es que fue el primer matemático en dar una prueba general y rigurosa de la fórmula del Binomio de Newton,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^3 + \ldots \tag{2.51}$$

Lo que hace Abel para demostrar esta ecuación funcional [2, t.II.pp.189-193] es usar una idea de Euler, estudiada también por Legendre y Cauchy, que consiste en escribir el segundo miembro de (2.51) como $\varphi(m)$ y probar que $\varphi(m+n) = \varphi(m)\varphi(n)$, así que $\varphi(m) = A^m = (1+x)^m$ para $m$ racional, que fue observado también por Euler. Lagrange extendió esta demostración a cada valor de $m$, admitiendo que $\varphi$ es una función analítica de $m$. Cauchy usó una estrategia parecida, para $m$ real y $|x| < 1$, usando la continuidad de $\varphi$, pero dicha demostración fue incorrecta.
Así Abel consideró el caso más general, con $x$ y $m$ complejos, con $|x| < 1$ o $|x| = 1$ y $\operatorname{Re} m > -1$.

9. Por último, vamos a ver otro tipo de ecuación funcional que estudió Abel en [2, t.II.pp.287,318-319]. Consideró la integral hiperelíptica

$$\varphi(x) = \int \frac{(\alpha + \beta x)dx}{\sqrt{P(x)}}, \tag{2.52}$$

donde $P$ es un polinomio de grado seis y $\alpha$ y $\beta$ son constantes.
A partir de esta integral, Abel desarrolla el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.** *Sea la ecuación funcional*

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) = C - (\varphi(y_1) + \varphi(y_2)), \tag{2.53}$$

*donde $x_1$, $x_2$ y $x_3$ son variables independientes, $C$ es constante e $y_1$, $y_2$ son raíces de la ecuación*

$$y^2 - \left(\frac{c_2^2 + 2c_1 - a_4}{2c_2 - a_5} - x_1 - x_2 - x_3\right) y + \frac{\frac{c^2 - a}{x_1 x_2 x_3}}{2c_2 - a_5} = 0, \tag{2.54}$$

*donde $P(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6$ y $c + c_1 x_j + c_2 x_j^2 + x_j^3 = \sqrt{P(x_j)}$, para $j = 1, 2, 3$. Entonces la función $\varphi$ satisface la ecuación (2.53) si y solo si $\varphi$ viene dada por (2.52).*

Para concluir, comentar que para realizar el estudio de cada una de estas ecuaciones nos hemos valido de [1] y [2] apoyado [10].
A continuación vamos a ver los métodos que hemos comentado que desarrollaríamos más ampliamente en el capítulo siguiente.

# Capítulo 3

# Métodos de Abel

En este capítulo desarrollaremos principalmente dos de los métodos para la resolución de ecuaciones funcionales que desarrolla Abel en sus obras, [2, t.I.pp.1-10], [2, pp.36-39,t.II].
El primer método se basa en asociar una ecuación diferencial a la ecuación funcional y Abel lo presentó en [2, pp.1-10, t.I]. El segundo método de Abel para resolver ecuaciones funcionales se basa en el empleo de ecuaciones en diferencias finitas, [2, pp.36-39,t.II].

## 3.1. Método mediante ecuaciones diferenciales

Veamos el desarrollo de su método de resolución de ecuaciones funcionales a través de ecuaciones diferenciales.
Abel consideró un tipo muy general de ecuación funcional,

$$V(x, y, \varphi(\alpha), f(\beta), ..., \varphi'(\alpha), f'(\beta), F'(\gamma), ...) = 0, \quad (3.1)$$ [1]

donde $\varphi$, $f$, $F$,... son funciones desconocidas de una variable y $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,... son funciones conocidas dependientes de $x$ e $y$. Este método consiste en ir eliminando las funciones incógnitas $\varphi$, $f$, $F$,... de la ecuación (3.1), derivando dicha ecuación tomando $\alpha$ constante, después considerando $\beta$ constante, etc.
Si, por ejemplo, tomamos $\alpha =$ constante, habrá una relación entre $x$ e $y$, e $y$ se puede considerar como una función de $x$ y el valor constante de $\alpha$. Además, si $n$ es el orden más alto de derivación de $\varphi$ en $V$, es posible eliminar $\varphi(\alpha)$, derivando $n+1$ veces $V$ con $\alpha$ constante, y así quedan $n+2$ ecuaciones

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0, \quad ... \quad d^{n+1}V = 0.$$ [2]

Eliminando de estas $n+2$ ecuaciones las $n+1$ funciones desconocidas

$$\varphi(\alpha), d\varphi(\alpha), d^2\varphi(\alpha), ...,$$

[1] Abel emplea la notación $V(x, y, \varphi\alpha, f\beta, ..., \varphi'\alpha, f'\beta, F'\gamma, ...) = 0$, omite por tanto el uso de paréntesis

[2] Abel hace referencia a $d$ como la derivada total respecto a $x$

tendremos una nueva ecuación $V_1 = 0$ que no contendrá la función $\varphi(\alpha)$ ni sus derivadas, sólo las funciones $f(\beta)$, $F(\gamma)$ ... y sus derivadas.
Esta nueva ecuación $V_1 = 0$ se puede tratar de nuevo como la anterior, con respecto a una de las otras funciones desconocidas, $f(\beta)$, obteniendo así $V_2 = 0$ que no contendrá $\varphi(\alpha)$ ni sus derivadas, ni $f(\beta)$ ni sus derivadas, solamente contiene $F(\gamma)$ etc. y sus derivadas.
De esta manera, podemos continuar este procedimiento, eliminando las funciones desconocidas hasta que hayamos conseguido una ecuación que contenga una sola función desconocida, con sus derivadas o suponiendo que una de las cantidades variables es constante, teniendo así entre la función desconocida y la otra variable una ecuación diferencial que podemos resolver integrando. Puede observarse que es suficiente eliminar funciones desconocidas hasta que se obtenga una ecuación que contenga solo dos funciones desconocidas y sus derivadas. Ya que si por ejemplo suponemos que $\varphi(\alpha)$ y $f(\beta)$ son estas dos funciones y $\beta$ es constante, expresando $x$ e $y$ en función de $\alpha$ y usando las ecuaciones $\alpha = \alpha$ y $\beta = c$, llegamos a una ecuación diferencial entre $\varphi(\alpha)$ y $\alpha$ de donde podemos deducir el valor de $\varphi(\alpha)$. De la misma menera encontraremos una ecuación entre $f(\beta)$ y $\beta$. Las funciones restantes se pueden encontrar fácilmente usando las ecuaciones que quedan.
De esta manera podemos encontrar todas las funciones desconocidas, siempre que el problema sea posible. Para comprobar esto, solo tenemos que sustituir los valores encontrados en la ecuación dada y ver si la satisface. Es decir, depende de la diferenciación de una función de $x$ e $y$ con respecto a $x$, asumiendo una función dada de $x$ e $y$ constante. Así tenemos que $y$ es por tanto una función de $x$ y derivando, tenemos las expresiones $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$,... Expresiones que se encuentran fácilmente derivando la ecuación $\alpha = c$ respecto a $x$ y suponiendo que $y$ es una función de $x$. En efecto, si $\alpha(x, y(x)) = c$ obtenemos las ecuaciones siguientes

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{dy^2}{dx^2} = 0...,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}},$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}}{\frac{\partial\alpha}{\partial y}} + 2\frac{\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\frac{\partial\alpha}{\partial x}}{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2}...$$

El método general para resolver la ecuación $V = 0$ es aplicable a todos los casos donde se pueda hacer eliminación, pero puede ser que no sea posible en algún caso.[3]
A continuación, vamos a ver cómo desarrolla Abel en sus obras [2, t.I.pp.3-7] las ecuaciones vistas en el capítulo anterior, mediante este método.
En [2, t.I.p.3-4] encontramos la ecuación vista (2.1)

$$\varphi(\alpha) = f(x, y, \varphi(\beta), \varphi(\gamma)).$$

[3]El propio Abel señala que este método no siempre permite la eliminación de incógnitas: "mais il peut arriver que cela ne soit pas possible"

Pasamos a resolverla. Derivando (2.1) respecto a $x$ y suponiendo que $\alpha$ es constante, tenemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial(\varphi(\beta))}\varphi'(\beta)\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial(\varphi(\gamma))}\varphi'(\gamma)\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{dy}{dx}\right). \end{aligned}$$

Tomando entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}},$$

y sustituyendo este valor en la ecuación anterior y multiplicando por $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ nos queda

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial(\varphi(\beta))}\varphi'(\beta)\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial(\varphi(\gamma))}\varphi'(\gamma)\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Haciendo ahora $\gamma$ constante, determinamos $x$ e $y$ en $\beta$, por las ecuaciones $\gamma = c$ y $\beta = \beta$ y sustituyendo sus valores en (3.2), obtenemos entre $\varphi(\beta)$ y $\beta$ una ecuación diferenciable de primer orden.
A continuación, vamos a desarrollar las ecuaciones de este tipo que vimos en el capítulo anterior.

- Si tenemos la ecuación (2.2)

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) + \varphi(\gamma),$$

tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial(\varphi(\beta))} = 1, \frac{\partial f}{\partial(\varphi(\gamma))} = 1.$$

y sustituyendo estos valores en (3.2), obtenemos la ecuación,

$$0 = \varphi'(\beta)\left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y}\right) + \varphi'(\gamma)\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial y}\right),$$

donde integrando tenemos

$$\varphi(\beta) = \varphi'(\gamma)\int \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial \gamma}{\partial x}}{\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial y}} d\beta. \tag{3.3}$$

Así, tomando $\beta = x$ y $\gamma = y$, tendremos

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y), \tag{3.4}$$

y por tanto, haciendo

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{dx}{dx} = 1, \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{dx}{dy} = 0, \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{dy}{dx} = 0, \frac{\partial \gamma}{\partial y} = \frac{dy}{dy} = 1$$

y sustituyendo estos valores en (3.3), tendremos

$$\varphi(x) = \varphi'(y) \int \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} dx. \tag{3.5}$$

A continuación, vamos a aplicar este método a un ejemplo.

**Ejemplo 3.1.** *Si ahora tomamos $\alpha = xy$, tendremos,*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y, \frac{\partial \alpha}{\partial y} = x,$$

*y sustituyendo en (3.5), obtenemos*

$$\varphi(x) = \varphi'(y) \int \frac{y}{x} dx = c \int \frac{dx}{x}, \tag{3.6}$$

*donde, $\varphi(x) = c\log(x)$, por tanto, $\varphi(y) = c\log(y)$ y como $\alpha = xy$, tendremos que $\varphi(\alpha) = \varphi(xy) = c\log(xy)$. Así sustituyendo estos valores en (3.4), obtenemos*

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

**Ejemplo 3.2.** *Si ahora, tomamos $\alpha = \frac{x+y}{1-xy}$, tendremos que,*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{1-xy} + \frac{y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{1-xy} + \frac{x(y+x)}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

*Por tanto,*

$$\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} = \frac{1+y^2}{1+x^2},$$

*y sustituyendo de nuevo en (3.5) obtenemos*

$$\varphi(x) = \varphi'(y) \int \frac{1+y^2}{1+x^2} dx = c \int \frac{dx}{1+x^2},$$

*de donde deducimos que $\varphi(x) = c\arctan(x)$, por tanto, tendremos que $\varphi(y) = c\arctan(y)$ y como $\alpha = \frac{x+y}{1-xy}$, deducimos que $\varphi\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = c\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$ y sustituyendo estos valores en (3.4), tendremos*

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y).$$

- Si ahora tenemos (2.6)

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)\varphi(\gamma),$$

tomando $\beta = x$ y $\gamma = y$, tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial(\varphi(x))} = \varphi(y), \frac{\partial f}{\partial(\varphi(y))} = \varphi(x),$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} = 1, \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0,$$

y sustituyendo estos valores en (3.2), tenemos

$$\varphi(y)\varphi'(x)\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \varphi(x)\varphi'(y)\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

donde,

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}$$

e integrando con $\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = c$ constante, tenemos

$$\log(\varphi(x)) = c\int \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} dx.$$

Así, si llamamos $T = \int \frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} dx$, tendremos

$$\varphi(x) = e^{cT}. \tag{3.7}$$

A continuación, vamos a ver algunos casos particulares, en modo de ejemplos.

**Ejemplo 3.3.** *Si $\alpha = x + y$, tendríamos $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = 1$, así $T = \int dx = x$ y sustituyendo en (3.7) tendremos $\varphi(x) = e^{cx}$.*

**Ejemplo 3.4.** *Si ahora $\alpha = xy$, tendremos que $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = y$ y $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = x$, tendremos que $T = y\int \frac{dx}{x}$, y sustituyendo estos valores en (3.7), obtenemos, $\varphi(x) = e^{c\log(x)} = cx$.*

En el capítulo anterior vimos otro tipo de ecuaciones funcionales (2.15)

$$\psi(\alpha) = F(x, y, \varphi(x), \varphi'(x), ...f(y), f'(y), ...),$$

que encontramos en [2, t.I.pp.10], donde $\varphi$ es una función de una variable $x$ independiente de $y$, $F$ es una función dada de las cantidades entre paréntesis y $\alpha$ es una función de $x$ e $y$ dada.
Donde diferenciando (2.15), respecto a $x$, suponiendo $\alpha$ constante y tomando $-\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}}$ en lugar de $\frac{dy}{dx}$, obtenemos

$$\frac{\frac{\partial \alpha}{\partial x}}{\frac{\partial \alpha}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial(\varphi(x))}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + ...}{\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial(f(y))}\frac{\partial f}{\partial y} + ...}[4]. \tag{3.8}$$

[4] Notación de Abel $\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} = \frac{F'(x)+F'(\varphi(x))\varphi'(x)+...}{F'(y)+F'(f(y))f'(y)+...}$

Haciendo en (3.8) $y$ constante, tendremos una ecuación diferencial entre $\varphi(x)$ y $x$, donde encontraremos la función $\varphi(x)$ y haciendo de nuevo $x$ constante y derivando de nuevo, encontramos la función $f(y)$, y haciendo esto sucesivamente, encontraremos el valor de la función $\psi(\alpha)$ dada.
A continuación, vamos a ver una serie de ejemplos, aunque será uno, en particular, el que mayor interés nos despierta.

**Ejemplo 3.5.** *Vamos a encontrar las tres funciones que satisfacen la ecuación* (2.16)

$$\psi(x+y) = \varphi(x)f'(y) + f(y)\varphi'(x),$$

*es decir,*

$$F(x, y, \varphi(x), \varphi'(x), f(y), f'(y)) = \varphi(x)f'(y) + f(y)\varphi'(x), \tag{3.9}$$

*que vamos a denotar de la siguiente manera, para facilitar las operaciones,*

$$F(x, y, u, w, z, t) = ut + zw,$$

*de donde*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial u} = t, \frac{\partial F}{\partial w} = z,$$

*así, si $\alpha = x + y$, tendremos*

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 1 = \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

*Por tanto, sustituyendo estos valores en* (3.8), *tendremos*

$$1 = \frac{f'(y)\varphi'(x) + f(y)\varphi''(x)}{\varphi'(x)f'(y) + \varphi(x)f''(y)}, \tag{3.10}$$

*equivalentemente,*

$$\varphi'(x)f'(y) + \varphi(x)f''(y) = f'(y)\varphi'(x) + f(y)\varphi''(x), \tag{3.11}$$

*por tanto,*

$$\varphi(x)f''(y) - f(y)\varphi''(x) = 0. \tag{3.12}$$

*Si suponemos ahora que $y$ es constante, tendremos*

$$\varphi(x)\frac{f''(y)}{f(y)} - \varphi''(x) = 0,$$

*que es lo mismo que*

$$k\varphi(x) - \varphi''(x) = 0,$$

*con $k = \frac{f''(y)}{f(y)}$.*
*Así, nos queda una ecuación ordinaria de segundo orden y resolviéndola tenemos*

$$\varphi(x) = a\,\mathrm{sen}(bx + c).$$

*Si ahora suponemos que $x$ es constante, tendremos*

$$f''(y) - f(y)\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

*que es lo mismo que*

$$f''(y) - k'f(y) = 0,$$

*con* $k = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$*. Y así como antes obtenemos una ecuación ordinaria de segundo orden cuya solución viene dada por*

$$f(y) = a' \operatorname{sen}(by + c').$$

*Derivando estas funciones, tenemos*

$$\varphi'(x) = ab\cos(bx + c),$$

$$f'(y) = a'b\cos(by + c').$$

*Así sustituyendo estos valores en* (2.16)*, tendremos*

$$\psi(x+y) = aa'b(\operatorname{sen}(bx+c)\cos(by+c')+\operatorname{sen}(by+c')\cos(bx+c)) = aa'b\operatorname{sen}(b(x+y)+c+c').$$

*Con lo que tenemos que las tres funciones buscadas son*

$$\varphi(x) = a\operatorname{sen}(bx + c),$$

$$f(y) = a' \operatorname{sen}(by + c'),$$

$$\psi(\alpha) = aa'b\operatorname{sen}(b\alpha + c + c').$$

*Si ahora, hacemos* $a = a' = b = 1$ *y* $c = c' = 0$*, tendremos*

$$\varphi(x) = \operatorname{sen}(x),$$

$$f(y) = \operatorname{sen}(y),$$

$$\psi(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha),$$

*y por tanto, la ecuación* (2.16)*, queda como*

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}'(y) + \operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}'(x).$$

**Ejemplo 3.6.** *En este segundo ejemplo vamos a determinar las funciones desconocidas* $\varphi$ *y* $f$ *que satisfacen la ecuación* (2.17)

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)f(y) + f(x)\varphi(y),$$

*vista en el capítulo anterior. En primer lugar supongamos que* $x+y = c$ *y derivando respecto a* $x$*, obtendremos*

$$0 = \varphi'(x)f(y) - \varphi(x)f'(y) + f'(x)\varphi(y) - f(x)\varphi'(y), \tag{3.13}$$

*donde ya hemos eliminado* $\alpha = x+y$*. Supongamos, además, que* $f(0) = 1$ *y* $\varphi(0) = 0$ *e* $y = 0$*, entonces*

$$0 = \varphi'(x) - c\varphi(x) + c'f(x), \tag{3.14}$$

*de donde*

$$f(x) = k'\varphi'(x) + k\varphi(x). \tag{3.15}$$

*Así, sustituyendo este valor en* (3.14) *y haciendo $y$ constante, tenemos*

$$\varphi''(x) + a\varphi'(x) + b\varphi(x) = 0. \tag{3.16}$$

*Cuya ecuación característica viene dada por*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0,$$

*es decir, la solución vendrá dada por*

$$\varphi(x) = c' e^{\alpha x} + c'' e^{\alpha' x}.$$

*Sustituyendo estos valores, podemos calcular el valor de las otras dos funciones que nos faltan por conocer, y que serán $\varphi(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $f(x) = \cos(x)$.*

El último ejemplo que vamos a ver es uno de los más importantes, pues en el capítulo siguiente vamos a ver cómo la resolución de dicha ecuación ha ido avanzando y cómo se le han ido imponiendo condiciones más generales de las impuestas por Abel.

**Ejemplo 3.7.** *Vamos a buscar las tres funciones desconocidas que satisfacen la ecuación* (2.18)

$$\psi(x+y) = f(xy) + \varphi(x-y).$$

*En primer lugar derivando* (2.18) *respecto a $x$ y suponiendo que $x+y$ es constante, tenemos que*

$$0 = f'(xy)(y-x) + 2\varphi'(x-y), \tag{3.17}$$

*donde ya hemos eliminado $\beta = x+y$. Primero, vamos a buscar $\varphi(\alpha)$.*
*Si $xy = c$ y $x - y = \alpha$, tendremos*

$$\alpha f'(c) = 2\varphi'(\alpha),$$

*que equivale a*

$$\varphi'(\alpha) = k\alpha, \tag{3.18}$$

*y por tanto*

$$\varphi(\alpha) = k' + \frac{k}{2}\alpha^2. \tag{3.19}$$

*Ahora buscamos la función $f(\beta)$. Así, si $xy = \beta$ y $x - y = c$, tendremos que*

$$f'(\beta) = c', \tag{3.20}$$

*y por tanto*

$$f(\beta) = c'' + c'\beta. \tag{3.21}$$

*Sustituyendo ahora los valores de $f(\beta)$ y $\varphi(\alpha)$ en la ecuación* (2.18), *tendremos*

$$\psi(x+y) = c'' + c'xy + k' + \frac{k}{2}(x-y)^2. \tag{3.22}$$

*Para determinar ahora $\psi(\alpha)$, si $x + y = \alpha$, con $y = \alpha - x$, tendremos*

$$\psi(\alpha) = c'' + c'x(\alpha - x) + k' + \frac{k}{2}(2x - \alpha)^2 \tag{3.23}$$

$$= c'' + \frac{k}{2}\alpha^2 + k' + x\alpha(c' - 2k) + (2k - c')x^2. \tag{3.24}$$

*Para que esta ecuación sea posible, es necesario que $x$ desaparezca, entonces tenemos $2k - c' = 0$, es decir, $c' = 2k$.*
*Y por tanto sustituyendo estos valores en (3.19), (3.21) y en (3.23), tendremos*

$$\psi(\alpha) = k' + c'' + \frac{k}{2}\alpha^2,$$

$$f(\beta) = c'' + 2k\beta,$$

$$\varphi(\alpha) = k' + \frac{k}{2}\alpha^2$$

*que son las tres funciones que estábamos buscando.*

## 3.2. Método de resolución mediante ecuaciones en diferencias finitas

A continuación, vamos a desarrollar el otro método mencionado al inicio del capítulo, el método a partir de ecuaciones en diferencias finitas, que consiste en transformar el problema en la resolución de una cierta ecuación en diferencias finitas. En primer lugar, recordar que una ecuación en diferencias finitas es una expresión del tipo

$$x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n, n)$$

donde $g : \Omega \times \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el caso no autónomo o

$$x_{n+k} = g(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_{n+1}, x_n)$$

donde $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ en el caso autónomo.

A continuación, pasaremos al desarrollo del método usado para la resolución de la ecuación

$$\varphi(x) + 1 = \varphi(f(x)) \tag{3.25}$$

(la ecuación (2.46) que vimos en el capítulo anterior). Se trata de que, dada la función $f(x)$, encontremos la función $\varphi(x)$ de la ecuación (3.25).
Tomando $x = \psi(y)$ y $f(x) = \psi(y + 1)$ y sustituyendo en (3.25), tenemos

$$\varphi(\psi(y)) + 1 = \varphi(\psi(y + 1)), \tag{3.26}$$

o equivalentemente,

$$\varphi(\psi(y + 1)) - \varphi(\psi(y)) = 1, \tag{3.27}$$

lo cual quiere decir que

$$\Delta(\varphi(\psi(y))) = 1,^{5} \tag{3.28}$$

es decir es una ecuación en diferencias finitas.
Teniendo ahora en cuenta que si descomponemos $g(y) := \varphi(\psi(y))$ en la forma

$$g(y) = y + w(y),$$

entonces

$$g(y+1) = y + 1 + w(y+1).$$

Y sustituyendo estos valores en (3.27), tenemos

$$g(y+1) - g(y) = 1,$$

de donde se deduce que

$$1 + w(y+1) - w(y) = 1,$$

y por tanto

$$w(y+1) = w(y)$$

para todo $y$, luego hemos llegado a que

$$g(y) = \varphi(\psi(y)) = y + w(y), \tag{3.29}$$

donde $w(y)$ es una función periódica de $y$ de periodo 1. Así, como $\psi(y) = x$, entonces $y = \psi^{-1}(x)$, y por tanto, sustituyendo en (3.29), tenemos

$$\varphi(x) = \psi^{-1}(x) + w(\psi^{-1}(x)). \tag{3.30}$$

Ahora, tenemos que encontrar la función $\psi^{-1}(x)$, de la siguiente manera. Tomamos $x = \psi(y)$ y $f(x) = \psi(y+1)$, tenemos

$$\psi(y+1) = f(\psi(y)). \tag{3.31}$$

Así, tenemos una ecuación en diferencias finitas, de la cual sacamos $\psi(y)$, y siendo esta función conocida tenemos

$$x = \psi(y)) \text{ e } y = \psi^{-1}(x),$$

es decir, $\varphi(x) = \psi^{-1}(x) + w(\psi^{-1}(x))$ es la función buscada.
A continuación, vamos a ver algunos ejemplos, para aplicar el método descrito.

**Ejemplo 3.8.** *Supongamos por ejemplo que $f(x) = x^n$, entonces $\varphi(x) + 1 = \varphi(x^n)$ y la ecuación asociada (3.31) quedará*

$$\psi(y+1) = (\psi(y))^n. \tag{3.32}$$

*Poniendo sucesivamente $y+1$, $y+2$, etc. en lugar de $y$, tendremos,*

$$\psi(y+2) = [\psi(y+1)]^n = (\psi(y))^{n^2},$$

[5] Donde $\Delta$ es el operador diferencia $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$

$$\psi(y+3) = [\psi(y+2)]^n = (\psi(y))^{n^3},$$

*en general,*

$$\psi(y+x) = [\psi(y+(x-1))]^n = (\psi(y))^{n^x}.$$

*Haciendo ahora* $y = 0$ *y* $\psi(0) = a$*, se tiene,* $\psi(1) = a^n$*,* $\psi(2) = a^{n^2}$*,..., de donde se deduce que* $\psi(x) = a^{n^x}$*, y por tanto,* $\psi(y) = a^{n^y}$*. Como* $\psi(y) = x$ *y* $a^{n^y} = x$*, por lo tanto,* $n^y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$*, de modo que*

$$y = \frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)},$$

*por tanto,*

$$\psi^{-1}(x) = \frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)}.$$

*Así, la ecuación (3.30) quedará como*

$$\varphi(x) = \frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)} + w\left(\frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)}\right),$$

*que es la solución de la ecuación funcional* $\varphi(x^n) = \varphi(x) + 1$*.*
*A continuación, vamos a ver que efectivamente es solución:*

$$\begin{aligned}
\varphi(x^n) &= \frac{\ln(\ln(x^n)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)} + w\left(\frac{\ln(\ln(x^n)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)}\right) \\
&= \frac{\ln(n) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)} + w\left(\frac{\ln(n) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)}\right) \\
&= 1 + \frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)} + w\left(1 + \frac{\ln(\ln(x)) - \ln(\ln(a))}{\ln(n)}\right) \\
&= 1 + \varphi(x).
\end{aligned}$$

*El caso más simple sería con* $w(y) = 0$ *y* $a = e$*, pues* $\ln(e) = 1$ *y por tanto,*

$$\varphi(x) = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(n)}$$

*y*

$$\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(n)} + 1 = \frac{\ln(\ln(x^n))}{\ln(n)}.$$

Tras dar este ejemplo, Abel indica cómo proceder en la ecuación funcional general [2, t.II.pp.38-39]

$$F[x, \varphi(f(x)), \varphi(\psi(x))] = 0, \tag{3.33}$$

donde $F$, $f$ y $\psi$ son funciones dadas, y donde la función $\varphi$ es la que estamos buscando. Si ponemos $f(x) = y_t$ y $\psi(x) = y_{t+1}$, la ecuación (3.33) queda como

$$F(x, \varphi(y_t), \varphi(y_{t+1})) = 0. \tag{3.34}$$

Si $\varphi(y_t) = u_t$, tendremos $\varphi(y_{t+1}) = u_{t+1}$, y por tanto,

$$F(x, u_t, u_{t+1}) = 0. \tag{3.35}$$

De la ecuación $f(x) = y_t$, deducimos $x = f^{-1}(y_t)$, donde sustituyendo este valor en la ecuación $\psi(x) = y_{t+1}$, se obtiene

$$y_{t+1} = \psi(f^{-1}(y_t)). \tag{3.36}$$

De (3.36), sacamos $y_t$, y en consecuencia también, $x = f^{-1}(y_t)$ en función de $t$. Sustituyendo estos valores en (3.35), tenemos

$$F(f^{-1}(y_t), u_t, u_{t+1}) = 0, \tag{3.37}$$

que es una ecuación en diferencias finitas, dada de forma implícita.
De (3.37), deducimos que $u_t = \theta(t) = \varphi(y_t)$. Haciendo ahora, $y_t = z$, tendremos $t = y_z^{-1}$, y finalmente,

$$\varphi(z) = \theta(y_z^{-1}). \tag{3.38}$$

A continuación, vamos a ver otro ejemplo.

**Ejemplo 3.9.** *Vamos a buscar la función $\varphi$ que satisface la ecuación funcional*

$$(\varphi(x))^2 = \varphi(2x) + 2. \tag{3.39}$$

*Si $\varphi(x) = u_t = \varphi(y_t)$ y $\varphi(2x) = u_{t+1} = \varphi(y_{t+1})$, tendremos*

$$(u_t)^2 = u_{t+1} + 2.$$

*De donde,*

$$u_{t+1} = u_t^2 - 2.$$

*Supongamos ahora que*

$$u_1 = a + \frac{1}{a},$$

*por lo tanto*

$$u_2 = a^2 + \frac{1}{a^2},$$

$$u_3 = a^4 + \frac{1}{a^4},$$

*en general, tendremos*

$$u_t = a^{2^{t-1}} + \frac{1}{a^{2^{t-1}}}.$$

*Si ahora tenemos $x = y_t$ y $2x = y_{t+1}$ tendremos $y_{t+1} = 2y_t$, y por tanto*

$$y_t = c2^{t-1} = x,$$

*así*

$$2^{t-1} = \frac{x}{c}.$$

*Sustituyendo este valor en la ecuación $\varphi(x) = u_t$, tenemos*

$$\varphi(x) = u_t = a^{2^{t-1}} + a^{-2^{t-1}},$$

*de donde*

$$\varphi(x) = a^{\frac{x}{c}} + a^{-\frac{x}{c}} = (a^{\frac{1}{c}})^x + (a^{\frac{1}{c}})^{-x},$$

*o bien,*

$$\varphi(x) = b^x + b^{-x}.$$

*Y por tanto, finalmente, satisface* (3.39) *ya que*

$$(\varphi(x))^2 = (b^x + b^{-x})^2 = b^{2x} + b^{-2x} + 2 = \varphi(2x) + 2.$$

Con esto concluimos el capítulo. En el siguiente capítulo veremos cómo ha ido avanzando esta ecuación $\varphi(f(x)) = f(x) + 1$ como hemos comentado ya, impulsada principalmente por el enunciado de uno de los problemas de Hilbert.

# Capítulo 4

# Nuevas aportaciones a los métodos de Abel

En este capítulo, vamos a ver cómo, a raíz de uno de los enunciados los problemas de Hilbert, algunas de las ecuaciones vistas en el capítulo anterior han ido evolucionando. Usaremos para ello [3].
En su famosa conferencia del Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, Hilbert enunció la segunda parte de su quinto problema como sigue: "Moreover, we are thus led to the wide and interesting field of functional equations which have been heretofore investigated usually only under the assumption of the differentiability of the functions involved. In particular the functional equations treated by Abel (Oeuvres, vol.I,pp.1,61,389) with so much ingenuity... and other equations occurring in the literature of mathematics, do not directly involve anything which necessitates the requirement of the differentiability of the accompanying functions... In all these cases, then, the problem arises: *In how far are the assertions which we can make in the case of differentiable functions true under proper modifications without this assumption?*"[1]
Por tanto, Hilbert se pregunta si se puede llegar a los mismos resultados de las ecuaciones tratadas por Abel [2, pp1,61,389,t,I], además de otras ecuaciones, eliminando el requisito de la diferenciabilidad y suponiendo condiciones más generales sobre las funciones.

Como sabemos, [1], [2], Abel hizo cuatro publicaciones y tres manuscritos sobre ecuaciones funcionales. Para ver el estado de la cuestión sobre la segunda parte de este quinto problema de Hilbert se puede consultar [3], en donde se hace un estudio de la evolución de diferentes ecuaciones funcionales de Abel y de la eliminación de la condición de diferenciabilidad. Nosotros nos centraremos sólo en dar algunos apuntes de la evolución de las ecuaciones funcionales $f(x+y) = g(xy) + h(x-y)$ y $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$.

[1] Además, de este modo nos dirigimos al amplio e interesante campo de las ecuaciones funcionales que hasta ahora han sido investigadas normalmente sólo bajo la hipótesis de la diferenciabilidad de las funciones involucradas. En particular, las ecuaciones funcionales tratadas por Abel con tanta ingenuidad... y otras ecuaciones que aparecen en la literatura, que no requieren otra cosa más que el requisito de la diferenciabilidad de las funciones que las componen... En todos estos casos, entonces, surge el siguiente problema: ¿Hasta qué punto son ciertas las afirmaciones que podemos hacer en el caso de funciones diferenciables, ahora bajo modificaciones apropiadas, sin esta hipótesis?

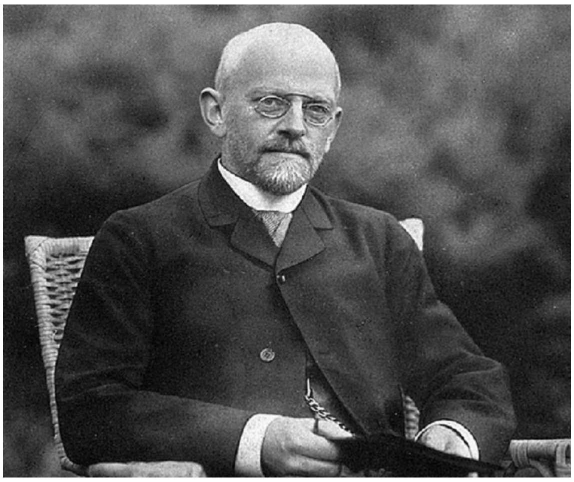

Figura 4.1: David Hilbert

## 4.1. Evolución de $f(x+y) = g(xy) + h(x-y)$

En primer lugar, vamos a ver cómo evoluciona la ecuación

$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y). \tag{4.1}$$

Fue en 1823 cuando Abel estudió esta ecuación funcional, pero no quedó ahí la cosa ya que en 1960 Roscau [16] resolvió la ecuación bajo la condición de que las incógnitas $f$, $g$ y $h$ eran continuas, pero la prueba no era del todo correcta. Unos años más tarde, en 1964, fue Stamate [19] quien encontró la solución general medible de esta ecuación. En 1987 fue Lajkó quien dio la solución general de esta ecuación, sin imponer ninguna condición de regularidad a las incógnitas. En 1989, Aczél [3] también determinó la solución general a esta ecuación al reducirla a la ecuación funcional de Cauchy. Finalmente, en 1994 Lajkó consiguió dar una nueva demostración, más elemental, para la resolución de (4.1) sin suponer regularidad alguna sobre las funciones desconocidas. A continuación, vamos a presentar dicha demostración de Lajkó dada en [4] para resolver la ecuación (4.1).

**Teorema 4.1.** *Si las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ satisfacen la ecuación funcional* (4.1)

$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y),$$

*entonces*

$$f(x) = A(\frac{x^2}{4}) + \alpha + \beta, \tag{4.2}$$

$$g(x) = A(x) + \alpha, \tag{4.3}$$

$$h(x) = A(\frac{x^2}{4}) + \beta, \tag{4.4}$$

*donde $x \in \mathbb{R}$, $\alpha$ y $\beta$ son constantes reales arbitrarias y $A : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ es una función aditiva de $\mathbb{R}^2$, es decir, que preserva la suma ($A(x+y) = A(x) + A(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$). Además, como condición inicial tenemos que $f(0) = g(0) + h(0)$.*

*Demostración.* En la ecuación (4.1) haremos las siguientes sustituciones:

- Si $y = 0$, sustituyendo en (4.1), tenemos:

$$f(x) = g(0) + h(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

- Si $x = y = \frac{t}{2}$, volviendo a sustituir en (4.1) tenemos:

$$f(t) = g\left(\frac{t^2}{4}\right) + h(0), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

- Si $x = -y = \frac{t}{2}$, sustituimos de nuevo en (4.1) y tenemos por último:

$$f(0) = g\left(\frac{-t^2}{4}\right) + h(t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Así, podemos realizar las siguientes sustituciones:

- Si en (4.6) hacemos $t = x + y$, entonces:

$$f(x+y) = g\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right) + h(0). \tag{4.8}$$

- Si en (4.7) hacemos $t = x - y$, entonces:

$$f(0) = g\left(-\left(\frac{x-y}{2})^2\right)\right) + h(x-y), \tag{4.9}$$

  donde despejando $h(x-y)$, tenemos:

$$h(x-y) = f(0) - g\left(-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right). \tag{4.10}$$

Además igualando (4.8) a (4.1):

$$f(x+y) = g(xy) + h(x-y) = g\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right) + h(0). \tag{4.11}$$

Si usamos ahora (4.10) para reemplazar el valor de $h(x-y)$ en (4.11), obtenemos:

$$g(xy) + f(0) - g\left(-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right) = g\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right) + h(0). \tag{4.12}$$

Como sabemos que $f(0) = g(0) + h(0)$,

$$g(xy) + g(0) + h(0) - g\left(-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right) = g\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right) + h(0). \tag{4.13}$$

Finalmente nos queda:

$$g(xy)+g(0)-g\left(-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right)=g\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\right)+h(0),\ \text{para todo}\, x,y\in\mathbb{R}. \tag{4.14}$$

A continuación, vamos a hacer la siguiente transformación

$$xy=u\,\text{y}\,v=\left(\frac{x-y}{2}\right)^2. \tag{4.15}$$

Por tanto, $u+v=xy+\frac{(x-y)^2}{4}=\frac{x^2+2xy+y^2}{4}=\frac{(x+y)^2}{4}$, y sustituyendo estos cambios en (4.14), tenemos:

$$g(u)+g(0)-g(-v)=g(u+v), \tag{4.16}$$

ecuación funcional que queda ahora definida en $D=\{(u,v):u+v\geq 0, v\geq 0\}$.

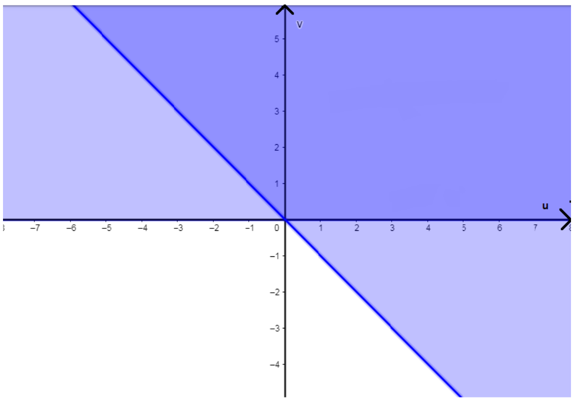


Figura 4.2: Dominio de definición

En la Figura 4.2 podemos observar de color azul oscuro el dominio $D$ definido anteriormente. En (4.16) escribimos $u=0$ y tenemos $g(v)=g(0)+g(0)-g(-v)=2g(0)-g(-v)$, es decir,

$$g(v)+g(-v)=2g(0). \tag{4.17}$$

De (4.16) tenemos que $g(-v)=g(u)+g(0)-g(u+v)$ y sustituyendo en (4.17) tenemos:

$$\begin{aligned} g(v)+g(u)+g(0)-g(u+v)=2g(0) &\Longleftrightarrow g(u+v)=g(u)+g(v)-g(0)\\ &\Longleftrightarrow g(u+v)+g(0)=g(u)+g(v). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g(u+v)=g(u)+g(v)-g(0) \tag{4.18}$$

si $(u,v)\in D$.
Ahora definimos

$$A(x)=g(x)-g(0),\ \text{con}\, x\in\mathbb{R}. \tag{4.19}$$

Entonces, resulta que

$$A(u+v)=A(u)+A(v) \tag{4.20}$$

para todo $(u, v) \in D$, ya que

$$\begin{aligned} A(u+v) &= g(u+v) - g(0) \\ &= (g(u) + g(v) - g(0)) - g(0) \\ &= (g(u) - g(0)) + (g(v) - g(0)) \\ &= A(u) + A(v). \end{aligned}$$

Debido a la simetría de $u$ y $v$ en (4.20) e intercambiando los papeles de $u$ y $v$, deducimos que la ecuación (4.20) se verifica en $D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u + v \geq 0\}$.
A continuación, veamos que la ecuación funcional (4.20) se puede extender, en

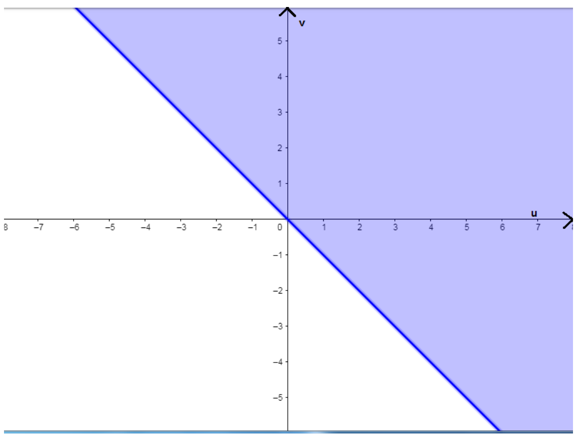


Figura 4.3: Gráfica del dominio extendido

realidad, a todo el plano $\mathbb{R}^2$, no solo a $D^*$. Para ello, sea $(u, v) \notin D^*$. Entonces, $u + v < 0$ y en ese caso, existe $x \geq 0$ tal que $x + u \geq 0$ y $x + u + v \geq 0$. Esto implica que los puntos $(x, u)$, $(x + u, v)$ y $(x, u + v)$ están en $D^*$. Entonces se puede aplicar (4.20) sucesivamente a los puntos $(x, u + v)$, $(x + u, v)$ y $(x, u)$ , llegando a:
Por lo tanto,

$$A(u + v) = A(u) + A(v) \tag{4.21}$$

para todo $u, v \in \mathbb{R}$ con $u + v < 0$. Así, (4.20) se puede extender a todo $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto por (4.19), obtenemos

$$g(x) = A(x) + \alpha \tag{4.22}$$

donde $\alpha := g(0)$ y $A(x)$ es una función aditiva en $\mathbb{R}$. Usando (4.22) y (4.6), con $t = x$, tenemos:

$$f(x) = A\left(\frac{x^2}{4}\right) + \alpha + h(0). \tag{4.23}$$

Llamando $h(0) := \beta$, encontramos

$$f(x) = A\left(\frac{x^2}{4}\right) + \alpha + \beta \;\text{ para todo}\, x \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Usando ahora (4.24) en (4.5), y teniendo en cuenta que $\alpha := g(0)$, deducimos que

$$h(x) = A\left(\frac{x^2}{4}\right) + \beta. \tag{4.25}$$

Y así, por tanto, concluimos la demostración del teorema. □

Hemos visto así la solución de la ecuación (4.1), con la demostración del teorema 4.1, en el que como hemos visto se encuentra la solución sin ninguna suposición de continuidad o medibilidad. A continuación, vamos a ver un corolario, en el que obtendremos la solución de la ecuación (4.1) suponiendo que las funciones del teorema 4.1 son continuas, pero antes necesitamos un teorema previo que usaremos en su demostración. Este teorema previo nos da la solución de la ecuación funcional de Cauchy $f(x+y)=f(x)+f(y)$ cuando $f$ es continua.

**Teorema 4.2.** *Una función continua $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ satisface la ecuación*

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \ \ \textit{para todo}\, x,y\in\mathbb{R} \tag{4.26}$$

*si y solo si existe una constante $c$ tal que $f(x)=cx$.*

*Demostración.* En primer lugar haciendo $x=y=0$ en (4.26), tenemos:

$$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0),$$

de donde $f(0)=0$. Ahora reemplazamos en (4.26) $y$ por $-x$ y tenemos:

$$\begin{array}{rcl} f(x-x) & = & f(x)+f(-x) \ \text{ si y solo si} \\ f(0) & = & f(x)+f(-x) \ \text{ si y solo si}\, f(x)+f(-x)=0 \end{array}$$

y por tanto,

$$f(-x)=-f(x).$$

Con esto, vemos que es suficiente hallar la solución $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ de (4.26). Aplicando ahora inducción, si $n\in\mathbb{N}$ tenemos:

$$f(n)=f(1+\ldots+1)=f(1)+\ldots+f(1)=nf(1).$$

Para números racionales $\frac{m}{n}$ con $m,n>0$ tenemos:

$$f(1) \ = \ f\left(\frac{n}{n}\right)=f\left(\frac{1+\ldots+1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right)$$

es decir,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{f(1)}{n}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(m\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= mf\left(\frac{1}{n}\right)=m\frac{f(1)}{n}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

En general, para $x\in\mathbb{R}$, sea $\{q_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión de números racionales, con $\lim_{n\to\infty}(q_n)=x$ y $f$ una función continua, se tiene:

$$f(q_n)=f(1)q_n$$

por (4.27) y así

$$\lim_{x\to\infty}(f(q_n)) = \lim_{x\to\infty}(f(1)q_n),$$

por lo que

$$f(\lim_{x\to\infty}(q_n)) = f(1)\lim_{x\to\infty}(q_n).$$

En consecuencia, $f(x) = f(1)x$. Y por tanto, haciendo $c = f(1)$, obtenemos que $f(x) = cx$. □

Ahora, podemos ya enunciar el corolario del teorema 4.1 que queríamos demostrar.

**Corolario 4.3.** *Si, además de las condiciones del teorema 4.1, una de las funciones $f, g, h$ es continua, entonces:*

$$f(x) = \gamma\frac{x^2}{4} + \alpha + \beta, \tag{4.28}$$

$$g(x) = \gamma x + \alpha, \tag{4.29}$$

$$h(x) = \gamma\frac{x^2}{4} + \beta, \tag{4.30}$$

*donde $x \in \mathbb{R}$ y $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ son constantes arbitrarias reales.*

*Demostración.* Si $g$ es continua, entonces por (4.19), $A$ es continua y satisface la ecuación funcional de Cauchy, por lo que $A(x) = \gamma x$ $(x \in \mathbb{R})$. Entonces, usando las ecuaciones del teorema 4.1, tenemos:

- De (4.2) deducimos que $A(\frac{x^2}{4}) = \gamma\frac{x^2}{4}$ y sustituyendo en (4.2), obtenemos (4.28).
- De igual modo con $A(x) = \gamma x$ y sustituyendo en (4.3), obtenemos (4.29).
- Por último sustituyendo de nuevo $A(x) = \gamma\frac{x^2}{4}$ en (4.4), obtenemos (4.30).

Repitiendo el proceso con $f$ y $h$, concluimos la demostración del corolario. □

Con esto concluimos el avance de la ecuación (4.1) que vimos en el segundo capítulo, ver (2.18), y que resolvimos en el tercer capítulo siguiendo el método de Abel.

## 4.2. Evolución de $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$

En esta sección vamos a ver cómo evoluciona la ecuación

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1. \tag{4.31}$$

Como vimos en el capítulo tercero, Abel no impone ninguna condición general para resolver esta ecuación salvo el hecho de que $f$ tenga inversa para que el cambio $f(x) = \psi(y+1)$ se pueda llevar a cabo con una función $\psi$ invertible. Ahora vamos a analizar la solución de esta ecuación con otras condiciones sobre la función $f$. Esta ecuación tiene una literatura inmensa. Parte de ella viene recogida en [11, Cap.7], [12,

Caps.8-9], [6].
Una vez visto esto, lo más lógico es preguntarse si esta ecuación siempre tendrá solución y cuál es la condición necesaria y suficiente para que la tenga.
Ya vimos en el capítulo anterior cómo, dada una solución en diferencias finitas de la ecuación (4.31), se encontraba una solución general y un ejemplo.
El método indicado por Abel da inmediatamente una solución de la ecuación (4.31) cuando $f$ es invertible, pero falta buscar otras condiciones necesarias y suficientes sobre $f$ para que la ecuación tenga solución.
Para empezar, nos damos cuenta de que es evidente que no siempre hay solución, pues si por ejemplo consideramos

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + c, \tag{4.32}$$

tendremos que $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + c$ y sustituyendo este valor de $\varphi(x)$ en (4.32), tenemos

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + 2c,$$

es decir, $c = 0$, lo que quiere decir que la ecuación tendrá solución sólo si $c = 0$. Si por ejemplo $c = 1$, tendríamos

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) + 2,$$

lo cual es una contradicción. Por lo que $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + 1$ no tiene solución.
A continuación, vamos a ver un lema relacionado con el ejemplo que hemos visto.

**Lema 4.4.** *Cualquier solución de la ecuación*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + c, \tag{4.33}$$

*con $c \neq 0$, proporciona una solución de la ecuación $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$.*

*Demostración.* Sea $\varphi_0(x)$ una solución de $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + c$ y $\Omega(x)$ una función arbitraria de periodo 1. Entonces $\varphi_1(x) = \Omega\left(\frac{1}{c}\varphi_0(x)\right)$ es solución de $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$. En efecto, usando la definición de $\varphi_1$, que $\varphi_0$ es solución de (4.33) y que $\Omega$ es periódica de periodo 1:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(f(x)) &= \Omega\left(\frac{1}{c}\varphi_0(f(x))\right) = \Omega\left(\frac{1}{c}[\varphi_0(x) + c]\right) \\
&= \Omega\left(\frac{1}{c}\varphi_0(x) + 1\right) = \Omega\left(\frac{1}{c}\varphi_0(x)\right) = \varphi_1(x).
\end{aligned}$$

□

El inverso no es cierto, y un contraejemplo de ello es el ejemplo visto para la ecuación (4.32).

Ahora, veamos que la ecuación (4.33), con $c \neq 0$, siempre se puede reducir a (4.31). En efecto con la sustitución $\varphi(x) = c\psi(x)$, la ecuación $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$ se reducirá a

$$\psi(f(x)) = \psi(x) + 1,$$

que es la ecuación (4.31).
Sea ahora $E$ un conjunto cualquiera de la recta real y sea $f(x)$ una función definida para cualquier valor de $x \in E$. Recordemos que $f(E) = \{f(x) : x \in E\}$.

**Definición 4.5.** *Designando por $\mathbb{E}$ un conjunto de números reales que contiene los puntos de $E$ y $f(E)$, una función $\varphi(x)$ definida en $\mathbb{E}$ es solución de la ecuación (4.31) si se cumple esta ecuación para cualquier $x \in E$.*

Dada una función $f(x)$ definida en un conjunto $E$, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que la ecuación (4.31) tenga solución?
Antes de contestar a esta pregunta, vamos a ver una serie de definiciones que nos harán falta más adelante en el desarrollo para contestar a la pregunta anterior. Recordemos primero la definición de la iterada $n$-ésima de una función:

**Definición 4.6.** *Sea $f$ una función cualquiera, entonces $f^1 = f$ y $f^n = f \circ f^{n-1}$ si $n \geq 2$. Por $f^0$ se entiende la función identidad, $f^0(x) = x$.*

**Definición 4.7.** *Sean $x$ e $y$ números reales. Si existen índices enteros no negativos $m$ y $n$ tales que $f^m(x) = f^n(y)$, diremos que $x$ e $y$ son de la misma clase. Llamaremos $C(x)$ al conjunto de todos los puntos $y$ que son de la misma clase que un punto $x$ dado.*

**Definición 4.8.** *Llamaremos base de la función $f(x)$ en $\mathbb{E}$ al conjunto $B(f)$ de todos los puntos de $\mathbb{E}$ que cumplen las propiedades siguientes:*

1. *No hay dos puntos de la misma clase en $B(f)$.*
2. *A cada punto $x \in \mathbb{E}$ le corresponde en $B(f)$ un punto $b_x$ tal que $x$ es de clase $C(b_x)$.*

Sabiendo estas definiciones, la respuesta a nuestra pregunta anterior estará en el siguiente teorema que aparece en [20, Théorèm I].

**Teorema 4.9.** *Para que la ecuación (4.31),*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1,$$

*admita una solución en $\mathbb{E}$ es necesario y suficiente que la ecuación $f^n(x) = x$ no se cumpla para ningún punto de $E$ ni para ningún índice natural $n$.*

Lo que el teorema quiere decir es que es necesario y suficiente que la función $f$ no tenga puntos periódicos en $E$.
Antes de pasar a la demostración de este teorema, vamos a ver tres lemas previos que necesitaremos para desarrollar dicha demostración.

**Lema 4.10.** *Para que la ecuación* (4.31)

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1,$$

*admita una solución $\varphi(x)$ en $\mathbb{E}$ la ecuación $f^n(x) = x$ no se debe cumplir para ningún punto $x$ de $E$ ni para ningún índice natural $n$.*

*Demostración.* Por reducción al absurdo, supongamos que $x_0 \in E$ es un punto tal que $f^n(x_0) = x_0$ para algún $n > 0$. Entonces tendremos que $x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0) \in E$. Sea ahora $\varphi(x)$ una solución de la ecuación (4.31) en $\mathbb{E}$, tendremos

$$\varphi(x_0) = \varphi(f^n(x_0)) = \varphi(f^{n-1}(x_0)) + 1 = \varphi(f^{n-2}(x_0)) + 2 = ... = \varphi(x_0) + n,$$

lo cual es una contradicción. □

En los dos siguientes lemas supondremos que no se cumple nunca la igualdad $f^n(x) = x$ para $n > 0$ y $x \in E$.

**Lema 4.11.** *Si para dos puntos $x$ e $y$ existen enteros no negativos $p$ y $q$ tales que $f^p(x) = f^q(y)$, entonces la diferencia $p - q$ es un valor fijo, cualesquiera que sean los índices $p$ y $q$ que satisfacen la condición.*

*Demostración.* Supongamos que existen otros índices $p_1$ y $q_1$ tales que $f^{p_1}(x) = f^{q_1}(y)$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p_1 > p$ entonces

$$f^{p_1}(x) = f^{p_1-p}(f^p(x)) = f^{p_1-p}(f^q(y)) = f^{p_1-p+q}(y).$$

Si no tuviéramos $q_1 = p_1 - p + q$, es decir, $p_1 - q_1 = p - q$, tendríamos por ejemplo $q_1 > p_1 - p + q$ y

$$f^{q_1}(y) = f^{p_1}(x) = f^{p_1-p+q}(y),$$

por tanto, $f^n(z) = z$ para $n = q_1 - p_1 + p - q$ y $z = f^{p_1-p+q}(y)$, es decir, $f$ tendría un punto periódico, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $f$ no tiene puntos periódicos. Para los otros casos se razona de forma similar. □

**Lema 4.12.** *Dada una base $B(f)$ en $\mathbb{E}$, podemos obtener la solución general de*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1$$

*eligiendo arbitrariamente una función $\psi(x)$ definida arbitrariamente en $B(f)$ y poniendo entonces*

$$\varphi(x) = \psi(b_x) + p - q,$$

*donde $b_x$ es el elemento de $B(f)$ relacionado con $x$ según los índices $p$ y $q$, es decir, $f^p(b_x) = f^q(x)$.*

*Demostración.* Primero vamos a ver que $\varphi(x)$ está bien definida. Como la definición de $B(f)$ nos garantiza que para cada $x \in \mathbb{E}$ sólo hay un $b_x$ en $B(f)$ y el Lema 4.11 nos dice que la diferencia $p - q$ es fija, entonces la imagen de cada $x$ es única y $\varphi(x)$ está bien definida. Observemos que $\varphi(b_x) = \psi(b_x)$ para cada $b_x \in B(f)$.
Por otra parte

$$\varphi(f(x)) = \psi(b_x) + p + 1 - q = (\psi(b_x) + p - q) + 1 = \varphi(x) + 1,$$

pues $f^{p+1}(b_x) = f^{q+1}(x) = f^q(f(x))$ (tenemos en cuenta que $x$ y $f(x)$ tienen el mismo representante $b_x \in B(f)$). Además, si $\varphi(x)$ es una solución de (4.31) definida en $\mathbb{E}$, si $x$ es un punto de $\mathbb{E}$ y $f^p(b_x) = f^q(x)$, entonces:

$$\varphi(f^p(b_x)) = \varphi(f^{p-1}(b_x)) + 1 = ... = \varphi(b_x) + p, \tag{4.34}$$

$$\varphi(f^q(x)) = \varphi(f^{p-1}(x)) + 1 = ... = \varphi(x) + q. \tag{4.35}$$

Despejando $\varphi(x)$ de (4.35), teniendo en cuenta que $f^p(b_x) = f^q(x)$ y sustituyendo en (4.34) se tiene:

$$\varphi(x) = \varphi(f^q(x)) - q = \varphi(f^p(b_x)) - q = \varphi(b_x) + p - q = \psi(b_x) + p - q,$$

con lo cual la solución $\varphi$ es de la forma del enunciado. □

Ahora ya sí que pasamos a demostrar el Teorema 4.9, es decir, vamos a demostrar que $f$ no tenga puntos periódicos es suficiente para que (4.31) tenga solución.

*Demostración.* Con el Lema 4.10 hemos probado la condición necesaria, falta probar la condición suficiente, para ello basta probar que siendo $f^k(x) \neq x$ para todo $x \in C(x)$ y para todo $n$ natural podemos construir una base $B(f)$ en $\mathbb{E}$ y aplicar el Lema 4.12 y así concluimos con la demostración del Teorema 4.9. □

Con esto ponemos punto y final a nuestra pregunta sobre cuáles serán las condiciones necesarias y suficientes para que (4.31) tenga solución.
El teorema Teorema 4.9 que acabamos de demostrar no nos dice nada sobre la continuidad u otras características generales que pueda tener la solución de (4.31), como ser medible, integrable, diferenciable, analítica,... Aunque no vamos a dar la prueba, sí que podemos destacar los siguientes resultados que nos garantizan que las soluciones son integrables, son de clase $C^1$ o son analíticas. En este sentido, cabe mencionar el artículo de J. Aczél [3, pp.155], en donde se cita un resultado de Zdun [21].

**Teorema 4.13.** *Supongamos que $f$ es continua, convexa y estrictamente creciente en $[0, a]$, $0 < f(x) < x$ para todo $x \in (0, a]$ y sea $f^n$ la iterada $n$-ésima de $f$. Entonces la ecuación* (4.31) *tiene una solución $\varphi$ integrable si, y solo si,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f^n(x_0) \tag{4.36}$$

*es convergente para algún $x_0 \in (0, a]$. Esta solución depende de una función integrable arbitraria $\varphi_0$ en $(f(a), a]$.*

Lo que quiere decir que, para cada $\varphi_0$, hay una solución de $\varphi$ en (4.31), integrable en $(0, a)$ cuya restricción en $(f(a), a]$ es $\varphi_0$.
Por otra parte, en [7] encontramos la prueba de que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo sin puntos fijos, entonces la ecuación de Abel (4.31) tiene soluciones continuas. De hecho, se prueba incluso que bajo la hipótesis de que $f$ sea un homeomorfismo, entonces la ecuación funcional $\varphi(f(x)) = \varphi(x) + \gamma(x)$ tiene soluciones continuas para toda función continua dada $\gamma(x)$.
Para acabar, citamos otro resultado interesante sobre las condiciones que le podemos imponer a la ecuación (4.31), que encontramos en [8].

**Teorema 4.14.** *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función analítica. Entonces la ecuación de Abel (4.31)*

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) + 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

*tiene una solución real analítica $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ si y solo si $f$ no tiene puntos fijos y el conjunto de puntos críticos de $f$ está acotado superiormente (cuando $f > \mathrm{id}$) o inferiormente (cuando $f < \mathrm{id}$). Además, en ese caso hay una solución real analítica $\varphi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de modo que su conjunto de puntos críticos está delimitado superiormente (cuando $f > \mathrm{id}$) o inferiormente (cuando $f < \mathrm{id}$), y para tal solución $\varphi_0$ se cumple que cada solución $\varphi$ de la ecuación funcional de Abel es de la forma $\varphi(x) = \varphi_0(x) + g(\varphi_0(x))$, donde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real analítica arbitraria de periodo 1.*

Con este breve repaso de (4.31) hemos querido destacar la importancia que ha tenido esta ecuación a lo largo de la historia y la cantidad de trabajos que actualmente sigue originando su estudio.

# Bibliografía


[1] *N.H. Abel (1839). Oeuvres completes de Niels Henrik Abel.* Ed. B.M. Holmboe. Grondahl Imprimeur-Libraire, Christinia.

[2] *N.H. Abel (1881). Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel.* Eds. L. Sylow, S. Lie. Imprimerie de Grondahl & Son, Christiania.

[3] *J. Aczél (1989). The state of the second part of Hilbert's fifth problem.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **20** (1989), 153-163.

[4] *J. Aczél (2006). Lectures on functional equations and their applications.* Dover Publications, Inc. New York.

[5] *J.M. Almira, J.A. Cid (2016). Abel. El desarrollo de las funciones elípticas.* Ed. RBA, Barcelona.

[6] *K. Baron, W. Jarczyk (2001). Recent results on functional equations in a single variable, perspectives and open problems.* Aequationes Math. **61** (2001), 1-48.

[7] *G.Belitskii, Yu. Lyubich (1998). The Abel equation and total solvability of linear functional equations.* Studia Math. **127** (1998), 81-97.

[8] *J. Bonet, P. Domański (2015). Abel´s functional equation and eigenvalues of composition operators on spaces of real analytic functions.* Integr. Equ. Oper. Theory **81** (2015), 455-482.

[9] *D. Hilbert (1902). Mathematical Problems. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at París in 1900.* Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1902), 437-479.

[10] *C. Houzel (2004). The work of Niels Henrik Abel.* En: The Legacy of Niels Henrik Abel-The Abel Bicentenial, Oslo 2002. Eds. O.A.Laudal, R.Piene. Springer-Verlag, Berlín.

[11] *M.Kuczma (1968). Functional equations in a single variable.* Polish Scientific Publishers, Warszawa.

[12] *M. Kuczma, B. Choczewski, R. Ger (1989). Iterative functional equations.* Cambridge University Press, Cambridge.

[13] *K. Lajkó (1994). The general solution of Abel-type functional equations.* Results Math. **26** (1994), 336-341.

[14] *M. Livio (2013). La ecuación jamás resuelta.* Ed. Ariel, Barcelona.

[15] *S.D. Poisson (1811). Traité de Mécanique. Tome Premier.* Chez Mme. veuve Courcier, París.

[16] *H. Roscau (1960). Asupra ecuatiei functionale* $\psi(x+y) = f(xy) + \varphi(x-y)$. Inst. Polithen. Cluj Lucrari Sti. (1960), 43-45. En rumano.

[17] *M. Rzedowski Calderón (2016). La demostración de Abel.* Miscelánea Matemática **63** (2016), 1-28.

[18] *C. Sánchez, T. Noriego (2005). Abel. El romántico nórdico.* Ed. Nivola, Madrid.

[19] *I. Stamate (1964). Equatii functionale de tip Pexider, nota a II-a.* Bul. Sti. Inst. Politehn. Cluj **7** (1964), 51-62. En rumano.

[20] *R. Tambs Lyche (1927). Études sur l'équation fonctionnelle d'Abel dans le cas des fonctions réelles.* Tesis presentada en la Universidad de Estrasburgo.

[21] *M.C. Zdun (1977). On integrable solutions of Abel´s functional equations.* Glas. Math. Ser. III **12** (1977), 49-59.